# Глава 11

# Наследники

Venez, vous dont l'oeil étincelle,
Pour entendre une histoire encore.
Approchez : je vous dirai celle
De doña Padilla del Flor.
Elle était d'Alanje, où s'entassent
Les collines et les halliers.
Enfants, ...

V.H.

## 11.a Наследники

В трех следующих главах, рассматриваются в основном полные типы над *моделями* полной теории $T$. Напомним, что если $M \prec N$, $q$ из $S_1(N)$ и его ограничение на $M$ есть тип $p$, то говорят, что $q$ является *расширением* или *сыном* $p$. Теория стабильности, к которой мы теперь приступаем, концентрируется на исследовании некоторых особых сыновей типа $p$. Итак, пусть $M \prec N$, $p \in S_1(M)$ и $q$ – сын $p$ над $N$; говорят, что $q$ является *наследником* $p$, если для каждой формулы $\varphi(x, \bar{y}, \bar{z})$ языка $L$ теории $T$, $\bar{a}$ из $M$ и $\bar{b}$ из $N$, если $q \vdash f(x, \bar{a}, \bar{b})$, тогда существует $\bar{b}'$ в $M$, такой, что $p \vdash f(x, \bar{a}, \bar{b}')$.

Это означает что каждая формула с параметрами из $M$, представленная в типе $q$ над $N$, уже представлена в типе $p$ с параметрами из $M$. Докажем для начала несколько легких лемм. Отметим прежде всего, что если $q$ – сын типа $p$ и $r$ – сын $q$, и если $q$ – наследник типа $p$ и $r$ – наследник $q$, тогда $r$ является наследником $p$; если $r$ является наследником $p$, то $q$ является наследником $p$ (но вообще говоря, $r$ может не быть наследником $q$). Наследники всегда существуют, как показывает следующая теорема.

**Теорема 11.1** *Пусть $M$ – модель $T$, тип $p$ из $S_1(M)$ и $N$ – элементарное расширение $M$. Обозначим через $\pi$ тип над $N$ (не предполагающийся полным), расширяющий $p$ и такой, что, как только $\pi \vdash f(x, \bar{a}, \bar{b})$, $\bar{a} \in M$, $\bar{b} \in N$, то существует $\bar{b}' \in M$, такой, что $p \vdash f(x, \bar{a}, \bar{b}')$; тогда $\pi$ может быть расширено до наследника типа $p$ над $N$.*

**Доказательство.** Рассмотрим множество формул, лежащих в $\pi$ (в которое неявно включается в $T(N)$), и все формулы $\neg g(x, \bar{a}, \bar{b})$, для которых не существует элемента $\bar{b}'$ в $M$ такого, что $p \vdash g(x, \bar{a}, \bar{b}')$. Мы утверждаем, что это множество формул непротиворечиво: действительно, если возьмем $f(x, \bar{a}, \bar{b})$ из $\pi$ и конечное множество формул $\neg g_1(x, \bar{a}, \bar{b}), \ldots, \neg g_n(x, \bar{a}, \bar{b})$, то получаем модель для этого конечного фрагмента беря для $x$ реализацию $p$ в элементарном расширении $M$, и интерпретируя $\bar{b}$ элементом $\bar{b}'$, таким, что $p \vdash f(x, \bar{a}, \bar{b}')$. Тогда действительно невозможно, чтобы $p \vdash g_i(x, \bar{a}, \bar{b}')$. Итак, по компактности это множество формул совместно, и любой полный тип из непустого замкнутого множества, определенного этими формулами, является наследником $p$.

□

Мы можем даже ещё больше уточнить эту теорему, чтобы успокоить читателей, смущенных изменением множества параметров.

**Теорема 11.2** *Пусть $p$ из $S_1(M)$, $M \prec N$ и $A$ – множество параметров $M \subset A \subset N$. Пусть $\pi$ – неполный тип над $A$ (он может быть и полным!), такой, что если $p \vdash f(x, \bar{a}, \bar{b})$, $\bar{a} \in M$, $\bar{b} \in A$, то существует $\bar{b}'$ в $M$, такой, что $p \vdash f(x, \bar{a}, \bar{b}')$. Тогда $\pi$ пополняется до наследника $p$ над $N$.*

**Доказательство.** Мы рассматриваем теперь $\pi$ как неполный тип над $N$. Предположим, что $\pi \vdash f(x, \bar{a}, \bar{c})$, где $\bar{a} \in M$, $\bar{c} \in N$; таким образом, формула

$f(x, \bar{a}, \bar{c})$ является следствием $\pi$ и $T(N)$. По компактности это означает что существует конечный фрагмент $g(\bar{b}, \bar{c})$ типа $\bar{c}$ над $A$, такой, что

$$\pi \vdash (\exists \bar{y}) g(\bar{b}, \bar{y}) \wedge (\forall y)(g(\bar{b}, \bar{y}) \to f(x, \bar{a}, \bar{y})) \; .$$

Таким образом можно найти кортеж $\bar{b}'$ в $M$, такой, что

$$p \vdash (\exists \bar{y}) g(\bar{b}', \bar{y}) \wedge (\forall y)(g(\bar{b}', \bar{y}) \to f(x, \bar{a}, \bar{y})) \; .$$

Так как $(\exists y) g(\bar{b}', \bar{y})$ не содержит $x$, то, просто, эта формула истинна в $M$. Значит, может быть найден кортеж $\bar{c}'$, такой, что $M \vdash g(\bar{b}', \bar{c}')$. Следовательно, существует $c'$ в $M$, такой, что $p \vdash f(x, \bar{a}, \bar{c}')$, и можно применить предыдущую теорему .

□

**Следствие 11.3** *Если $p$ из $S_1(M)$ и $M \prec N$, то $p$ имеет над $N$ по крайней мере одного наследника. В общем случае, если $M \prec N \prec P$, $p \in S_1(M)$ и $q$ является наследником $p$ над $N$, тогда $q$ имеет сына $r$ над $P$, являющегося наследником $p$.*

**Доказательство.** Рассмотрим $p$ как неполный тип над $M$ и применим предыдущую теорему. Для второго утверждения, можно рассматривать $q$ в качестве неполного типа над $P$, или брать наследника $q$ над $P$.

