Les systèmes asymptotiquement dynamiques

J.M. Ball

Department of Mathematics
Heriot-Watt University
Edinburgh EH14 4AS

1. Commençons par un exemple simple. On considère l'équation différentielle ordinaire

$$\ddot{u} + \dot{u} + u^3 - u = f(t) \tag{1}$$

où f est continue et $f(t) \to 0$ quand $t \to \infty$. On ne suppose pas que

$$\int_{t_0}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty.$$

L'équation autonome correspondante à (1) étant

$$\ddot{u} + \dot{u} + u^3 - u = 0. \tag{2}$$

Il est bien connu que toute solution $(u,\dot{u})$ de (2) tend quand $t \to \infty$ vers un des points stationnaires $(-1,0),(0,0),(1,0)$. On se pose la question: en va-t-il de même pour toute solution bornée de (1)? La réponse à cette question est positive et ce résultat est une conséquence de la théorie décrite ci-dessous.

On note que dans notre exemple l'équation autonome (2) possède une fonction de Lyapunov

$$V(u,\dot{u}) = \frac{1}{2}\dot{u}^2 + \frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{2}u^2, \tag{3}$$

mais que pour (1)

$$\dot{V}(u,\dot{u}) = f(t)\dot{u} - \dot{u}^2$$

n'a pas de signe défini.

2. Soit (X,d) un espace métrique. Par un <u>process</u> sur X (cf essentiellement Dafermos [5]) on entend une famille d'opérateurs $U(t,s) : X \to X$, définis pour $t \in \mathbb{R}^+$, $s \in \mathbb{R}$, et satisfaisant

(i) $U(t,0) =$ identité,

(ii) $U(t+\tau,s) = U(t,s+\tau)U(\tau,s)$, $\quad s \in \mathbb{R},\ t,\tau \in \mathbb{R}^+$,

(iii) pour $s_0 \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+$ fixés, les opérateurs $U(t,s)$, avec paramètre $s \in [s_0,\infty)$, sont equicontinus (c'est-à-dire, si $\varepsilon > 0$, $x \in X$ sont donnés, il existe $\delta > 0$ tel que si $d(x,y) < \delta$ alors $d(U(t,s)x,U(t,s)y) < \varepsilon$ pour tout $s \in [s_0,\infty)$).

(Interprétation: $U(t,s)x$ est la valeur d'une solution au temps $s + t$ qui prend la valeur x au temps s).

$U(\cdot,\cdot)$ est un <u>système asymptotiquement dynamique</u> s'il existe des opérateurs $T(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, tels que si $s_n \to \infty$, $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in X$, alors

$$U(t,s_n)x \to T(t)x.$$

Il est clair que $T(\cdot)$ est un <u>semigroupe</u>, c'est-à-dire

(i) $T(0) =$ identité

(ii) $T(s+t) = T(s)T(t)$, $\quad s,t \in \mathbb{R}^+$,

(iii) chaque opérateur $T(t) : X \to X$ est continu.

Soit $x \in X$, $s \in \mathbb{R}$. On définit <u>l'orbite positif</u>

$$\mathcal{O}^+(x,s) = \bigcup_{t \geq 0} U(t,s)x,$$

et <u>l'ensemble ω-limite</u>

$$\omega(x,s) = \{y \in X : \text{il existe une suite } t_n \to \infty \text{ telle que } U(t_n,s)x \to y\}.$$

Un ensemble $A \subset X$ est <u>invariant</u> si et seulement si $T(t)A = A$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. Un ensemble invariant qui consiste en un seul point est un <u>point stationnaire</u>. Le résultat suivant est bien connu (cf Dafermos [5]).

Lemme 1

Si $\mathcal{O}^+(x,s)$ est relativement compact, alors $\omega(x,s)$ est nonvide, invariant et compact, et $d(U(t,s)x,\omega(x,s)) \to 0$ quand $t \to \infty$. Si de plus l'application $t \mapsto U(t,s)x$ est continue pour t assez grand, alors $\omega(x,s)$ est connexe.

