Глава 5

Челночный метод в ω-насыщенных моделях

Le méchant goût du siècle en cela me fait peur;
Nos pères, tous grossiers,l'avaient beacoup meilleur
Et je prise bien moins tout ce que l'on admire
Qu'une vieille chanson que je m'en vais vous dire :
. . . .
La rime n'est pas riche et le style en est vieux :
Mais ne voyez-vous pas que cela vaut bien mieux
Que ces colifichets . . .

J.B. P.

5.a Пространство типов

Два элемента a и b в L-структурах (т.е. в структурах того же типа подобия, что и L) имеют одинаковый тип, если удовлетворяют одинаковым формулам $f(x)$ из L ; *тип* элемента a по определению есть множество p_a формул $f(x)$, которым он удовлетворяет. Что такое тип, если не полная теория в языке $L(x)$, полученная добавлением к L символа константы x ? Для удобства, мы обозначаем здесь этот константный символ как переменную.

Для данного языка L назовём пространством $\mathcal{S}_0$ всех 0-типов (подразумевается, языка L) пространство $\mathcal{J}$ полных теорий в языке L ; пространство $\mathcal{S}_1$ всех 1-типов совпадает с пространством полных теорий в языке $L \cup \{x\}$; базой открытых множеств являются множества $\langle f(x) \rangle$ всех типов p , содержащих $f(x)$, где $f(x)$ – формула самое большее с одной свободной переменной x языка L . Мы определяем таким же образом множество $\mathcal{S}_n$ всех n-типов или типов n-ок, как множество полных теорий в $L \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$. Можно даже определить пространство $\mathcal{S}_I$ всех I-типов для бесконечного множества I, введя новый константный символ x_i, называемый "переменной типа", для каждого элемента i из I ; как мы уже видели в 4.b, все эти пространства – вполне несвязные компакты.

Договоримся, что когда мы говорим "тип", не уточняя какой, то мы под ним подразумеваем 1-тип; и очень часто мы ограничиваемся приведением результатов для 1-типов, которые без труда обобщаются на n-типы и даже I-типы. Если T – теория, то обозначим через $S_1(T), \ldots, S_n(T), \ldots$ множество типов элементов и n-ок из моделей T ; так как эти типы – те, что удовлетворяют аксиомам T, множество $S_n(T)$ замкнуто в $\mathcal{S}_n$, значит, это – компакт. Мы используем это обозначение особенно тогда, когда T полна, и в этом случае $S_0(T)$ сводится к одной единственной точке.

Для данной полной теории T назовем *множеством параметров* подмножество A модели M для T ; то что важно в этом понятии – это не столько множество A , а сколько формулы, которые удовлетворяются в M его элементами. Выделяем каждый элемент A константным символом и обозначим через $T(A)$ множество предложений таким образом обогащенного языка $L(A)$, истинных в M ; множество параметров задается, более точно, через $T(A)$, а не только лишь через A . Мы видим, что если N – элементарное расширение M и A – подмножество M , множество параметров A , рассматриваемое с точки зрения M, остается таковым без изменения с точки зрения N .

Для данной формулы $f(x, \bar{y})$ языка L для T и $\bar{a}$ в A выражение $f(x, \bar{a})$ называется *формулой с параметрами* в A ; это не что иное как формула языка $L(A)$. Теперь мы назовем типом *над* A полную теорию в языке $L(A) \cup \{x\}$, содержащую $T(A)$. Два элемента имеют одинаковый тип над A , если они удовлетворяют одним и тем же формулам с параметрами из A : они в определенном смысле расположены одинаково по отношению к A.