□

Ещё одно определение: пусть $p$ из $S_1(M)$ и $F$ – множество предложений в языке $L$, или даже $L(M)$, с добавлением символов констант $x_i$ ("переменные для типа ") и $y_j$ ("переменные для параметров"). Говорят что $F$ *совместно с* $p$ , если множество предложений полученное добавлением к $F$ утверждений, что все $x_i$ удовлетворяют $p$ непротиворечиво. Ясно что, если $q$ является сыном $p$, и $F$ если совместно с $q$, то оно совместно также с $p$, так как $p$ является более слабой теорией. Обратно, если $q$ является наследником $p$, и если множество формул $F$ совместно с $p$, то оно также совместно с $q$, так как каждый конечный фрагмент $q$ интерпретируется в $p$. Это – объяснение тому, почему "наследники" были так названы: они наследуют владения отца – свойство совместности с некоторым множеством формул.

Пример наследника дает ультрастепени типов. Рассмотрим ультрафильтр $U$ на множестве $I$, и для каждого $i \in I$ выберем тип $p_i$ над моделью $M_i$ теории $T$. Определим ультрапроизведение $\prod p_i/U$ типов $p_i$ как тип $q \in S_1(\prod M_i/U)$, такой, что $q \vdash f(x, \bar{a})$, где $\bar{a} = (\bar{a}_i)_{i \in I}$ , если $p_i \vdash f(x, \bar{a}_i)$ почти для всех $i$ по модулю $U$. Легко видеть, что это полное и непротиворечивое множество формул. Реализация типа $q$ получается ультрапроизведением по модулю $U$ реализаций $p_i$ .

Если все типы $p_i$ равны одному и тому же типу $p$ из $S_1(M)$, то в этом случае будем говорить об *ультрастепени* $p^U$ типа $p$; каноническое диагональное вложение $M$ в $M^U$ показывает, что $p^U$ является сыном $p$, и ясно что она будет наследником. Тем, кто предпочитают ультрапроизведениям прямые доказательства с помощью теоремы компактности, следующая теорема напомнить лемму 4.12.

**Теорема 11.4** *Если $M \prec N$, $p \in S_1(M)$ и $q$ – наследник $p$ над $N$, то существует $M$-элементарное вложение $N$ (т.е. элементарное в $L(M)$) в некоторую ультрастепень $M^U$, такое, что $p^U$ – сын $q$.*

**Доказательство.** Пусть $I$ – множество инъекций конечных подмножеств $N$ в $N$. Для каждой формулы $f(x, \bar{a}, \bar{b})$, $\bar{a} \in M, \bar{b} \in N$, такой, что $q \vdash f(x, \bar{a}, \bar{b})$, пусть $I_{f(x,\bar{a},\bar{b})}$ – множество элементов $i \in I$, определенных на $\bar{a}$ и $\bar{b}$, фиксирующих $\bar{a}$ поточечно и таких, что $p \vdash f(x, \bar{a}, i\bar{b})$. Эти множества образуют базу фильтра. Пусть $U$ – ультрафильтр, содержащий этот фильтр. Тогда получим отображение $s$ из $N$ в $M^U$, полагая $(sb)_i$ равным $ib$, если $i$ определена на $b$, и неважно чему, в противном случае. Это отображение является элементарным вложением: действительно, рассмотрим формулы $f(\bar{a}, \bar{b})$, не содержащие $x$ и такие, что $q \vdash f(\bar{a}, \bar{b})$, то есть $N \vdash f(\bar{a}, \bar{b})$! И если $N$ вкладывается таким образом в $M^U$, то $q$ является ограничением $p^U$.

□

Ультрастепени являются достаточно особыми наследниками. Каждому типу $p$ над моделью $M$ теории $T$, мы сопоставляем структуру $(M, dp)$, универсумом которой является $M$, и имеющую язык $L$ теории $T$, дополненный предикатными символами $df(\bar{y})$ для каждой формулы $f(x, \bar{y})$ языка $L$. В полученной структуре интерпретируем на $M$ предикат $df(\bar{y})$ множеством элементов $\bar{a}$ из $M$ таких, что $p \vdash f(x, \bar{a})$. Мы говорим что сын $q$ типа $p$ над $N$ есть *сильный наследник* $p$, если $(N, dq)$ является элементарным расширением $(M, dp)$ ; ультрастепень типа над $M$ является его сильным наследником.

**Лемма 11.5** *Сильный наследник является наследником; если $p \in S_1(M)$, то каждое элементарное расширение модели $(M, dp)$ имеет вид $(N, dq)$, где $q$ является сильным наследником $p$.*

**Доказательство.** Предположим, что $(M, dp) \prec (N, dq)$; если $q \vdash f(x, \bar{a}, \bar{b})$, $f \in L$, $\bar{a} \in M$, $\bar{b} \in N$, тогда $(N, dq) \vdash df(\bar{a}, \bar{b})$, значит, $(N, dq) \vdash (\exists \bar{y}) df(\bar{a}, \bar{y})$ так же, как и в $(M, dp)$. Таким образом, существует $b'$ в $M$, такой, что $(M, dp) \vdash df(\bar{a}, \bar{b}')$ и поэтому $p \vdash f(x, \bar{a}, \bar{b}')$. Так как $p$ является совместным типом над $M$, то любой его конечный фрагмент удовлетворяется элементом $M$, следовательно, в $(M, dp)$, выполняются следующие аксиомы:

$$(\forall y_1) \ldots (\forall y_n)(\exists x)(df_1(\bar{y}_1) \wedge \ldots df_n(\bar{y}_n) \to f_1(x, \bar{y}_1) \wedge \cdots \wedge f_n(x, \bar{y}_n)).$$

Они выполняются также в каждой структуре, элементарно эквивалентной $(M, dp)$: в такой структуре, множество формул $f(x, \bar{a})$, $f \in L$, $\bar{a}$ удовлетворяет $df(\bar{x})$, совместно и полно (относительно языка $L$) и образует тип $q$, в исходной теории $T$. Тогда эта модель имеет вид $(N, dq)$.

□

Всякий наследник типа $p$ имеет сына, который является сильным наследником $p$, например, ультрастепень $p$ (или можно показать, что $T(N)$ и формулы $df(\bar{a})$ для $q \vdash f(x, \bar{a})$, $\bar{a} \in N$ совместны с $(M, dp)$). Но если $p \in S_1(M)$, $M \prec N$, то $p$ не имеет, вообще говоря, сильного наследника над $N$. Для этого необходимо, чтобы модель $N$ была достаточно блестящей. Преимущество наследников в том, что они существуют всегда.

