Les séries de Fourier non harmoniques et la stabilisation d'une tige vibrante

J.M. Ball*

Department of Mathematics
Heriot-Watt University
Edinburgh EH14 4AS

Considérer une tige mince et vibrante, soumise à une force axiale. Les effets de dissipation étant négligés, on se pose la question suivante: peut-on choisir la force axiale de façon que les vibrations s'amortissent? Notre réponse est oui, du moins théoriquement, avec un modèle simple.

Le modèle consiste en l'équation

$$u_{tt} + u_{xxxx} + p(t)u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < 1, \tag{1}$$

et les conditions au bord ou

$$u = u_{xx} = 0 \qquad \text{à} \quad x = 0,1, \tag{2a}$$

ou

$$u = u_x = 0 \quad \text{à} \quad x = 0, \qquad u_{xx} = u_{xxx} = 0 \quad \text{à} \quad x = 1, \tag{2b}$$

et les conditions initiales

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x), \\ u_t(x,0) &= u_1(x), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$u(x,t)$ étant le déplacement transverse, et $p(t)$ la force axiale compressive. Dans le cas (2a) les bouts de la tige sont à charnière, et dans le cas (2b) le bout $x = 0$ est fixé rigidement et le bout $x = 1$ est libre. La question est maintenant: peut-on choisir $p(t)$ telle que $u(x,t) \longrightarrow 0$ en un sens approprié quand $t \longrightarrow \infty$?

---

*Les resultats décrits ici ont etaient obtenus avec M. Slemrod, et ils apparaîtront dans [1].

En fait nous choisissons $p(t)$ comme un contrôle de feedback. Pour motiver ceci, on forme l'équation d'énergie. En multipliant (1) par u_t et en intégrant sur (0,1) on obtient

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}|u_t|^2 + \frac{1}{2}|u_{xx}|^2\right] = -\, p(t)(u_{xx},u_t), \tag{4}$$

où (,) et | | désignent le produit scalaire et la norme dans $H = L^2(0,1)$. Soit

$$p(t) = (u_{xx},u_t).$$

Alors l'énergie est décroissante et nous avons l'équation suivante dans H:

$$\ddot{u} + Au + (Bu,\dot{u})Bu = 0, \tag{5}$$

avec $A = \frac{d^4}{dx^4}$, $D(A) = \{u \in H^4(0,1)$: u satisfait les conditions au bord (2)$\}$, $B = \frac{d^2}{dx^2}$. Soit $X = D(A^{\frac{1}{2}}) \times H$. X est un espace d'Hilbert muni de la norme

$$\left\|\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right\|_X^2 = |A^{\frac{1}{2}}u|^2 + |v|^2.$$

Si on pose

$$w = \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{pmatrix}, \qquad f(w) = -\begin{pmatrix} 0 \\ (Bu,\dot{u})Bu \end{pmatrix},$$

alors (5) devient

$$\dot{w} = \mathcal{A}w + f(w).$$

On peut vérifier aisément que f applique X dans X et est localement Lipschitzienne. Donc, en utilisant le théorème du point fixe de Banach et l'estimation

$$\|w(t)\|_X^2 \leqslant \|w(0)\|_X^2,$$

obtenue de (4), dans l'équation intégrale équivalente

$$w(t) = e^{\mathcal{A}t}w(0) + \int_0^t e^{\mathcal{A}(t-s)} f(w(s))ds, \tag{7}$$

on obtient le théorème d'existence globale et d'unicité suivant.

<u>Théorème 1</u>

Pour tout $w(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in X$, il existe une solution unique $w \in C([0,\infty),X)$ de (7).

Pour étudier le comportement asymptotique des solutions la linéarisation est inutile, car en linéarisant (5) autour de $u = 0$ on obtient

$$\ddot{u} + Au = 0, \tag{8}$$

et aucune des solutions de cette equation ne tend vers zero quand $t \longrightarrow \infty$. Une autre idée est d'utiliser la fonction de Lyapunov $\|w(t)\|_X^2$. Pour cela il est important de savoir que l'orbite positif

$$\bigcup_{t \geq 0} w(t)$$

est relativement compact dans X, car on veut savoir que l'ensemble ω-limite n'est pas vide. L'auteur connait seulement deux résultats généraux qui donnent cette compacité (relative) pour les équations de deuxième ordre. L'un, dû à Dafermos et Slemrod [2], est valable dans le cas d'un semigroupe de contractions nonlinéaires à résolvante compacte. L'autre est dû à Webb [5]; il s'applique dans le cas d'une équation semilinéaire ayant la forme (6) avec

$$\|e^{\mathcal{A}t}\| \leqslant C\, e^{-\mu t},\ \mu > 0; \quad f : X \longrightarrow X \text{ compact}. \tag{9}$$

Malheureusement (5) n'engendre pas un semigroupe de contractions sur X, et de plus aucune des conditions de (9) n'est satisfaite. L'auteur pense que jusqu'à présent il n'y a aucune méthode générale qui donne le comportement asymptotique de (5), et la méthode décrite ici est très particulière.