Мы обозначим через $S_1(T(A))$ или просто $S_1(A)$, если теория T ясна из контекста, множество типов над A. Оно снабжается, как обычно, топологией заданной с помощью формул, база открытых множеств которой состоит из множеств вида $\langle f(x,\bar{a})\rangle = \{p : p \vdash f(x,\bar{a})\}$, которая превращает его во вполне несвязный компакт. Таким же образом определяются пространства $S_n(A)$ и $S_I(A)$. В этом контексте, когда T полна, $S_n(T)$ становится $S_n(\emptyset)$: говорят, что это – типы *без параметров.* Ещё их называют *чистыми*, или *абсолютными* типами.

Если A – подмножество модели M полной теории T , и если p из $S_1(A)$, то говорят, что *p реализуется* в M или ещё *M реализует p* , если в M существует элемент типа p ; иначе говорят, что M опускает p. По определению тип совместен, если он реализуется некоторым элементом x в модели N для $T(A)$. Поскольку эта последняя теория полна в языке $L(A)$, по лемме 4.11 структуры M и N имеют общее элементарное расширение в языке $L(A)$ (т.е. A интерпретируется одинаково в этих трех структурах), так что *каждый тип p из $S_1(A)$ в конце концов реализуется в некотором элементарном расширении M* ; но естественно, если M не достаточно богата элементами, он может быть опущен в M .

Мы также используем, к сожалению, поскольку это может привести к путанице, слово реализовано в абсолютном смысле. Скажем, что тип $p \in S_1(A)$ *реализован*, если он реализован в A , т.е. если он тип элемента a из A или он содержит формулу $x = a$.

Как понять для данного подмножества A модели M полной теории T, что некоторое множество формул с параметрами из A есть тип, т.е. совместно и полно ? Деликатным является особенно первое свойство: *множество формул p с параметрами из A совместно тогда и только тогда, когда каждое конечное подмножество p реализуется некоторым элементом в M* ; на самом деле по компактности достаточно проверить, что каждый конечный фрагмент $\{f_1(x,\bar{a}),\ldots,f_n(x,\bar{a})\}$ совместен, т.е. реализуется в некотором элементарном расширении M. Это означает, что $T(A)$ вместе с $(\exists x)(f_1(x,\bar{a}) \wedge \cdots \wedge f_n(x,\bar{a}))$ совместна, и поскольку последнее предложение принадлежит $L(A)$, "константа" x там заквантована, оно принадлежит полной теории $T(A)$ в $L(A)$, значит, оно истинно в M , являющейся моделью $T(A)$, и существует x в M , удовлетворяющий этим формулам $f_1(x,\bar{a}),\ldots,f_n(x,\bar{a})$. На языке топологии это звучит так: *если A – множество параметров из модели M полной теории T, то типы из $S_1(A)$, реализующиеся в M, образуют плотное подмножество $S_1(A)$.* Действительно, если $\langle f(x,\bar{a})\rangle$ – окрестность типа p , то эта формула удовлетворяется некоторым элементом из M , тип которого лежит в этой окрестности.

5.b ω-насыщенные модели

Модель M полной теории T называется ω-насыщенной (мы увидим позднее более общее определение $\varkappa$-насыщенной модели в главе 9), если для любого конечного подмножества $\bar{a}$ (которое мы обозначим как кортеж) в M, каждый тип из $S_1(\bar{a})$ реализуется в M . Интерес к ω-насыщенным моделям объясняется следующими двумя теоремами :

Теорема 5.1 *Каждая структура обладает ω-насыщенным элементарным расширением.*

Доказательство. Для каждого p из $S_1(\bar{a})$, где $\bar{a}$ – конечное подмножество M, существует элементарное расширение M_p модели M , реализующее p; по теореме об общем элементарном расширении 4.14, примененной к теории $T(M)$ (для того, чтобы образ M при каждом таком расширении был одним и тем же), все эти M_p элементарно вкладываются в одно расширение M_1 для M , которое реализует таким образом все типы над конечными подмножествами M. Повторяя процесс, получаем последовательность $M \prec M_1 \prec \cdots \prec M_n \prec M_{n+1} \prec \ldots$ элементарных расширений, такую, что каждый тип над конечным подмножеством M_n реализуется в M_{n+1} . Тогда предел N этой последовательности расширений ω-насыщен.