**Пример.** Пусть $T$ – теория плотного линейного порядка без концевых точек, $M$ – модель $T$ и $N$ – элементарное расширение $M$. Каждое сечение модели $M$, в том числе концевое, может содержать точку $N$. Мы знаем из главы 1, что эта теория имеет элиминацию кванторов, так что тип $p$ в этой теории определяется неравенствами вида $a \leq x$, $a \in M$, которые с ним совместны. Мы отличаем тогда шесть видов различных типов над $M$ :

– *реализованный тип* $p \vdash x = a$; тогда $p$ имеет единственное расширение над $N$, следовательно, он имеет единственного наследника над $N$.

– *тип* $a^+$; $p$ не реализован, $p \vdash x < b$ для любого $b \in M$, такого, что $b > a$, и $p \vdash x > b$ для любого $b \in M$, такого, что $b \leq a$; если $q$ – наследник $p$ над $N$, то невозможно, чтобы $q \vdash x = c'$, так как иначе найдется $c$ в $M$, такой, что $x = c$, в противоречии с тем, что тип $p$ не реализован в $M$. Тогда и любой наследник этого типа не реализованный (это в порядке вещей!). Пусть $c$ из $N$, $a < c$ и $c < b$ для любого $b \in M$, такого, что $a < b$ ($c$ является, таким образом, одной из реализаций $p$). Тогда невозможно, чтобы $q \vdash x > c$ или $q \vdash x > c \wedge c > a$, так как не существует $c'$ в $M$ такого, что $p \vdash x > c' \wedge c' > a$. Тогда для $q$ имеется единственная возможность: $q \vdash x < c$, для всех $c \in N$, таких, что $a < c$, и этот тип будет единственным наследником $p$ над $N$.

– *тип* $a^-$; он определяется симметричным способом, и аналогично тип $p$ имеет единственного наследника над $N$.

– *иррациональные типы*: $p$ не реализован, $p$ мажорируется сверху элементами $M$ и сам мажорирует элементы из $M$ и он не тип вида $a^+$ или вида $a^-$. Это означает, что тип $p$ является собственным сечением $M$, которое не имеет ни наименьшей мажоранты ни наибольшей миноранты в $M$.

Покажем, что в этом случае любой не реализованный сын $p$ является наследником. Если $q \vdash f(x, \bar{a}, \bar{b})$, где $\bar{a} \in M$, $\bar{b} \in N$, формула $f(x, \bar{y}, \bar{z})$, из-за элиминации кванторов, эквивалентна булевой комбинации формул вида $u = v, u > v$. Значит, формула $f(x, \bar{a}, \bar{b})$ равносильна дизъюнкции конъюнкций формул вида $x > c_i$, $x < c_j$, $c_i = c_j$, $c_i > c_j, x = c_i$, где $c_i$ и $c_j$ лежат в $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Тип $q$ удовлетворяет одному из дизъюнктивных членов $g(x, \bar{a}, \bar{b})$ формулы $f(x, \bar{a}, \bar{b})$. Так как q не реализован, то среди конъюнктивных членов $g$ равенства $x = c_i$ нет, есть только неравенства, и только такие, которые не противоречат тому, что $x$ удовлетворяет $p$, так как $q$ – сын $p$. Кроме того, $g$ показывает расположение элементов $\bar{b}$ относительно элементов $\bar{a}$. Ввиду того, что сечение $p$ – иррациональное, это расположение можно воспроизвести в $M$ и найти $\bar{b}'$, такой, что $p \vdash g(x, \bar{a}, \bar{b}')$ и, следовательно, $p \vdash f(x, \bar{a}, \bar{b}')$.

Мы отметим также, что сильными наследниками $p$ являются его иррациональные сыновья: $(M, dp)$ определяется формулой $df(y)$, где $f$ есть $x \geq y$. Действительно, так как все другие формулы $g$ будут булевой комбинацией формул $f(x, y_i)$, то $dg$ будет соответствующей булевой комбинацией формул $df(y_i)$. И теперь мы надеемся, что наш читатель посчитает очевидным элементарную эквивалентность двух плотных цепей без концевых точек с дополнительным на языке символом унарного отношения $A$, определенного как начальный непустой сегмент без наибольшего элемента, дополнение которого - непустое и без наименьшего элемента.

Мы видим таким образом, что если $M$ – цепь рациональных чисел, а $N$ – цепь действительных чисел, иррациональный тип над $M$ не имеет сильного наследника над $N$: над цепью $R$ не существует иррациональных типов. Также, если $q$ является наследником вида $a^+$ иррационального типа $p$, и если $r$ является сыном $q$, являющийся сильным наследником $p$, тогда $r$ не является наследником $q$.

– *тип* $+\infty$; $p \vdash x > a$ для любого $a$ из $M$; если $q$ – наследник $p$ над $N$, то невозможно чтобы $q \vdash x \leq b$, так как не существует $b'$ в $M$, такого, что $p \vdash x \leq b'$; необходимо, таким образом, чтобы $q$ был типом $+\infty$ над $N$.

– *тип* $-\infty$; он определяется симметричным способом, и его единственным наследником является тип $-\infty$ над $N$.

Мы отметим, что классификация типов в шесть "видов" соответствует точно шести возможным теориям для $(M, dp)$. Мы завершаем этот параграф одним аналогом теоремы Левенгейма:

**Теорема 11.6** *Если $p$ из $S_1(M)$, то существует элементарное ограничение $M_0$ модели $M$, $|M_0| \leq |T|$, такое, что $p$ наследует (и даже сильно) своему ограничению над $M_0$.*

**Доказательство.** Примените теорему Левенгейма для структуры $(M, dp)$ .

□

## 11.b Определимые типы

Пусть $p$ – тип над $M$; говорят, что $p$ *определим*, если для каждой формулы $f(x, \bar{y})$ языка $L$ теории $T$ существует формула $df(\bar{y})$ *(возможно) с параметрами* в $M$, такая, что для любого $a$ из $M$, $p \vdash f(x, \bar{a})$ если и только, если $\bar{a}$ удовлетворяет $df(\bar{y})$. В других терминах, структура $(M, dp)$ определима с параметрами в структуре $M$. Внимание, вот – ошибка дебютанта: это не означает, что $p \vdash (\forall \bar{y})(f(x, \bar{y}) \leftrightarrow df(\bar{y}))$; $p \vdash f(x, \bar{a}) \leftrightarrow df(\bar{a})$ только для $\bar{a}$ из $M$, и это не так для моделей, где $p$ реализован!

