Pitman, to appear

Remarques sur l'existence et la régularité des solutions d'élastostatique non linéaire

J.M. Ball

Department of Mathematics
Heriot-Watt University
Edinburgh

1. Examinons tout d'abord le problème en dimension un; soit

$$\frac{d}{dx} W_p(X, x'(X)) = \Phi_x(X, x(X)), \qquad 0 < X < 1, \tag{1}$$

avec les conditions au bord

$$x(0) = 0, \ x(1) = \lambda > 0. \tag{2}$$

Ici $x(X)$ est la position déformée d'un point d'un corps élastique unidimensionelle qui était à $X \in [0,1]$ dans une configuration de référence (cf Fig. 1).

Figure 1

La contrainte W_p est la dérivée par rapport à p de la fonction d'énergie interne $W(X,p)$, et la force externe Φ_x est la dérivée par rapport à x de la fonction $\Phi(X,x)$ d'énergie potentielle. L'équation (1) est l'équation d'Euler pour la fonctionelle

$$I(x) = \int_0^1 [W(X, x'(X)) + \Phi(X, x(X))] dX.$$

Si Φ est zéro et $W = W(p)$ homogène, une condition nécessaire pour que toutes les solutions de (1) soient C^1 est que W' soit strictement monotone, parce que si $W'(p) = W'(q)$ avec $p \neq q$, alors

$$x(X) = pX, \qquad 0 \leq X \leq \frac{1}{2},$$
$$= qX + \frac{1}{2}(p-q), \qquad \frac{1}{2} \leq X \leq 1,$$

est une solution. Si W est bornée inférieurement, cela implique que W est strictement convexe.

Nous faisons les hypothèses suivantes sur W et Φ:

(H1) $W : [0,1] \times (0,\infty) \to R$ est une fonction de Carathéodory, c'est-à-dire

$$\left.\begin{array}{ll} W(\cdot,p) & \text{est mesurable pour tout } p > 0, \\ W(X,\cdot) & \text{est continue pour presque tout } X \in (0,1). \end{array}\right\}$$

(H2) $W(X,p) \to \infty$ quand $p \to 0+$ pour presque tout $X \in (0,1)$. (On définit $W(X,p) = \infty$ si $p \leq 0$.)

(H3) $W(X,p) \geq \psi(p) + a(X)$ pour tout $p > 0$ et presque tout $X \in (0,1)$, où $a(\cdot) \in L^1(0,1)$ et $\psi : R^+ \to R^+$ est une fonction convexe telle que $\psi(0) = 0$, $\frac{\psi(s)}{s} \to \infty$ quand $s \to \infty$.

(H4) $\int_0^1 W(X,\lambda)dX < \infty$ pour tout $\lambda > 0$.

(H5) $\Phi : [0,1] \times R^+ \to R$ est une fonction de Carathéodory, et pour tout $\lambda > 0$ il existe une constante $C(\lambda)$ telle que

$$|\Phi(X,r)| \leq C(\lambda) \quad \text{pour tout } r \in [0,\lambda] \text{ et presque tout } X \in (0,1).$$

Théorème 1

Supposons de plus que $W(X,\cdot)$ est convexe pour presque tout $X \in (0,1)$. Alors il existe une fonction x qui minimise I dans

$$S = \{x \in W^{1,1}(0,1) : I(x) < \infty,\ x(0) = 0,\ x(1) = \lambda\}.$$

Démonstration

Puisque $\lambda X \in S$, S est nonvide. Chaque fonction $x \in S$ est continue et satisfait $x' > 0$ p.p., et donc $0 < x(X) < \lambda$ si $X \in (0,1)$. Donc I est bornée inférieurement dans S. A cause de (H3) et du critère de la Vallée Poussin il existe une suite minimisante pour I dans S convergeant faiblement dans $W^{1,1}(0,1)$. Puisque I est faiblement semicontinue inférieurement on obtient le résultat (cf. Ekeland et Témam [7 Thm 2.1, p 226]). □

<u>Remarque</u>: Dans le cas où W est homogène, nos hypothèses sur W sont équivalentes à $W:(0,\infty) \to \mathbb{R}$ convexe, $W(p) \to \infty$ quand $p \to 0+$, et $W'(p) \to \infty$ quand $p \to \infty$.

La démonstration du fait que la fonction minimisante x satisfait l'équation d'Euler (1) n'est pas immédiate, $x'(X)$ pouvant être zéro sur un ensemble non vide. Cette difficulté a été traitée par Antman [1] et par Antman & Brezis [2] sous des hypothèses différentes. Signalons que dans la première partie du théorème suivant on ne suppose ni que $W(X,\cdot)$ est convexe, ni que (H3) est satisfaite.