□

Теорема 5.2 *Если две ω-насыщенные структуры M и N элементарно эквивалентны, то они ∞-эквивалентны: более точно, два кортежа одного типа (над $\emptyset$), один в M , а другой в N , соответствуют друг другу при бесконечном "челноке".*

Доказательство. Пусть $\bar{a}$ из M , $\bar{b}$ из N одного типа; добавим α например, из M и пусть p тип α над $\bar{a}$, (т.е. тип p из $S_1(\bar{a})$, который реализует α); рассмотрим множество q формул с параметрами из $\bar{b}$, полученное заменой $\bar{a}$ на $\bar{b}$ в каждой формуле $f(x,\bar{a})$ из p ; q совместно : действительно, если $f(x,\bar{a})$ конечный фрагмент p , то $M \vdash (\exists x) f(x,\bar{a})$ и, значит, поскольку $\bar{a}, \bar{b}$ одного типа, $N \vdash (\exists x) f(x,\bar{b})$, и каждый конечный фрагмент q совместен. Кроме того, поскольку q содержит $f(x,\bar{b})$ или $\neg f(x,\bar{b})$ для любой формулы $f(x,\bar{b})$, q – тип над $\bar{b}$. Так как N ω-насыщенна, этот тип реализуется некоторым элементом β из N, и $\bar{a}^\frown\alpha$ и $\bar{b}^\frown\beta$, удовлетворяющие одним и тем же формулам, имеют одинаковые типы над $\emptyset$. Добавление одного элемента к $\bar{b}$ рассматривается аналогично.

□

Замечание 1 *Если M и N ∞-эквивалентны и M ω-насыщенна, то N также ω-насыщенна.*

Действительно, для любого $\bar{b}$ из N существует $\bar{a}$ из M такой, что $(M,\bar{a})$ и $(N,\bar{b})$ ∞-эквивалентны; значит, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ одного типа. Пусть q из $S_1(\bar{b})$ и p – множество формул, полученное заменой $\bar{b}$ на $\bar{a}$ в формулах из q : точно так же, как в предыдущем доказательстве, p – тип, который реализуется некоторым элементом α из M ; существует β в N такой, что $\bar{a}^\frown\alpha$ и $\bar{b}^\frown\beta$ ∞-эквивалентны, значит, $\bar{a}^\frown\alpha$ и $\bar{b}^\frown\beta$ одного типа над $\emptyset$. Итак, β реализует q .

Замечание 2 *Если M ω-насыщенна, то для любого $\bar{a}$ из M и любого p из $S_n(\bar{a})$ p реализуется в M .*

Достаточно заметить, что реализовать тип пары (a_1, a_2) – значит реализовать тип a_1 , потом тип a_2 над a_1 ; и дальше можно итерировать эту процедуру.

Значит, ω-насыщенная модель реализует все абсолютные n-типы для каждого n . Но это условие недостаточно для ω-насыщенности модели. Например, возьмем в качестве T теорию дискретного порядка без концевых точек; без труда можно понять, что M ω-насыщенна $\Longleftrightarrow$ она имеет вид $Z \times C$, где C – плотный линейный порядок без концевых элементов, в то время как она реализует все чистые n-типы $\Longleftrightarrow$ она имеет вид $Z \times C$, где C – бесконечный линейный порядок.

Замечание 3 *Если T – полная теория и M – её ω-насыщенная модель, то каждая счетная модель T элементарно вкладывается в M .*

Действительно, если $N = \{a_0, a_1 \ldots, a_n, \ldots,\}$, то можем последовательно реализовать в M тип a_0 , потом тип a_1 над $a_0, \ldots$, тип a_{n+1} над $\{a_0, \ldots, a_n,\}$ и т. д.