Отображение $d$, которое формуле $f$ сопоставляет $df$, будет называться определением $p$ ; по существу, то есть по-модулю $T(M)$, определимый тип $p$ имеет только единственное определение: если $d'$ – другое определение $p$, $T(M) \vdash (\forall \bar{y})(df(\bar{y}) \leftrightarrow d'(\bar{y}))$. Заметим также, что $T(M) \vdash (\forall \bar{y})(d\neg f(\bar{y}) \leftrightarrow \neg df(y))$, $(\forall \bar{y})(d(f \vee g)(\bar{y}) \leftrightarrow df(\bar{y}) \vee dg(\bar{y}))$, $(\forall \bar{y})(d(f \wedge g)(\bar{y}) \leftrightarrow df(\bar{y}) \wedge dg(\bar{y}))$; следовательно, если каждая формула $L$ равна по-модулю $T$ булевой комбинации формул из множества $F$ (например, если $T$ имеет элиминацию кванторов и если $F$ – множество бескванторных формул), то можно довольствоваться определением $df$ для формул $f$ из $F$, так как если $g$ – булева комбинация формул $f_1, \ldots, f_n$, то $dg$ будет соответствующей булевой комбинацией $df_1, \ldots, df_n$.

**Теорема 11.7** *Тип $p$ над моделью $M$ теории $T$ определим, если и только если для каждого элементарного расширения $N$ модели $M$ он имеет только единственного наследника над $N$.*

**Доказательство.** Предположим, что тип $p$ – определимый, и $q$ – наследник $p$ над $N$; если $q \vdash f(x, \bar{b})$, то должно быть $N \vdash df(\bar{b})$, так как не существует $\bar{b}'$ в $M$, такого, что $p \vdash f(x, \bar{b}') \wedge \neg df(\bar{b}')$ ; так как $(\forall \bar{y})(df(\bar{y}) \vee d\neg f(\bar{y}))$ истинно в $M$, как и в $N$, это оставляет только единственную возможность для $q$.

Обратно, если $p$ неопределим, то структура $(M, dp)$ не определима, даже с параметрами, в структуре $M$ ; по теореме Свенониуса (9.2; её надо чуть-чуть обобщить, так как здесь добавляется много отношений вместо одного), существует элементарное расширение $(M, dp)$, которое по 11.5 имеет вид $(N, dq)$, с $L(M)$-автоморфизмом $s$ структуры $(N, dq)$, то есть автоморфизм $N$, оставляющий неподвижным $M$ поточечно, и который перемещает $(N, dq)$ ; тогда $q$ и $sq$ – два различных наследника $p$.

□

Теорема 11.7 показывает, что наследник $q$ определимого типа $p$ получается применением над моделью $N$ определения $p$: таким образом, $q$ также определим. Кроме того $q$ является сильным наследником $p$: так как $(N, dq)$ интерпретируема в $N$ тем же способом, что и $(M, dp)$ – в $M$, и из $M \prec N$, имеем $(M, dp) \prec (N, dq)$! Определимый тип $q$ может быть наследником неопределимого типа $p$: в теории плотного порядка без концевых точек все типы за исключением иррациональных определимы, и нерациональный тип имеет наследников вида $a^+$ и $a^-$. В этом случае $q$ не является сильным наследником $p$: для каждой формулы $f(x, \bar{y})$ существует формула $g(\bar{y}, \bar{z})$, такая, что $(N, dq) \vdash (\exists \bar{z})(\forall \bar{y})(df(\bar{y}) \leftrightarrow g(\bar{y}, \bar{z}))$; если $(N, dq)$ было элементарным расширением $(M, dp)$, или даже просто элементарно эквивалентным $(M, dp)$, то это было бы истинным также в $(M, dp)$, и $p$ был бы определимым.

Отметим наконец что, для определимых типов, транзитивность наследования не имеет больше разрыва: если $p \subset q \subset r$ и если $p$ определим, то $r$ является наследником $p$, если и только если $q$ является наследником $p$ и $r$ является наследником $q$. Единственное условие, которое следует проверить, состоит в том, что если $r$ наследует $p$, то он наследует $q$ : это является следствием того, что $q$ и $r$ оба определимы теми же формулами, что и $p$.

## 11.c Типы концевых расширений в арифметике

Определимые типы были первоначально изобретены, не для вопросов теории стабильности, а для того, чтобы строить модели арифметики: мы объясним кратко, как они используются в этом контексте. Итак, теория $T$ – теория арифметики (она могла бы быть также любой полной теорией, содержащий аксиомы Пеано). Пусть $F$ – множество функций $y = \varphi(\bar{x})$, определимых в $T$ формулой без параметра; мы уже отметили, в главе 10.e, что если $A$ является множеством параметров, то замыкание $F(A)$ множества $A$ всеми функциями из $F$ является простой минимальной моделью над $A$.

*Концевое расширение* модели $M$ теории $T$ есть элементарное расширение $N$, такое, что любой элемент из $N \setminus M$ больше каждого элемента $M$; стандартная модель имеет только концевые расширения, но любая другая модель $M$ имеет неконцевые расширения: по компактности можно добавить нестандартный элемент, меньший всех ее нестандартных элементов.

Говорят, что $p$ из $S_1(M)$ есть *тип концевого расширения*, если он реализуется в концевом расширении $M$. Это означает, что если $a$ реализует $p$, то простая модель над $M \cup a$ является концевым расширением $M$. Неинтересный случай типа концевого расширения – это когда $p$ реализован в $M$; в других случаях, $p$, очевидно, *неограничен* в $M$, это означает, что $p \vdash x > a$ для каждого $a$ из $M$.