Démonstration

Nous donnons seulement la démonstration du fait que $\omega(x,s)$ est positif invariant, c'est-à-dire

$$T(t)\omega(x,s) \subset \omega(x,s), \qquad t \in \mathbb{R}^+.$$

Soit $t_n \to \infty$, $U(t_n,s)x \to y \in \omega(x,s)$. Alors, par l'équicontinuité,

$$U(t_n+t,s)x = U(t,t_n+s)\,U(t_n,s)x \to T(t)y.$$

Donc $T(t)y \in \omega(x,s)$. □

Soit $V : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue de Lyapunov pour $T(\cdot)$; i.e.

$$V(T(t)x) \leq V(x)\ , \qquad t \in \mathbb{R}^+,\ x \in X.$$

Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ soit

$$M_\gamma = \{x \in X : V(T(t)x) = \gamma \ \text{ pour tout } \ t \in \mathbb{R}^+\}$$

Théorème 2

Soit $x \in X$, $s \in \mathbb{R}$. Supposons que $\mathcal{O}^+(x,s)$ soit relativement compact. Soit

$$\alpha = \varliminf_{t\to\infty} V(U(t,s)x), \qquad \beta = \varlimsup_{t\to\infty} V(U(t,s)x).$$

Alors pour tout $\gamma \in [\alpha,\beta]$ l'ensemble $\omega(x,s) \cap M_\gamma$ est nonvide.

Corollaire 3

Si de plus on suppose que l'application $t \mapsto U(t,s)x$ est continue pour t assez grand et que $\bigcup_{\gamma \in [\alpha,\beta]} M_\gamma$ est fini, alors $\alpha = \beta$ et il existe un point stationnaire $\phi \in M_\alpha$ avec $U(t,s)x \to \phi$ lorsque $t \to \infty$.

Démonstration du Corollaire

Puisque $\bigcup_{\gamma \in [\alpha,\beta]} M_\gamma$ est fini, $\alpha = \beta$. Mais puisque V est continue et $\omega(x,s)$ est invariant, $\omega(x,s) \subset M_\alpha$. Parce que $\omega(x,s)$ est connexe par le Lemme 1, on déduit que $\omega(x,s) = \{\phi\}$ où ϕ est un point stationnaire. □

Exemple

X = le cercle du rayon unité = $\mathbb{R}$ (mod 2π).

On considère l'équation

$$\dot{\theta}(t) = -g(\theta) - f(t),$$

avec

$$g(\theta) = \begin{cases} \cos^2\theta, & -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{2}, \end{cases}$$

et avec $f(t) \geqslant 0$, f continue, $f(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$, mais $\int_0^\infty f(t)dt = \infty$. Les points stationnaires de l'équation autonome

$$\dot{\theta}(t) = -g(\theta)$$

sont $\{\theta : \frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{2}\}$. La fonction $V(\theta) = \sin\theta$ est une fonction de Lyapunov, et chaque $M_\gamma, \gamma \in [-1,1]$, contient un seul point. Mais en intégrant (4),

$$\theta(t) - \theta(0) \leqslant -\int_0^t f(s)ds \to -\infty \quad \text{quand } t \to \infty.$$

Donc $\omega(\theta_0, 0) = X$ ne contient pas que des points stationnaires. Mais la conclusion du Théorème 2 est valable (voir Figure 1).