Замечание 4 *По теореме 1.14 две счетные, элементарно эквивалентные ω-насыщенные структуры изоморфны.*

При каких условиях полная теория T допускает (единственную) счетную, ω-насыщенную модель ? Это имеет место тогда и только тогда, когда $S_n(T)$ конечно или счетно для любого n (здесь мы не предполагаем, что T счетна) .

В действительности, это условие ещё означает, что для любого $\bar{a}$ из модели M для T множество $S_1(T)$ счетно (поскольку b и c одного типа над $\bar{a}$ – значит $\bar{a}^\frown b$ и $\bar{a}^\frown c$ одного типа над $\emptyset$); оно очевидно необходимо, поскольку счетная модель реализует лишь счетное число типов. Чтобы понять его достаточность, переделаем доказательство теоремы 5.1 : пусть A_1 – счетное подмножество M_1, реализующее все n-типы над $\emptyset$; затем A_2 – счетное подмножество M_2 , реализующее все типы над конечными подмножествами A_1 (это семейство типов на самом деле счетно), и т.д. Положим $A = \cup A_n$; Так как A удовлетворяет тесту Тарского 2.4, оно элементарное ограничение N; значит, A – счетная модель T и по построению она насыщенна.

Теперь, когда мы вернулись к локальным изоморфизмам, следует сделать остановку и осмотреться, сделать что-то вроде отчета нашей предыдущей деятельности. Мы ввели элементарную эквивалентность между отношениями через "челнок" Фраиссе, её проинтерпретировали в терминах выполнимости формул, обобщили для структур, доказали её свойство компактности и теперь возвращаемся к "челноку".

В теории моделей, часто сталкиваются с такой, по настоящему фундаментальной, проблемой : мы располагаем множеством T предложений и хотим доказать, что T – полная теория. Попытка описания классов p-эквивалентности, подобная той, что мы делали в главе 1 для дискретных порядков, часто бывает крайне сложной. В определенных случаях находят лишь достаточные условия для p-эквивалентности (которых хватает для решения, но это не слишком просто и не очень полезно), и требуются ограничения для языка (отсутствие функций, конечность языка).

Более удачен следующий подход: *мы делаем предположение о том, какие должны быть типы*, затем рассматриваем две модели M и N , которые можно считать ω-насыщенными благодаря теореме 5.1, берем $\bar{a}$ в M и $\bar{b}$ в N, удовлетворящими условиям эквивалентности, и постараемся установить бесконечный "челнок" между $\bar{a}$ и $\bar{b}$: прибавим α к $\bar{a}$ и пытаемся найти β в N такой, что $\bar{a}^\frown\alpha$ и $\bar{b}^\frown\beta$ удовлетворяли бы нашему предположению. Тот факт, что N ω-насыщенна нужен для существования β , поскольку мы только можем доказать, что искомое условие которое нужно реализовать, конечно выполнимо в N. Если это срабатывает, то задача решена, иначе мы забыли какое-то условие однотипности кортежей или T не полна.

Этот *метод "челнока"* будет проиллюстрирован в последующих главах. Естественно, в каждом отдельном случае нужно проявить изобретательность, чтобы установить "челнок", часто опираясь на факты алгебраической природы: теория моделей не занимается только очевидными проблемами! Но вы будете удивлены обилием вещей, работающих по этой схеме : "челнок" не только способ изощренного введения в логику, а напротив, эффективный метод, применяемый специалистами в теории моделей ежедневно.