**Лемма 11.8** *Тип $p$ над моделью $M$ арифметики является типом концевого расширения, если и только если для каждой формулы $f(x, \bar{y})$ и любого $a$ из $M$ множество $\bar{b}$ из $M$ таких, что $p \vdash f(x, \bar{b}) \wedge \bar{b} \leq a$ кодируется в $M$ (т.е. конечное множество в смысле $M$).*

**Доказательство.** Предположим, что $p$ – тип концевого расширения, и пусть $N$ – концевое расширение $M$, реализующее $p$ в $x$; множество $\{\bar{b} : \bar{b} \leq a \wedge f(x, \bar{b})\}$ является конечным в смысле $N$; оно имеет, таким образом, в $N$ код $c$, что не больше максимального среди кодов множеств $n$-кортежей из $N$, мажорированных $a$: если мы обозначим через $d$ это последнее число, то, так как $M \prec N$, $d$ – то же самое в $M$, что и в $N$. Так как $N$ является концевым расширением $M$ и $c \leq d$, число $c$ лежит в $M$, и, следовательно, рассматриваемое множество кодируется в $M$.

Обратно, предположим, что $p$ имеет это свойство; пусть $x$ – реализация $p$, $b$ – кортеж из $M$, и $z = \varphi(x, \bar{y})$ – определяемая в арифметике функция; мы должны доказать, что $\varphi(x, \bar{b})$ или в $M$, или мажорирует любой элемент $M$. Итак, предположим, что $\varphi(x, \bar{b})$ мажорируется некоторым элементом $a$ из $M$; пусть тогда $A$ – множество элементов из $M$, которые меньше $\varphi(x, \bar{b})$: так как $A$ ограничено элементом $a$, то $A$ кодируется в $M$; это конечное множество в смысле $M$ и, следовательно, оно имеет наибольший элемент $c$; так как $c + 1$ также в $M$, то это влечёт $c = \varphi(x, \bar{b})$.

$\square$

Мы видим, что определимый тип является типом концевого расширения: действительно множество элементов $\bar{b}$ из $M$, таких, что $\bar{b} \leq a$ и $p \vdash f(x, \bar{b})$, определимо и ограничено в $M$; таким образом, (по аксиоме коллекции) оно конечное множество в смысле $M$. Мы собираемся теперь показать, что определимые типы существуют в избытке:

**Теорема 11.9** *Пусть $M$ – модель арифметики и пусть $f(x, \bar{a})$ – формула с параметрами $\bar{a}$ из $M$, удовлетворяющаяся произвольно большими элементами $M$; тогда существует определимый неограниченный тип над $M$, удовлетворяющий $f(x, \bar{a})$.*

**Доказательство.** В $M$ мы имеем перечисление формул $f_i(x, \bar{a}_i)$ с одной переменной $x$, с параметрами $\bar{a}_i$ в $M$, посредством элементов $i$ из $M$ ; можно попытаться определить индукцией формулу $g_i(x, \bar{a}_i)$ равной $f_i(x, \bar{a}_i)$, если формула $f(x, \bar{a}) \wedge g_0(x, \bar{a}_i) \wedge \cdots \wedge g_{i-1}(x, \bar{a}_{i-1}) \wedge f_i(x, \bar{a}_i)$ удовлетворяется произвольно большими элементами в $M$, и равной $\neg f_i(x, \bar{a}_i)$ иначе, и брать в качестве $p$ множество всех $g_i$ . Беда в том, что для этого нам необходимо арифметическое определение выполнимости в $M$, запрещенное теоремой Тарского. Поэтому мы поступаем таким образом.

Пусть $F_0$ – множество, образованное из $f(x, \bar{a})$ и всех формул $x > b$, $b \in M$; любой фрагмент $F_0$ , *конечный в смысле* $M$, удовлетворяется некоторым элементом $M$: действительно, те $b$, что встречаются в этом фрагменте, образуют ограниченное множество. Мы перечисляем теперь все $\Sigma_1$-формулы с параметрами из $M$ со свободной переменной $x$: $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_i(x), \ldots$; и мы определяем индукцией по $i$ формулу $g_i$ равной $f_i$, если формула $g_0(x) \wedge \cdots \wedge g_{i-1}(x) \wedge f_i(x)$ (если $i$ нестандартен, то конъюнкция нестандартно конечна!), увеличенная на любой конечный фрагмент $F_0$ выполняется элементом $M$: так как формулы из ограниченного класса $\Sigma_n$ (здесь, $\Sigma_1$), это определение имеет вполне арифметический смысл, который выразим в $M$; $g_i$ есть $\neg f_i$ иначе. Пусть $F_1$ – определимое множество всех $g_i$ : ясно, что каждое конечное (в смысле $M$) подмножество $F_0 \cup F_1$ удовлетворяется элементом $M$. Это влечет, что, рассмотренное извне, стандартное подмножество $F_0 \cup F_1$ является действительно совместным множеством формул, так как истинные конечные подмножества $M$, будучи стандартной мощности, кодируются в $M$.

И мы продолжаем; $n$-ый этап для *стандартного числа* $n$ состоит в перечислении $\Sigma_n$-формул и в таком определении множества $F_n$ : его $i$-ый элемент $g_i$ есть $f_i$, если формула $g_0(x) \wedge \cdots \wedge g_{i-1}(x) \wedge f_i(x)$, увеличенная на любой конечный фрагмент $F_0 \cup F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1}$ выполняется элементом $M$, и $\neg f_i$ иначе. Каждое $F_n$ является множеством формул, определимым в $M$. Пусть тогда $p$ – множество формул *стандартной сложности* (т.е. *настоящие* формулы) из $\cup F_n$ ; $p$ совместно, так как каждый из его настоящих конечных фрагментов выполним в $M$; оно полное, так как $f_i$ или $\neg f_i$ фигурирует в $p$; так как оно содержит $F_0$ , оно не ограниченное и содержит первоначальную формулу $f(x, \bar{a})$; и это определимый тип: если $g(x, \bar{y})$ – (настоящая) $\Sigma_n$-формула, то чтобы узнать, верно ли $p \vdash g(x, \bar{a})$, достаточно выяснить, лежит ли $g(x, \bar{a})$ в $F_n$.

$\square$

Как следствие, мы видим, что каждая модель арифметики имеет собственные концевые расширения. И даже немного уточняя эту теорему, можно показать, что если $|M| = \varkappa$, то она имеет по крайней мере $\varkappa^\omega$ определимых неограниченных типов, а также $\varkappa^\omega$ концевых попарно не $M$-изоморфных расширений. Как я уже сказал, эти результаты остаются в силе и для любого полного расширения арифметики Пеано, так как если модель такой арифметики утверждает, что предложение истинно, то она действительно его удовлетворяет.