<u>Théorème 2</u>

Supposons que (H1), (H2), (H5) soient satisfaites et

$$\text{(H6)}\ \begin{cases} W(X,\cdot):(0,\infty) \to \mathbb{R},\ \phi(X,\cdot):\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \text{ sont } C^1 \text{ pour presque tout} \\ X \in (0,1);\ W_p,\ \phi_x \text{ sont des fonctions de Carathéodory, et pour} \\ \text{tout } \lambda > 0 \text{ il existe une constante } D(\lambda) \text{ telle que} \\ \qquad |\phi_p(X,r)| < D(\lambda) \text{ pour tout } r \in [0,\lambda] \\ \qquad\qquad\qquad \text{et presque tout } X \in (0,1). \end{cases}$$

Soit x minimise I dans S. Alors (1) est satisfaite p.p. dans $(0,1)$.

Si de plus W_p est continue, si $W(X,\cdot)$ est strictement convexe pour tout $X \in [0,1]$, et si

$$W(X,p) \geq \theta(p), \qquad X \in [0,1],\ p > 0,$$

où θ est convexe, $\theta(p) \to 0$ quand $p \to 0+$, $\frac{\theta(p)}{p} \to \infty$ quand $p \to \infty$, alors $x \in C^1([0,1])$ et

$$\min_{X\in[0,1]} x'(X) > 0.$$

Démonstration

Soit $\Omega_n = \{X \in [0,1] : \sup_{|r-x'(X)|<\frac{1}{n}} |W_p(X,r)| \leq n\}$ et soit χ_n la fonction charactéristique de Ω_n. Puisque W_p est de Carathéodory, Ω_n est mesurable. Il est clair que $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$ et que $x'(X) = 0$ pour presque tout $X \in [0,1]\setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$. Parce que $I(x) < \infty$ on déduit de (H2) que $\operatorname{mes}([0,1]\setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n) = 0$.

Prenons $v \in L^\infty(0,1)$ avec $\int_{\Omega_n} v(X)dX = 0$. Pour $|t|$ suffisamment petit on définit $y \in W^{1,1}(0,1)$ par

$$y'(X) = x'(X) + t\chi_n(X)v(X)\ , \qquad y(0) = 0.$$

Puisque

$$I(y) = I(x) + \int_{\Omega_n} [W(X, x'(X)) + tv(X)) - W(X, x'(X))]\,dX + \int_0^1 [\Phi(X,y(X)) - \Phi(X,x(X))]dX,$$

il est clair que $y \in S$. En divisant par t et en faisant $t \to 0$, on obtient

$$\int_{\Omega_n} W_p(X, x'(X))v(X)dX + \int_0^1 \Phi_x(X,x(X))\left[\int_0^X \chi_n(Y)v(Y)dY\right]dX = 0,$$

où on a utilisé le théorème de la convergence bornée. Une intégration par parties donne

$$\int_{\Omega_n} \left[W_p(X,x'(X)) - \int_0^X \Phi_x(Y,x(Y))dY\right]v(X)dX = 0.$$

Mais v est arbitraire, et donc

$$W_p(X,x'(X)) - \int_0^X \Phi_x(Y,x(Y))dY = C, \tag{3}$$

p.p. dans Ω_n. Evidemment C est indépendant de n, et donc (3) est satisfaite p.p. dans $(0,1)$.

Pour démontrer la deuxième partie du théorème il suffit de prouver que $X_n \to X$ dans $[0,1]$, $W_p(X_n,p_n) = a_n \to a$ impliquent $p_n \to p$, où p est la solution unique de $W_p(X,p) = a$. C'est clair si $0 < \varepsilon \leq p_n \leq k < \infty$ pour tout n. Sinon on peut supposer que $p_n \to 0$ ou $p_n \to \infty$. Si $p_n \to 0$, alors pour n suffisamment grand la convexité de $W(X_n,\cdot)$ donne

$$W_p(X_n,p_n) \leq \frac{W(X_n,p_n) - W(X_n,1)}{p_n - 1},$$

et donc $a_n \to -\infty$. On obtient une contradiction semblable si $p_n \to \infty$. $\square$

<u>Remarque</u>: Sans une condition de croissance sur W on ne peut pas conclure que $x \in C^1([0,1])$, même si $W(X,\cdot)$ est strictement convexe. Par exemple la solution de

$$\min_{x(0)=0,\, x(1)=1} \int_0^1 \left[\frac{1}{x'^2} - 48\sqrt{2}\, x\, |X - \tfrac{1}{2}|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(X - \tfrac{1}{2})\right] dX$$

est

$$x(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, |X - \tfrac{1}{2}|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(X - \tfrac{1}{2}).$$