5.c Элиминация кванторов

Очень часто в "челночном" методе выдвигается предположение о том, что два кортежа одного типа $\Longleftrightarrow$ они удовлетворяют одним и тем же формулам из множества F , откуда и происходит интерес к следующей теореме :

Теорема 5.3 *Пусть F – непустое множество формул $f(\bar{x})$ языка L (возможно, неполной) теории T, имеющих свободные переменные $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, и любые две n-ки из моделей T имеют одинаковый тип, как только они удовлетворяют одним и тем же формулам из F. Тогда для любой формулы $g(\bar{x})$ из L с этими же свободными переменными существует булева комбинация $f(\bar{x})$ формул из F такая, что $T \vdash (\forall x)(f(\bar{x}) \leftrightarrow g(\bar{x}))$.*

Замечание. *Обратное утверждение очевидно.*

Доказательство. Рассмотрим открыто-замкнутые множества $\langle g\rangle$ в $S_n(T)$; если $\langle g\rangle = \emptyset$, то $\langle g\rangle = \langle f \wedge \neg f\rangle$, и если $\langle g\rangle = S_n(T)$, то $\langle g\rangle = \langle f \vee \neg f\rangle$, где f – произвольный элемент непустого F ; разобравшись с этими тривиальными случаями, рассмотрим p в $\langle g\rangle$ и q вне его; так как p и q не удовлетворяют одним и тем же формулам F , то $p \vdash f_{p,q}(\bar{x})$ и $q \vdash \neg f_{p,q}(\bar{x})$, где $f_{p,q}$ – формула вида φ или $\neg\varphi$ для некоторой формулы φ из F .

Зафиксируем p и будем варьировать q ; формулы $\langle f_{p,q}\rangle$ и $\langle \neg g\rangle$ образуют замкнутое семейство с общим пустым пересечением; по компактности одно из его конечных подсемейств имеет непустое пересечение; это означает, что для некоторой формулы $h_p = f_{p,q_1} \wedge \cdots \wedge f_{p,q_n}$ имеем $p \in \langle h_p\rangle \subset \langle g\rangle$. Теперь варьируя p, получаем покрытие компакта $\langle g\rangle$ открытыми множествами $\langle h_p\rangle$ и, значит, конечное число среди них достаточно для этого покрытия; дизъюнкция таких h_p будет эквивалентной g относительно теории T.

□

В случае, когда для любого $n > 0$ можно брать в качестве F свободные формулы, говорят, что теория T *элиминирует кванторы* или ещё *допускает элиминацию кванторов.* Это означает, что выполняются следующие эквивалентные условия :

– для каждой формулы$f(\bar{x})$, где $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $n > 0$ существует бескванторная формула $g(\bar{x})$ такая, что $T \vdash (\forall x)(f(\bar{x}) \leftrightarrow g(\bar{x}))$, ,

– для любого $n > 0$ две n-ки из моделей T , удовлетворяющие одним и тем же бескванторным формулам, имеют одинаковый тип.

Примерами теорий, допускающих элиминацию кванторов, служат : теория бесконечного множества, теория одного отношения эквивалентности с бесконечным числом бесконечных классов, теория плотного линейного порядка без концевых точек.

Некоторые пренебрегают условием $n > 0$ в определении элиминации кванторов и ещё требуют, чтобы каждое предложение было эквивалентно бескванторному предложению по модулю T. Это предполагает, естественно, что множество бескванторных предложений непусто, т.е. язык содержит константные символы или символы нульарных отношений. Значит, в строгом смысле, они не считают, что вышеприведенные три примера имеют элиминацию кванторов. Другие допускают эту элиминацию, утверждая, что истинное предложение для этих (полных) теорий эквивалентно формуле $x = x$, которая истинна для любой интерпретации x, в то время как ложное предложение эквивалентно $x \neq x$, т.е. они допускают эквивалентность предложения и формулы с одной свободной переменной! Это всегда ставило в тупик автора этих строк (как быть, если все модели пусты?) , который довольствуется вышеприведенным определением : я должен его придерживаться для корректности теорем, которые будут доказаны по поводу элиминации кванторов.

Заметим, что в выше приведенных трех примерах нет бескванторных предложений и любые две 0-ки из моделей T , удовлетворяющие одним и тем же бескванторным предложениям, имеют одинаковый тип : действительно, тип 0-ки из модели M есть не что иное, как теория M , а также, поскольку T полна, существует единственный тип 0-ки! (Смотрите уместное предостережение " F непусто" в 5.3).