## 11.d Стабильные типы и теории

Тип $p$ над моделью $M$ теории $T$ называется *стабильным*, если все его сыновья над всеми элементарными расширениями $M$ определимы. Теория $T$ называется *стабильной* если любой тип над любой моделью $T$ стабилен, или еще любой тип над любой моделью $T$ определим.

**Теорема 11.10** *Пусть $p$ – стабильный тип из $S_1(M)$ и $N$ – элементарное расширение $M$ мощности $\lambda$; тогда число сыновей $p$ над $N$ не больше $\lambda^{|T|}$. Если $T$ стабильна и если $B$ является множеством параметров мощности не больше $\lambda$, то $|S_1(A)| \leq \lambda^{|T|}$.*

**Доказательство.** Каждый сын $q$ типа $p$ над $N$, будучи определимым, является единственным наследником своего ограничения $q_1$ над элементарным ограничением $N_1$ модели $N$ мощности $|T|$ (теорема 11.6); имеется $\lambda^{|T|}$ возможностей для выбора $N_1$ , и не более $2^{|T|}$ – для выбора типов над $N_1$ , что дает в итоге всего $\lambda^{|T|} \times 2^{|T|} = \lambda^{|T|}$ возможностей для $q_1$ , то есть и для $q$. Или еще можно рассуждать так: имеется столько типов $q$ сколько возможных определений; определение, это отображение множества формул $f(x, \bar{y})$ во множество формул с параметрами из $N$, число которых $\max\{\lambda, |T|\}$; значит, число возможных определений не больше $\max\{\lambda^{|T|}, |T|^{|T|}\} = \lambda^{|T|}$. Для доказательства второй части теоремы, вкладываем $A$ в модель $M$ теории $T$ мощности $\max\{\lambda, |T|\}$; каждый тип над $A$ продолжается до типа над $M$. таким образом, над $A$ имеется не больше типов, чем над $M$, а число типов над $M$ не больше числа возможных определений, то есть $\lambda^{|T|}$.

□

**Теорема 11.11** *Пусть $p$ – нестабильный тип из $S_1(M)$; для каждого кардинала $\lambda \geq \max(|T|, |M|)$, существует элементарное расширение $N$ модели $M$ мощности $\lambda$, над которым $p$ имеет по крайней мере $\lambda^+$ сыновей. Если $T$ нестабильна, то для каждого бесконечного кардинала $\lambda$, существует множество параметров $A$ мощности $\lambda$, над которым он имеет по крайней мере $\lambda^+$ типов.*

**Доказательство.** Так как $p$ нестабилен, он имеет неопределимого сына $p_0$ над элементарным расширением $M_0$ модели $M$, и заменяя в случае необходимости $(M_0, dp_0)$ одним из ее элементарных ограничений, можно предполагать, что $|M_0| = \lambda$. Таким образом, существует элементарное расширение $N$ модели $M_0$ , над которым имеются два различных наследника $q_1$ и $q_2$ типа $p_0$ ; $q_1 \vdash f(x, \bar{a})$, $q_2 \vdash \neg f(x, \bar{a})$ для некоторой формулы $f(x, \bar{y})$ и $\bar{a}$ в $N$. Тогда заметим, что для каждого наследника $p'$ типа $p_0$ над моделью $M'$, существует расширение $N'$ модели $M'$, над которым имеются два различных сына $q_1$ и $q_2$ типа $p'$, являющиеся наследниками $p_0$ (а не $p'$, который может быть определимым !), с $q'_1 \vdash f(x, \bar{a}')$, $q'_2 \vdash f(x, \bar{a}')$, для некоторого $\bar{a}'$ из $N'$ ; действительно, так как $p'$ имеет как сына некоторую ультрастепень $p_0^U$ типа $p_0$, то можно брать $q'_1 = q_1^U$ , $q'_2 = q_2^U$ .

Тогда мы построим возрастающую ординальную последовательность моделей $M_\alpha$ теории $T$, вместе с кортежами параметров $\bar{a}_\sigma$, $\bar{a}_\sigma \in M_{\alpha+1}$ , для каждой последовательности $\sigma \in 2^\alpha$, и различных наследников $p_\sigma$ типа $p_0$, $p_\sigma \in S_1(M_\alpha)$, таких, что если $\tau$ является ограничением $\sigma$, то $p_\sigma$ является сыном $p_\tau$, следующим образом:

– если $\alpha$ – предельный, то $M_\alpha$ – предел $M_\beta$, $\beta < \alpha$, и если $\sigma \in 2^\alpha$, то $p_\sigma$ – предел $p_\tau$, где $\tau$ пробегает множество ограничений $\sigma$ над $\beta < \alpha$,

– если $\alpha$ – последователь, $\alpha = \beta + 1$, то рассмотрим $\sigma \in 2^\beta$ и тип $p_\sigma$ над $M_\beta$ ; последовательность $\sigma$ имеет два расширения над $\beta + 1$, первое, обозначаемое $\sigma^\frown 0$, принимает значение 0 в $\beta$ (это наибольший элемент $\beta + 1$), а второе, обозначаемое $\sigma^\frown 1$, – значение 1; так как по гипотезе индукции $p_\sigma$ – наследник $p_0$ , то существует расширение $N_\sigma$ модели $M_\beta$ , с $\bar{a}_\sigma$ из $N_\sigma$ , и два наследника $q_{\sigma^\frown 0}$ и $q_{\sigma^\frown 1}$ типа $p_0$ над $N_\sigma$ , являющиеся сыновьями $p_\sigma$ и такие, что $q_{\sigma^\frown 0} \vdash f(x, \bar{a}_\sigma)$, $q_{\sigma^\frown 1} \vdash \neg f(x, \bar{a}_\sigma)$. Все $N_\sigma$ имеют общее элементарное расширение, скажем $M_\alpha$ : мы берем в качестве $p_{\sigma^\frown 0}$ наследника $q_{\sigma^\frown 0}$ над $M_\alpha$ и в качестве $p_{\sigma^\frown 1}$ наследника $q_{\sigma^\frown 1}$ над $M_\alpha$ .