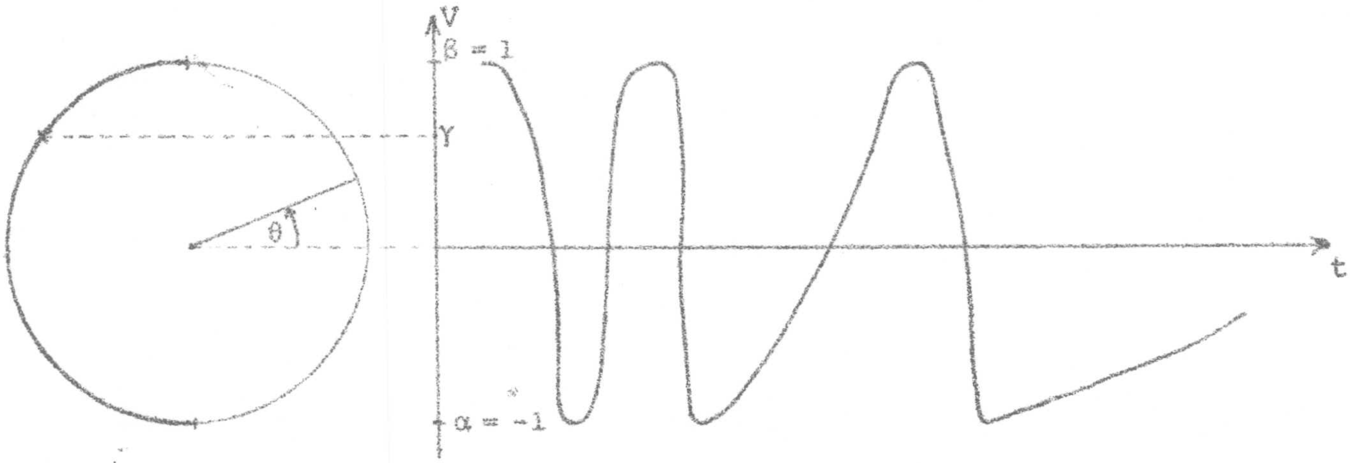

Figure 1

On note dans cet exemple que chaque fois que $V(t)$ croît elle croît plus lentement. Ce fait est vrai en général et est utilisé dans la démonstration du théorème.

<u>Démonstration du Théorème 2</u>

Soit $V(t) = V(U(t,s)x)$. On a que pour tout $\tau \in \mathbb{R}^+$

$$\underline{\lim}_{t \to \infty} V(t) - V(t+\tau) \geq 0.$$

Sinon il existerait $t_n \to \infty$ avec

$$V(t_n) - V(t_n+\tau) \leq \varepsilon < 0 \qquad \text{pour tout } n,$$

et sans restreindre la généralité,

$$U(t_n,s) \to y, \quad U(t_n+\tau,s)y \to T(\tau)y.$$

Alors

$$V(y) - V(T(\tau)y) \leq \varepsilon < 0,$$

d'où la contradiction.

On a besoin du lemme suivant, qui est démontré dans [2] grâce au théorème de Baire.

Lemme 4

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et pour tout $\tau \in \mathbb{R}^+$

$$\varliminf_{t\to\infty} f(t) - f(t+\tau) \geqslant 0.$$

Soit $\alpha = \varliminf_{t\to\infty} f(t)$, $\beta = \varlimsup_{t\to\infty} f(t)$ avec $-\infty < \alpha \leqslant \beta < \infty$. Alors pour tout $\gamma \in [\alpha,\beta]$ il existe une suite $t_n \to \infty$ telle que

$$f(t_n+t) \to \gamma$$

uniformément pour t dans tout sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^+$.

En appliquant le Lemme 4 à V, on obtient pour tout $\gamma \in [\alpha,\beta]$ une suite $t_n \to \infty$ telle que $U(t_n,s)x \to y \in \omega(s,x)$ et $V(U(t_n+t,s)x) \to \gamma$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. Donc $V(T(t)y) = \gamma$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \omega(s,x) \cap M_\gamma$. □

3. Exemples

I. Considérons à nouveau l'équation (1). Prenons $X = \mathbb{R}^2$, $z = \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \end{pmatrix}$. Alors (1) devient

$$\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ -\dot{u}-u^3+u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \tag{7}$$

Soit

$$U(t,s)\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = z(s+t),$$

où $z : [s,\infty) \to X$ est la solution de (7) avec $z(s) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$. On peut prouver aisément que les opérateurs $U(t,s)$ forment un système asymptotiquement dynamique, l'existence globale des solutions résultant de l'estimation

$$\dot{V} + u^2 = f(t)\dot{u} \leqslant \frac{1}{2}f(t)^2 + \frac{1}{2}\dot{u}^2.$$

Le semigroupe correspondant est donné par

$$T(t)\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = z(t),$$

où $z(t)$ est la solution de

$$\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ -\dot{u}-u^3+u \end{pmatrix} \quad ; \quad z(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

Du Théorème 2 on déduit que toute solution, bornée dans X, de (7) tend vers un des points stationnaires $u = 0$, $u = 0, \pm 1$ quand $t \to \infty$.

<u>Remarque</u>: Suivant Artstein [1], on peut affaiblir les conditions sur f. Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ avec $\int_{a+t}^{b+t} f(\tau)d\tau \to 0$ quand $t \to \infty$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}$. Alors toute solution bornée tend vers un point stationnaire.