Также заметим, что если $n > 0$ (не будем ломать голову!) и если две $m+n$-ки, удовлетворяющие одним и тем же бескванторным формулам, имеют одинаковый тип, тогда то же самое верно и для n-ок, удовлетворяющих одним и тем же бескванторным формулам. Действительно, если мы из n-ки $\bar{a}$ образуем $(m+n)$-ку $\bar{a}'$, повторяя m раз её последний элемент, то понятно, поскольку формула $x = y$ бескванторна, что $\bar{a}$ и $\bar{b}$ удовлетворяют одним и тем же бескванторным формулам $\Longleftrightarrow$ $\bar{a}'$ и $\bar{b}'$ удовлетворяют одним и тем же бескванторным формулам $\Longleftrightarrow$ $\bar{a}'$ и $\bar{b}'$ одного типа $\Longleftrightarrow$ $\bar{a}$ и $\bar{b}$ одного типа.

Существует канонический способ получения из теории T языке L теории T' в обогащенном языке L', имеющую элиминацию кванторов. На самом деле мы его уже использовали по поводу метода Генкина в 4.с. Язык L' получается из L добавлением нового символа отношения $f'(\bar{x})$ для каждой формулы $f(\bar{x})$ языка

L и T' состоит из аксиом T и ещё из аксиом вида $(\forall x)(f(\bar{x}) \leftrightarrow f'(\bar{x}))$. Легко видеть, что каждая модель T' , обедненная до L , дает модель T, а модель T обогащается единственным образом до модели T' : модели T и модели T' – это одно и то же, с точностью до языка.

Теория T' элиминирует кванторы, поскольку каждая формула $g(\bar{x})$ языка L' эквивалентна формуле $f(\bar{x})$ языка L (полученной заменой каждого f' на f), которая, в свою очередь, эквивалентна формуле $f'(\bar{x})$, которая не имеет кванторов. Таким образом, мы видим что расширение моделей T элементарно тогда и только тогда, когда имеется расширение для соответствующих моделей теории T'. Так как все эти конструкции – канонические, то они представляют лишь технический интерес.

Говорят, что теория *модельно полна*, если она обладает следующим свойством : если M и N – модели T и M – расширение N , то это расширение элементарно. Модельно полная теория не обязательно полна; просто две не элементарно эквивалентные модели не имеют общего расширения. Конечно, если T элиминирует кванторы, то она модельно полна, поскольку выполнимость бескванторных формул сохраняется при расширениях!

Назовем две теории T_1 и T_2 одного и того же языка *компаньонами*, если каждую модель одной из них можно вложить (необязательно элементарно!) в некоторую модель другой теории; поймем что это означает :

Теорема 5.4 *Две теории являются компаньонами тогда и только тогда, когда они обладают одними и теми же универсальными следствиями (предложение – универсальное, если оно имеет вид* $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)f(x_1,\dots,x_n)$*, где* f *– бескванторная).*

Доказательство. Универсальное предложение f , истинное в структуре, истинно в любом её ограничении; если $T_1 \vdash f$ и существует модель T_2 , не выполняющая f , то она не может быть расширена до модели T_1 .

Обратно, предположим что T_1 и T_2 имеют одинаковые универсальные следствия и пусть M_1 – модель T_1 ; выделим каждый элемент M_1 с помощью нового константного символа и пусть $D(M_1)$ – множество бескванторных предложений этого нового языка истинных на M_1 ; если $D(M_1) \vdash f(a_1,\dots,a_n)$, то $T \vdash (\exists\bar{x})f(\bar{x})$, значит, $(\forall\bar{x})\neg f(\bar{x})$ не является следствием ни T_1, ни T_2, имеющей те же универсальные следствия; значит существует модель M_2 для T_2 с $\bar{b}$ в ней, такая, что $M_2 \vdash f(\bar{b})$. По компактности это означает, что $D(M_1) \cup T_2$ совместно, т.е. M_1 вкладывается в некоторую модель T_2 .