Продолжаем эту конструкцию до первого кардинала $\mu$, такого, что $2^\mu > \lambda$; мы знаем, что $\mu \leq \lambda$. Над моделью $M_\mu$ мы получаем таким образом $2^\mu$ попарно различных сыновей $p$, наследников $p_0$ ; чтобы их попарно различить, кортежи $\bar{a}_\sigma$ , где $\sigma \in 2^\alpha$, $\alpha < \mu$, являются достаточными: если $|\alpha| < \mu$, то $|2^\alpha| < \lambda$, таким образом число $\bar{a}_\sigma$ не превосходит $\mu \times \lambda = \lambda$. По теореме Левенгейма-Сколема существует модель $N$ мощности $\lambda$, содержащая $M$ и все $\bar{a}_\sigma$ : ограничения $p_\sigma$ , $\sigma \in 2^\mu$, на $N$ образуют семейство, в котором по крайней мере $\lambda^+$ попарно различных сыновей $p$.

Для второго утверждения, мы повторяем то же построение отправляясь от нестабильного типа, и берем в качестве $A$ множество всех $\bar{a}_\sigma$ , $\sigma \in 2^\alpha$, $\alpha < \mu$: ограничения типов $p_\sigma$ , $\sigma \in 2^\mu$, на $A$ попарно различны.

□

Говорят, что теория $T$ *стабильна в* $\lambda$, где $\lambda$ – бесконечный кардинал, если над каждым множеством параметров мощности, не большей $\lambda$, она имеет не более $\lambda$ типов. Таким образом, по двум предыдущим теоремам мы видим, что если $T$ нестабильна, то она нестабильна во всех $\lambda$, в то время как если она стабильна, то она стабильна в каждой мощности $\lambda$ такой, что $\lambda = \lambda^{|T|}$, то есть в каждом кардинале вида $\lambda^{|T|}$ (так как $(\lambda^{|T|})^{|T|} = \lambda^{|T| \times |T|} = \lambda^{|T|}$). В частности, $T$ стабильна если и только если она стабильна в $2^{|T|}$.

Мы позже определим какими могут быть "спектры стабильности" (т.е. класс кардиналов, в которых теория $T$ стабильна) для теории $T$. Отметим, что если $T$ стабильна, то для любого множества $A$ параметров $T(A)$ также стабильна; и что $T$ и $T(A)$ стабильны в одних и тех же кардиналах $\lambda \geq |A|$.

Кроме того, мы видим, что если $T$ стабильна в $\lambda$, и если $|A| \leq \lambda$, тогда $S_n(A) \leq \lambda$ : действительно, реализовать тип $(a_1, ..., a_n)$ над $A$ значит, что сначала реализовать тип $a_1$ над $A$, затем тип $a_2$ над $A \cup \{a_1\}$,..., и, наконец, тип $a_n$ над $A \cup \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ ; так как каждый раз имеется только $\lambda$ возможностей, то в итоге получаем не больше $\lambda^n = \lambda$ возможностей.

Понятия наследника, определимых, стабильных типов, что мы представили для 1-типов, чтобы не возиться с индексами, определяются тем же способом для $n$-типов; аналоги всех теорем, которых мы доказали, остаются в силе. Мы видим таким образом, что если $T$ *стабильна* (т.е. все 1-типы определимы), *тогда каждый $n$-тип над каждой моделью $T$ определим* (иначе мы будем иметь нестабильность в каждом $\lambda$ для $n$-типов, по аналогии 11.11). А также, так как формула содержит только конечное число переменных типа, $\alpha$-типы определимы; мы видим, что если $T$ стабильна, и $|A| \leq \lambda$, тогда $|S_\alpha(A)| \leq \lambda^{\max(|\alpha|,|T|)}$, что ограничивает число возможных определений $\alpha$-типов над моделями мощности $\max(|\alpha|,|T|)$, содержащих $A$.

Рассмотрим теперь формулу $f(\bar{x},\bar{y})$, параметры $\bar{a}_\sigma$ , индексированные $\sigma \in 2^\alpha$, где $\alpha$ – фиксированный ординал, и $\bar{b}_\tau$ , где $\tau \in 2^\beta$, для каждого $\beta < \alpha$; пусть $D_\alpha$ – множество формул, образованное из $f(\bar{a}_\sigma,\bar{b}_\tau)$, где $\sigma \in 2^\alpha$, $\sigma \restriction \beta = \tau$, $\sigma(\beta) = 0$, и из $\neg f(\bar{a}_\sigma,\bar{b}_\tau)$ где $\sigma \in 2^\alpha$, $\sigma \restriction \beta = \tau$, $\sigma(\beta) = 1$.

Говорят, что формула $f(\bar{x},\bar{y})$ имеет в $T$ *свойство дихотомии*, если $D_\omega$ совместно с $T$; отметим, что каждый конечный фрагмент $D_\alpha$ может интерпретироваться в одном из $D_n$ для достаточно большого $n$; таким образом, если $f$ имеет свойство дихотомии, то каждое $D_\alpha$ совместно; и чтобы $f$ имела это свойство (необходимо и) достаточно, что каждое $D_n$ было совместным, то есть что $T$ содержала аксиому, полученную экзистенциальной квантификацией по $\bar{a}_\sigma$ и $\bar{b}_\tau$ перед конъюнкцией формул $D_n$ , для каждого $n$.

**Теорема 11.12** *Теория $T$ нестабильна если и только если некоторая формула $f(x,\bar{y})$ (где $x$ – одиночная переменная) имеет свойство дихотомии.*

**Доказательство.** Если $T$ нестабильна, то дерево типов, построенное в доказательстве теоремы 11.11, показывает свойство дихотомии для формулы $f(x,\bar{y})$. Предположим, что $f$ имеет это свойство; пусть $\lambda$ – бесконечный кардинал, и пусть $\mu$ – первый кардинал такой, что $\lambda^\mu > \lambda$; пусть тогда $D_\mu$ реализовано в некоторой модели $T$: если $A$ является множеством $\bar{b}_\tau$ , то $|A| \leq \lambda$, и $\bar{a}_\sigma$ , число которых по крайней мере $\lambda^+$, имеют попарно различные типы над $A$. Имеем, таким образом, нестабильность во всех $\lambda$: $T$ нестабильна.