A titre de motivation, commençons avec un problème plus simple. Est-ce que les conditions

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{u} + Au = 0 \\ &(Bu,\dot{u}) = 0 \quad \text{pour tout} \quad t \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

impliquent $u \equiv 0$?

Il faut pouvoir résoudre cette question, car si $u \not\equiv 0$ est une solution de (10), alors elle est aussi solution de (5), mais elle ne tend pas vers zero.

Soient $\lambda_k^2 > 0$ les valeurs propres, qui sont simples, de A, et soient ϕ_k les fonctions propres correspondantes. La solution générale de (8) est

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k e^{i\lambda_k t} + \bar{a}_k e^{-i\lambda_k t} \right\} \phi_k$$

Donc

$$(Bu,\dot{u}) = \sum_{k=1}^{\infty} i\lambda_k \left\{ a_k^2 e^{2i\lambda_k t} - \bar{a}_k^2 e^{-2i\lambda_k t} \right\} (B\phi_k,\phi_k) + \sum_{\nu} c_\nu e^{i\nu t}, \tag{11}$$

où les exposants ν ont la forme $\pm(\lambda_m \pm \lambda_n)$ avec $m \neq n$.

Dans le cas des conditions au bord (2a) on a

$$(B\phi_m,\phi_n) = 0, \qquad m \neq n,$$

et donc les termes non diagonaux dans (11) sont absents. Alors par (10) les coefficients

$$i\lambda_k a_k^2 (B\phi_k,\phi_k)$$

sont nuls. Puisque $(B\phi_k,\phi_k) = -|\phi_{kx}|^2 \neq 0$, on obtient $a_k = 0$ et donc $u \equiv 0$.

Pour les conditions au bord (2b) on a en général

$$(B\phi_m,\phi_n) \neq 0, \qquad m \neq n,$$

et la situation est plus compliquée. La fonction $(Bu,\dot{u})$ est presque périodique (uniformément) et sa série de Fourier non harmonique est donnée par (11). Le coefficient de $e^{2i\lambda_k t}$ est le même que précédemment pourvu qu'on n'ait aucune contribution des termes non diagonaux. Pour cela on doit montrer que

$$2\lambda_k \neq \lambda_m \pm \lambda_n, \qquad m \neq n.$$

En fait, on peut prouver un peu plus, que pour tout k

$$\inf_{\substack{m,n \\ m \neq n}} |2\lambda_k - \lambda_m \pm \lambda_n| > 0. \tag{12}$$

Les λ_k sont donnés par $\lambda_k = \mu_k^2$, où les μ_k sont les racines positives de

$$\cosh\mu \cos\mu = -1.$$

Donc on doit étudier l'équation

$$2\mu_k^2 = \mu_m^2 \pm \mu_n^2. \tag{13}$$

Il est clair que $\mu_k = \left(k-\frac{1}{2}\right)\pi + \delta_k$, avec $\delta_k \to 0$ quand $k \to \infty$. Jusqu'au premier ordre (13) est donc

$$2(2k-1)^2 = (2m-1)^2 \pm (2n-1)^2, \tag{14}$$

et en fait seul le signe $+$ est possible. Il y a une infinité de solutions triviales de (14). La première est

$$2.5^2 = 1^2 + 7^2.$$

Si k,m,n ne satisfont pas (14), la différence entre les deux membres de (14) est a moins 1, et donc, puisque δ_k est petit, on peut montrer que (13) n'est pas satisfaite. Dans l'autre cas, quand k,m,n satisfont (14), on doit connaître les termes de second ordre. En fait on peut prouver que

$$\delta_k = 2c_k(-1)^{k-1}e^{-(k-\frac{1}{2})\pi}$$

avec

$$0.97 < c_k < 1.03 \qquad \text{si} \quad k > 1.$$

On peut maintenant remplacer cette expression pour δ_k dans (13), et on trouve qu'un des termes est beaucoup plus grand que les autres. Cette contradiction implique que le coefficient de $e^{2i\lambda_k t}$ est

$$i\lambda_k a_k^2(B\phi_k,\phi_k).$$

Un calcul délicat donne $(B\phi_k,\phi_k) \neq 0$, et donc $a_k = 0$ et $u \equiv 0$.

<u>Théorème 2</u>

Toute solution $w(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix}$ tend faiblement vers $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans X quand $t \to \infty$.