II. Considérons le problème

$$\left.\begin{aligned} & u_t = u_{xx} + f(x,t,u), \qquad 0 < x < 1,\ t > s, \\ & u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad t > s, \\ & u(x,s) = \psi(x), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

où $\psi \in C([0,1])$. Le problème autonome correspondant est

$$\left.\begin{aligned} & \bar{u}_t = \bar{u}_{xx} + \bar{f}(x,\bar{u}), \\ & \bar{u}_x(0,t) = \bar{u}_x(1,t) = 0, \\ & \bar{u}(x,0) = \bar{\psi}(x). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Supposons que

(i) $f, \bar{f}$ soient régulières

(ii) il existe des constantes $a(s)$, $M(p,s)$ telles que

$$\sup_{x\in(0,1)} v\,f(x,t,v) \leqslant 0 \quad \text{pour} \quad |v| \geqslant a(s),\ t \geqslant s,$$

$$\|f(\cdot,t,v)\|_{C^2([0,1])} \leqslant M(\rho,s) \qquad \text{pour} \quad |v| \leqslant \rho,\ t \geqslant s.$$

(iii) pour tout $\rho > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^{t+1} \sup_{|v|\leqslant\rho} \|f(\cdot,\tau,v) - \bar{f}(\cdot,v)\|_{C([0,1])} d\tau = 0.$$

Pour $u \in C^1([0,1])$ soit

$$V(u) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}u_x^2 - \bar{F}(x,u)\right] dx,$$

où

$$\bar{F}(x,u) \overset{\text{def}}{=} \int_0^u \bar{f}(x,s)ds.$$

Soit

$$U(t,s)\psi = u(\cdot,t),$$

où u est la solution de (8) et $\psi \in C^1([0,1])$. Soit aussi

$$T(t)\bar{\psi} = \bar{u}(\cdot,t),$$

où $\bar{u}$ est la solution de (9) et $\bar{\psi} \in C^1([0,1])$. Alors on peut démontrer que les opérateurs $U(t,s)$ forment un système asymptotiquement dynamique dans $X = C^1([0,1])$ avec le semigroupe correspondant $T(t)$. De plus, si $\psi \in C([0,1])$ alors $U(t,s)\psi \in C^1([0,1])$ pour tout $t > 0$. Donc pour étudier le comportement asymptotique des solutions de (8) on peut supposer que $\psi \in C^1([0,1])$. On peut aussi prouver que toute solution de (8) est bornée dans $C([0,1])$ (par le principe du maximum) et donc que $\mathcal{O}^+(\psi,s)$ est relativement compact dans $C^1([0,1])$. En outre V est une fonction de Lyapunov continue, et les ensembles M_γ contiennent seulement des points stationnaires. Donc en appliquant le Théorème 2 et le Corollaire 3 on obtient

Théorème 5

Soit u la solution de (8) et

$$\alpha = \underline{\lim}_{t\to\infty} V(u(\cdot,t)), \quad \beta = \overline{\lim}_{t\to\infty} V(u(\cdot,)).$$

Alors $-\infty < \alpha \leqslant \beta < \infty$ et pour tout $\lambda \in [\alpha,\beta]$ il existe un point stationnaire $w(\cdot) \in \omega(\psi,s)$ (l'ensemble ω-limite dans $C^1([0,1])$) avec $V(w(\cdot)) = \gamma$. Si de plus les points stationnaires du (9) sont isolés dans $C([0,1])$, alors $\alpha = \beta$ et quand $t \to \infty$ $u(\cdot,t)$ tend dans $C^1([0,1])$ vers un seul point stationnaire $w(\cdot)$ avec $V(w(\cdot)) = \alpha$.