Considérons maintenant la question d'existence d'une fonction minimisante quand $W(X,\cdot)$ n'est pas convexe. En générale on n'a pas l'existence: par exemple

$$\operatorname*{Inf}_{x(0)=0,\, x(1)=\frac{3}{2}} \int_0^1 \left[\frac{(x'-1)^2(x'-2)^2}{x^8} + (x - \tfrac{3}{2}X)^2\right] dX = 0,$$

mais $x(X) = \frac{3}{2}X$ n'est pas minimisante. Remarquons que l'intégrale dans cet exemple égale

$$-\frac{3}{2} + \int_0^1 (W(X,x') + x^2)dX,$$

où

$$W(X,x') = \frac{(x'-1)^2(x'-2)^2}{x'} + \frac{3}{2}X^2x'.$$

(Pour des exemples reliés voir Young [11]). Dans un article récent Aubert & Tahraoui [3] ont donnés des conditions sous lesquelles on a l'existence. En utilisant leurs méthodes on peut démontrer le résultat suivant.

Proposition 3

Si $\Phi \equiv 0$ alors le Théorème 1 est valable sans l'hypothèse que $W(X,\cdot)$ est convexe.

On peut déduire de cette proposition un théorème d'existence pour le problème homogène:

$$\min_{x \in S} I(x),$$

$$I(x) = \int_0^1 [W(x'(X)) + \Phi(x(X))]dX.$$

Théorème 4

Soient $W:(0,\infty) \to R$ continue, $W(p) \to \infty$ quand $p \to 0+$ ($W(p) = \infty$ si $p < 0$), $\frac{W(p)}{p} \to \infty$ quand $p \to \infty$, $\Phi:R^+ \to R$ continue. Alors il existe une fonction x qui minimise I dans S. Si de plus W,Φ sont C^1 alors x satisfait

$$\frac{d}{dX}W'(x'(X)) = \Phi'(x(X)) \qquad \text{p.p. dans } [0,1].$$

Démonstration

On définit la fonction

$$\hat{W}(p) = pW\left(\frac{1}{p}\right). \tag{4}$$

Il est clair que

$$\hat{W}(p) \to \infty \quad \text{quand} \quad p \to 0+, \quad \frac{\hat{W}(p)}{p} \to \infty \quad \text{quand} \quad p \to \infty.$$

On définit $\hat{W}(p) = \infty$ si $p \leq 0$. Si $x \in S$ alors $x'(X) > 0$ p.p. et x possède un inverse $X(\cdot)$ continu. Donc notre problème est équivalent à

$$\min_{x \in \hat{S}} \hat{I}(X),$$

où

$$\hat{I}(X) = \int_0^\lambda [\hat{W}(X'(X)) + \Phi(x)X'(x)]dx,$$

$$\hat{S} = \{X \in W^{1,1}(0,\lambda) : \hat{I}(X) < \infty,\ X(0) = 0,\ X(\lambda) = 1\}.$$

On résoud ce problème en utilisant la Proposition 3. L'équation d'Euler est satisfaite par le Théorème 2. □

Remarques: (i) Voir [3] pour un autre résultat applicable au cas homogène.

(ii) On trouve dans [5] des observations concernant la transformation (4).