□

Теория T обладает, таким образом, минимальным компаньоном – тем, что обозначается $T_\forall$ и аксиоматизируется универсальными следствиями T . Это позволяет думать, что терминология была выбрана неудачно : дальше будет ещё хуже.

Говорят, что теория T' – *модельный компаньон* T если она её модельно полный компаньон.

Теорема 5.5 *Теория обладает самое большее одним модельным компаньоном.*

Доказательство. Пусть T_1 и T_2 – модельные компаньоны теории T : значит, они компаньоны (даже модельные компаньоны!). Пусть M_1 – модель T_1; она вкладывается в модель N_1 для T_2 , которая вкладывается в модель M_2 для T_1 и т.д. Получаем цепь $M_1 \subset N_1 \subset M_2 \subset N_2 \subset \ldots M_n \subset N_n \subset M_{n+1} \subset \ldots$, предел которой мы обозначим через P ; поскольку T_1 (T_2) модельно полна, цепь M_n (N_n) элементарна и P – элементарное расширение M_1 (N_1) . Следовательно, M_1, как и P , – модель T_2 ; по симметрии мы видим, что T_1 и T_2 имеют одни и те же модели, т.е. $T_1 = T_2$.

□

Говорят, что теория T' *модельное пополнение* T , если она её модельный компаньон и, кроме этого выполняется следующее условие: если M – модель T , вложенная с одной стороны в модель M_1 теории T', а с другой – в модель M_2 той же T', тогда кортеж $\bar{a}$ из M удовлетворяет одним и тем же формулам в M_1 и M_2 .

Естественно, модельно полная теория является своим модельным пополнением; ясно что теория с элиминацией кванторов является модельным пополнением своего любого компаньона. Теория является модельным пополнением любого своего компаньона $\Longleftrightarrow$ она модельное пополнение $T_\forall$ – самого слабого среди них.

Теорема 5.6 *Модельное пополнение универсальной теории (т.е. аксиоматизируемой универсальными предложениями) допускает элиминацию кванторов.*

Доказательство. Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$, удовлетворяющие одним и тем же бескванторным формулам, взяты из моделей M_1 и M_2 этой теории T' , пусть N_1 и N_2 – подструктуры, порожденные кортежами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ соответственно в моделях M_1 и M_2 : они будут изоморфными моделями $T_\forall$, т.е. T , значит их можно рассматривать как два вложения одной и той же модели N теории T . По определению модельного пополнения $\bar{a}$ в M_1 и $\bar{b}$ в M_2 удовлетворяют одним и тем же предложениям, и значит они имеют одинаковый тип в T' .

□

Заметим, что теория плотного линейного порядка без концевых точек является без всякого сомнения модельным пополнением теории линейного порядка, и она должна элиминировать кванторы!

Модельное пополнение является неисчерпаемой темой для болтунов в теории моделей, видящих здесь фундаментальный вклад логики в алгебру. Они любят иллюстрировать свои изложения, всюду понемногу, всякими диаграммами со стрелками, как это делают работающие в теории категорий. Для них выражение "элиминация кванторов" является заклинанием волшебной силы. В их оправдание скажем, что систематическое изучение модельного компаньона, когда он существует, может быть объектом солидной теории. Здесь мы довольствуемся несколькими теоремами практического интереса, доказанными в ходе настоящего изложения.

5.d Исторические и библиографические примечания

Понятия типа и $\varkappa$-насыщенных моделей были разработаны в течение пятидесятых годов; первое систематическое изложение имеется в [МОРЛИ-ВОТ, 1962]. Термин "элиминация кванторов" принадлежит Тарскому [ТАРСКИЙ, 1935]. Понятия модельного пополнения и модельного компаньона идут от А. Робинсона [РОБИНСОН, 1956a]