Remarque: Si les points stationnaires ne sont pas isolés, on ne peut pas conclure que $u(\cdot,t)$ tend quand $t \to \infty$ vers un seul point stationnaire. Par exemple, soit $\overline{f}(r) = 0$ si $r \in [-1,1]$, $|\overline{f}(r)| \geqslant 1$ si $|r| \geqslant 2$, $f(x,t,r) = \overline{f}(r) + g(t)$, où $g(t) \to 0$ quand $t \to \infty$ mais $\overline{\lim}_{t\to\infty} \int_0^t g(s)ds = 1$, $\underline{\lim}_{t\to\infty} \int_0^t g(s)ds = -1$, $\sup_{t\geqslant 0} \left|\int_0^t g(s)ds\right| = 1$. Alors la solution de (8) avec $\psi \equiv 0$, $s = 0$, est

$$u(x,t) = \int_0^t g(s)ds,$$

et donc l'ensemble ω-limite est donné par

$$\omega(0,0) = \{w(\cdot) \equiv c : c \in [-1,1]\}.$$

Cependant pour l'équation autonome (9), sous nos hypothèses, toute solution tend vers un seul point stationnaire, même si ces points ne sont pas isolés. Ceci est dû au fait que $T(\cdot)$ est un semigroupe de contractions dans $L^2(0,1)$ (voir Brezis [4]).

4. Discussion

Pour une bibliographie récente concernant les applications des fonctions de Lyapunov aux équations différentielles voir Dafermos [6].

Une version du Corollaire 3 a été donnée pour la première fois dans Ball et Peletier [3]. Dans cet article, une hypothèse d'équicontinuité des opérateurs $U(t,s)$ plus forte que dans le présent article a été assumée, ce qui évite l'usage du théorème de Baire dans le Lemme 4. On trouve aussi dans [3] une discussion d'Exemple II dans le cas où les points stationnaires de (9) sont isolés.

Dans le Théorème 2 il n'est pas essentiel d'avoir l'unicité des solutions. En outre il suffit de savoir seulement que la solution pour laquelle on désire le comportement asymptotique existe pour tout $t \geqslant s$. De plus, si on examine la démonstration du Théorème 2 on voit qu'il n'est pas essentiel d'avoir V continue. Si V n'est pas continue, alors l'ensemble

$$\omega_V(x,s) = \{y \in X : \text{il existe une suite } t_n \to \infty \text{ telle que } U(t_n,s)x \to y \ \underline{\text{et}}\ V(U(t_n,s)x) \to V(y)\}$$

peut être différent de $\omega(x,s)$. Si (6) est vraie, et si les conditions

$$\begin{cases} U(t_n,s)x \to y, \\ V(U(t_n,s)x) - V(U(t_n+t,s)x) \to 0 \quad \text{uniformément pour } t \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{apartenant aux compacts de } \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

impliquent que

$$V(U(t_n,s)x) \to V(y),$$

alors la démonstration montre que

$$\omega_V(x,s) \cap M_\gamma \neq \phi \qquad \text{pour tout } \gamma \in [\alpha,\beta].$$

Cette observation est importante pour les problèmes hyperboliques, où X peut être un sous-ensemble d'un espace d'Hilbert, muni de la topologie faible. Si, par exemple,

$$V(x) = \frac{1}{2}\|x\|_X^2 + g(x),$$

avec $g:X \to \mathbb{R}$ compacte, alors $\omega_V(x,s)$ est l'ensemble ω-limite fort. En utilisant ces idées on peut obtenir la même type de résultat que dans le Théorème 5 pour les équations de type

$$\left.\begin{aligned} &u_{tt} - \Delta u + u_t + f(u,t) = 0, \quad x \in \Omega, \\ &u\big|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned}\right\}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné. Voir [2] pour tous ces développements de la théorie.

Références

[1] Z. Artstein, The limiting equations of nonautonomous ordinary differential equations, J. Diff. Equations 25(1977) 184 - 202.

[2] J.M. Ball, On the asymptotic behaviour of generalised processes, with applications to nonlinear evolution equations, J. Diff. Equations 27(1978)224 - 265.

[3] J.M. Ball & L.A. Peletier, Global attraction for the one-dimensional heat equation with nonlinear time-dependent boundary conditions, Arch. Rat. Mech Anal. 65(1977) 193 - 201.

[4] H. Brezis, Monotonicity methods, dans "Contributions to Nonlinear Functional Analysis", édité par Zarantonello, Academic Press, New York 1971.

[5] C.M. Dafermos, An invariance principle for compact processes, J. Diff. Equations, 9(1971) 239 - 252.

[4] C.M. Dafermos, Asymptotic behaviour of solutions of evolution equations, dans "Nonlinear Evolution Equations" édité par M.G. Crandall, Academic Press, New York 1978.