□

Мы видим таким образом, что если имеется формула $f(\bar{x},\bar{y})$ со свойством дихотомии, то имеется формула $g(x,y)$ с этим свойством. Нетрудно понять подобным способом, что $p$ нестабилен, если и только если для некоторой формулы $f(x,\bar{y})$ он совместен с множеством $D_\omega$ , соответствующим $f(x,\bar{y})$ (добавляем к $D_\omega$ предложения, утверждающие, что $a_\sigma$ являются реализациями $p$).

Если $p$ стабилен, то его наследник, так же впрочем как и каждый из его сыновей, стабилен. Обратно, если $p$ нестабилен, то каждый наследник $q$ типа $p$ нестабилен; действительно, $p$ имеет сына $r$, у которого два различных наследника $r_1$ и $r_2$ , и для некоторого ультрафильтра $U$, $q$ имеет в качестве сына $p^U$, имеющего сына $r^U$, у которого два различных наследника $r_1^U$ и $r_2^U$ , или еще: $q$ наследует свойство дихотомии своего отца.

Последнее замечание: рассмотрим модель $M$ теории $T$, ее элементарное расширение $N$, и формулу $f(\bar{x},\bar{b})$ с параметром $\bar{b}$ из $N$. Множество $A$ кортежей из $M$, удовлетворяющих этой формуле, может, вообще говоря, не быть определимым с параметрами из $M$; однако это так, если $T$ стабильна: тогда можно найти формулу $g(\bar{x},\bar{a})$ с параметрами $\bar{a}$ из $M$, такую, что те $\bar{x}$ из $M$, которые удовлетворяют $f(\bar{x},\bar{b})$, были теми же, что удовлетворяют $g(\bar{x},\bar{a})$ (это ничуть не значит, что эти две формулы были эквивалентны: это неверно для $\bar{x}$ из $N$!); действительно, это условие (для любых $M$, $N$, $f(\bar{x},\bar{b})$) равносильно стабильности, так как оно означает, что тип $\bar{b}$ над $M$ определим.

# 11.е Исторические и библиографические примечания

На изучение стабильных теорий, к которому мы теперь приступили, наложен сильный отпечаток одной личности – Сахарона Шелаха. Он изложил массу впечатляющих результатов о конструкциях моделей как стабильных, так и нестабильных и теорий в монументальном труде [ШЕЛАХ, 1978], и сейчас мы с нетерпением ожидаем его второе издание с дополнениями[1]. "Монументальный" не означает, что это очень толстая книга, а что это – необычайно завораживающий труд, представляющий живой пример изобретательской мощи, исключительно виртуозной техники и фантастического вдохновения.

Но вряд ли эту книгу можно предлагать дебютанту, даже способному, так как стиль изложения, которого придерживается автор, делает ее почти недоступной даже для опытного логика. Толкователи мыслей Шелаха ломают голову над гипотезами и заключениями теорем, которые представлены в ней. Изучение доказательств не очень помогает потому, что они необычайно герметичны или просто отсутствуют, выражение "оставляем читателю" сыплется из под пера Шелаха с наибольшей частотой. В качестве иллюстрации, страницы 520 и 521 из раздела книги "Добавление при корректуре" остались тайной для автора этих строк, который не понимает, на какую часть его работы так любезно намекает Шелах.

Если бы хотелось сделать библиографические ссылки по этой теме, лучшим решением, которое бы соединило удобство и безопасность, было бы замечание, что все результаты имеются в явным или неявном виде в книге Шелаха. Со своей стороны, я и хочу сделать это замечание для страховки, но я им не удовлетворяюсь по нескольким причинам. Первая – то, что это решение удобно для автора, но не для читателя! Вторая причина заключается в том, что Шелах не стоял у истоков изучения стабильных теорий, а запрыгнул в уже уходящий поезд. Несправедливо считать все то, что было сделано до него только прологом для его произведения. Один из тех, кого определенно нельзя рассматривать как простого предвестника Шелаха, – это Майкл Морли. Его стержневая работа [МОРЛИ, 1965] создала, начиная почти с нуля, сущность методов, которые были развиты впоследствии. Морли, доказавший первую структурную теорему и выведший теорию моделей из тупика "общего нонсенса", и является основателем теории стабильности, то есть современной теории моделей .

Вторжение Шелаха в эту область разочаровало некоторое число хороших математиков, которые ушли из нее; другие старались там выжить; третьи – находившиеся в неведении, захотели войти в неё и, не имея возможности конкурировать с Шелахом в его излюбленной области, по крайней мере разработать те её аспекты, которые Шелах еще не рассмотрел. Один такой пример нам дает понятие наследника; Даниель Ласкар называл "наследником" или "старшим сыном" расширение определимого типа, полученное применением его опреде-

[1]Второе издание: S. Shelah, Classification theory and the number of non-isomorphic models, North Holland, Amsterdam, 1990.

ления [ЛАСКАР, 1973] , [ЛАСКАР, 1975] ; общее понятие наследника появилось в [ПУАЗА, 1977] и было изложено в [ЛАСКАР-ПУАЗА, 1979] вместе с характеристикой определимых типов, как имеющих единственного наследника.

Свидетели, заслуживающие доверия, подтверждают, что понятие определимого типа было введено уже в 1968 г., и не Шелахом, а Хаймом Гайфманом, для построения концевых расширений моделей арифметики: смотри [ГЭЙФМАН, 1976] . У Гайфмана, выражение "тип концевого расширения" имеет более узкий смысл чем здесь. Термин "стабильность в $\lambda$" принадлежит [РОУБОТТОМ, 1964], а выражение "стабильная теория" появилось в [ШЕЛАХ, 1969]. Если первый термин может оправдываться тем, что мощность не увеличивается при переходе от параметров к типам, то второй не очень удачен, но он теперь прижился. Эквивалентность стабильности и свойства определимости типов была показана в [ШЕЛАХ, 1971b] ; там же присутствует, хоть и без специального названия, свойство дихотомии.

Отметим, наконец, для любителей курьезов , что некоторые методы теории стабильности, которые мы собираемся использовать, полезны и для изучения банаховых пространств , и что комбинаторное содержание некоторых лемм Шелаха было давно уже известно исследователям в этой области ! По этому поводу, можно консультироваться в [РЕЙНО , 1983].