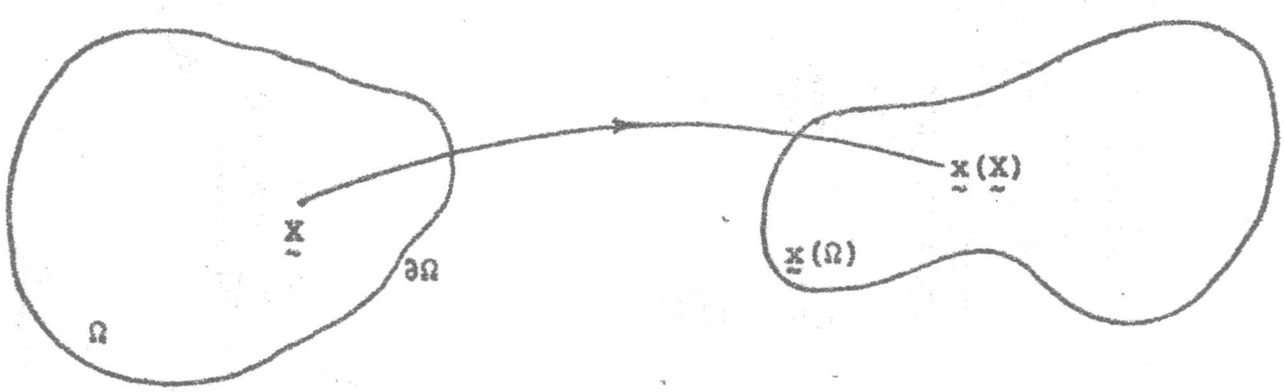

Figure 2

2. Dans le cas tri-dimensionelle la déformation est donnée par une fonction $\underset{\sim}{x}:\Omega \to R^3$, où $\Omega \subset R^3$ est un ouvert borné avec bord $\partial\Omega$ (cf. Figure 2).

Par raison de simplicité nous supposons qu'il n'y a aucune force externe et que le corps élastique est homogène. Alors les équations d'équilibre sont les équations d'Euler pour la fonctionelle

$$I(\underset{\sim}{x}) = \int_\Omega W(\nabla \underset{\sim}{x}(\underset{\sim}{X}))d\underset{\sim}{X},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial X^\alpha}\left(\frac{\partial W}{\partial x^i_{,\alpha}}\right) = 0, \qquad \underset{\sim}{X} \in \Omega, \quad i = 1,2,3, \tag{5}$$

où W est la fonction d'énergie interne. Dans un problème aux limites de déplacement on doit trouver $\underset{\sim}{x}(\cdot)$ satisfaisant (5) et

$$\underset{\sim}{x}(\underset{\sim}{X}) = \underset{\sim}{x}_0(\underset{\sim}{X}), \quad \underset{\sim}{X} \in \partial\Omega, \tag{6}$$

ou $\underset{\sim}{x}_0$ est une fonction donnée.

Suivant Hadamard [9] considérons un plan $\underset{\sim}{X}.\underset{\sim}{N} = k$ de R^3. Il existe une fonction continue $\underset{\sim}{x}(\underset{\sim}{X})$ satisfaisant

$$\nabla\underset{\sim}{x}(\underset{\sim}{X}) = G \quad \text{quand} \quad \underset{\sim}{X}.\underset{\sim}{N} < k,$$

$$\nabla\underset{\sim}{x}(\underset{\sim}{X}) = F \quad \text{quand} \quad \underset{\sim}{X}.\underset{\sim}{N} > k,$$

où F,G sont des matrices constantes 3×3, si et seulement si il existe $\underset{\sim}{\lambda} \in R^3$ tel que

$$F - G = \underset{\sim}{\lambda} \otimes \underset{\sim}{N}.$$

(Par définition, $(\underset{\sim}{\lambda} \otimes \underset{\sim}{N})^i_\alpha = \lambda^i N_\alpha$.) Une telle fonction $\underset{\sim}{x}$ est une solution faible de (5) si et seulement si le saut de la contrainte à travers le plan est zéro:

$$\left[\frac{\partial W}{\partial F^i_\alpha} N_\alpha\right] = \left(\frac{\partial W}{\partial F^i_\alpha}(G + \underset{\sim}{\lambda} \otimes \underset{\sim}{N}) - \frac{\partial W}{\partial F^i_\alpha}(G)\right) N_\alpha = 0. \tag{7}$$

Si W satisfait <u>la condition de l'ellipticité forte</u>

$$\frac{\partial^2 W(F)}{\partial F^i_\alpha \partial F^j_\beta} \lambda^i \lambda^j N_\alpha N_\beta > 0 \quad \text{si} \quad \underset{\sim}{\lambda} \otimes \underset{\sim}{N} \neq 0 \tag{8}$$

alors

$$\left[\frac{\partial W}{\partial F^i_\alpha} N_\alpha\right] = \int_0^1 \frac{\partial^2 W}{\partial F^i_\alpha \partial F^j_\beta} (G + t\underset{\sim}{\lambda} \otimes \underset{\sim}{N}) \lambda^i \lambda^j N_\alpha N_\beta dt = 0$$

implique que $\underset{\sim}{\lambda} \otimes \underset{\sim}{N} = 0$, c'est-à-dire $F = G$. Donc la condition (8) empêche les solutions $\underset{\sim}{x}$ de (5) pour lesquelles $\nabla \underset{\sim}{x}$ saute à travers un plan (cf. Knowles & Sternberg [10]). Pour des résultats d'existence de solutions de (5) sous des conditions impliquant (8) voir [4].

<u>Question</u>: Est-ce-que l'ellipticité forte implique que toute solution faible de (5) est C^1?