<u>Démonstration</u>

Soit $t_n \to \infty$. Puisque $\|w(t_n)\|_X$ est bornée nous pouvons supposer que $w(t_n) \xrightarrow{X} \psi$. Alors

$$w(t+t_n) = e^{\mathcal{A}t}w(t_n) + \int_0^t e^{\mathcal{A}(t-s)}f(w(s+t_n))ds.$$

Soit

$$w_n(t) = e^{\mathcal{A}t}w(t_n) = \begin{pmatrix} u_n(t) \\ \dot{u}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{a_k^{(n)}e^{i\lambda_k t} + \bar{a}_k^{(n)}e^{-i\lambda_k t}\right\}\phi_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} i\lambda_k\left\{a_k^{(n)}e^{i\lambda_k t} - \bar{a}_k^{(n)}e^{-i\lambda_k t}\right\}\phi_k \end{pmatrix}.$$

L'équation d'énergie implique que pour tout $T > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T (Bu(t+t_n),\dot{u}(t+t_n))^2dt = 0.$$

Puisque

$$\left\|\int_0^t e^{\mathcal{A}(t-s)}f(w(s+t_n))ds\right\|_X \leq C\int_0^t \|f(w(s+t_n))\|_X ds$$
$$\leq C_1 T^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^T (Bu(t+t_n),\dot{u}(t+t_n))^2dt\right\}^{\frac{1}{2}},$$

pour $t \in [0,T]$, on déduit que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|w(t+t_n) - w_n(t)\|_X \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T (Bu_n(t),\dot{u}_n(t))^2 dt = 0, \qquad T > 0. \tag{15}$$

Soit

$$e^{\mathcal{A}t}y = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k e^{i\lambda_k t} + \bar{a}_k e^{-i\lambda_k t}\right)\phi_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} i\lambda_k \left(a_k e^{i\lambda_k t} - \bar{a}_k e^{-i\lambda_k t}\right)\phi_k \end{pmatrix}$$

Parce que $w_n(0) = w(t_n) \to \psi$, il est clair que

$$a_k^{(n)} \to a_k \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

On veut démontrer que $a_k = 0$, c'est-à-dire

$$a_k^{(n)} \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Soit

$$f_n(t) = (Bu_n(t),\dot{u}_n(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} i\lambda_k \left(a_k^{(n)2} e^{2i\lambda_k t} - \bar{a}_k^{(n)2} e^{-2i\lambda_k t}\right)(B\phi_k,\phi_k) + \sum_{\nu} d_{\nu}^{(n)} e^{i\nu t}.$$

De (15) on a

$$f_n \xrightarrow{L^2(0,T)} 0 \quad \text{pour tout} \quad T > 0.$$

On déduit le résultat en utilisant (12) et en appliquant la proposition suivante,

<u>Proposition</u>

Si

$$f_n(t) \sim \sum_k c_k^{(n)} e^{i\mu_k t}$$

est une suite bornée des fonctions presque périodiques, ayant les mêmes exposants μ_k, si μ_j est isolée $\left(\inf_{k\neq j} |\mu_j - \mu_k| > 0\right)$, et si $f_n \xrightarrow{L^2(0,T)} 0$ pour tout $T > 0$,

alors $c_j^{(n)} \to 0$ quand $n \to \infty$.

Démonstration

On a

$$f_n(t)e^{-i\mu_j t} = c_j^{(n)} + g_n(t)$$

avec

$$g_n(t) \sim \sum_{k\neq j} c_k^{(n)} e^{-i(\mu_k-\mu_j)t}.$$

La suite $c_j^{(n)}$ est bornée à cause de l'égalité de Parseval, et donc les g_n sont bornées uniformément. Un résultat de Levitan (cf Fink [3]) implique que

$$\left|\int_0^T g_n(t)dt\right| \leqslant C \sup_{t\in\mathbb{R}} |g_n(t)|,$$

où le constante C est indépendant de n,T. Donc

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f_n(t)e^{-i\mu_j t}dt - c_j^{(n)}\right| \leqslant \frac{C_1}{T}$$

Soit $c_j^{(n)} \to c_j$. Alors on obtient

$$|c_j| \leqslant \frac{C_1}{T}.$$

En faisant tendre $T \to \infty$ on a $c_j = 0$ et $c_j^{(n)} \to 0$.

Remarque

On ne peut omettre aucune des hypothèses soulignées de la proposition.

On trouvera dans [1] une version abstraite du Théorème 2, et plus de détails en ce qui concerne la démonstration. Au cas où l'opérateur B est symmétrique (par exemple pour les conditions au bord (2a)) on y trouvera une démonstration plus simple.

D'autres applications du théorème abstrait sont mentionnés dans [1], par exemple les équations de Timoshenko pour une tige mince. De plus on ne sait pas si la convergence dans le Théorème 2 est forte. Pour des questions de même type voir Haraux [4].

Références

[1] J.M. Ball & M. Slemrod, Nonharmonic Fourier series and the stabilization of distributed semilinear control systems, Comm. Pure Appl. Math., à paraître.

[2] C.M. Dafermos & M. Slemrod, Asymptotic behaviour of nonlinear contraction semigroups, J. Functional Analysis, 13(1973) 97-106.

[3] A.M. Fink. "Almost periodic differential equations", Lecture notes in Mathematics, Vol. 377, Springer, Berlin 1974.

[4] A. Haraux, Opérateurs maximaux monotones et oscillations forcées non linéaires, Thèse, Univ. Pierre et Marie Curie, Paris, 1978.

[5] G. Webb, Compactness of bounded trajectories of dynamical systems in infinite dimensional spaces, Proc. Royal Soc. Edinburgh, à paraître.