La réponse à cette question est non, et nous donnons un exemple ci-dessous. Pour le motiver rappelons un argument de [5,6]. Considérons un cube (du matérial) a côté $\frac{1}{\lambda}$. Le cube est soumis à la déformation

$$\underset{\sim}{x}(\underset{\sim}{X}) = F(\lambda)\underset{\sim}{X},$$

où $F(\lambda)$ est une matrice 3×3 avec $|F(\lambda)| = \lambda$. Le diamètre du cube déformé est de l'ordre de l'unité. L'énergie de la déformation est égale à

$$\frac{W(F(\lambda))}{\lambda^3}.$$

Donc on peut obtenir d'un cube infinitesimal une ligne de longueur 1 avec énergie finie si et seulement si

$$\frac{W(F)}{|F|^3} \not\to \infty \quad \text{quand} \quad |F| \to \infty. \tag{9}$$

Une fonction d'énergie interne satisfaisant (8) et (9) est

$$W(F) = \operatorname{tr}(FF^T) + h(\det F), \tag{10}$$

où $h:(0,\infty) \to \mathbb{R}$ est convexe, $h(1) = 0$, $h(\delta) \to \infty$ quand $\delta \to 0+$, $\frac{h(\delta)}{\delta} \to \infty$ quand $\delta \to \infty$.

Soient $\Omega = \{\underset{\sim}{X}: |\underset{\sim}{X}| < 1\}$, $R = |\underset{\sim}{X}|$, $r = |\underset{\sim}{x}|$. Considérons les déformations radiales ayant la forme

$$\underset{\sim}{x}(\underset{\sim}{X}) = \frac{r(R)}{R}\underset{\sim}{X}. \tag{11}$$

Alors

$$I = I(r) = 4\pi \int_0^1 \left[R^2 r'^2 + 2r^2 + R^2 h\left(\frac{r^2 r'}{R^2}\right)\right] dR,$$

et (5) réduit à une équation différentielle ordinaire pour $r(R)$. On considère la condition au bord

$$r(1) = \lambda > 0. \tag{12}$$

On a toujours la solution triviale $r = \lambda R$, pour laquelle $\nabla\underset{\sim}{x} = \lambda I$. On peut démontrer que λR est la seule solution radiale si $\lambda \leq 1$, mais que si $\lambda > 1$ est suffisament grand alors λR ne minimise pas $I(r)$ et la fonction $\bar{r}(R)$ minimisante satisfait $\bar{r}(0) > 0$. Cette solution représente la formation d'un trou, et la déformation tri-dimensionelle correspondante est réellement une solution faible de (5). Le démonstration de ces faits seront publiées ailleurs. On trouve dans Giusti & Miranda [8] un exemple d'une solution discontinue pour un système non linéaire fortment elliptique, mais leur exemple ne s'applique pas à (5).

Remerciements

Le travail décrit ici a été subventionné par le C.N.R.S. Je veux remercier tous mes amis du Laboratoire d'Analyse Numérique et Fonctionelle de l'Université Pierre et Marie Curie pour leur intérêt et leur aimable hospitalité.

Références

[1] S.S. Antman, Ordinary differntial equations of nonlinear elasticity II: Existence and regularity theory for conservative boundary value problems, Arch. Rat. Mech. Anal. 61 (1976) 353 - 393.

[2] S.S. Antman & H. Brezis, The existence of orientation - preserving deformations in nonlinear elasticity, in "Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium Vol II", ed. R.J. Knops, Pitman, London, 1978.

[3] G. Aubert & R. Tahraoui, Théorèmes d'existence pour des problèmes du calcul des variations du type

$$\text{Inf} \int_0^L f(x,u'(x))dx \quad \text{et} \quad \text{Inf} \int_0^L f(x,u(x),u'(x))dx,$$

J. Differential Eqns, à paraître.

[4] J.M. Ball, Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity, Arch. Rat. Mech. Anal. 63 (1977) 337 - 403.

[5] J.M. Ball, Constitutive inequalities and existence theorems in nonlinear elastostatics, in "Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt symposium Vol 1" ed. R.J. Knops, Pitman, London, 1977.

[6] J.M. Ball, Finite time blow-up in nonlinear problems, in "Nonlinear Evolution Equations" ed. M.G. Crandall, Academic Press, New York, 1978.

[7] I. Ekeland & R. Témam, "Analyse convexe et problèmes variationnels", Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[8] E. Giusti & M. Miranda, Un esempio di soluzioni discontinue per un problema di minimo relativo ad un integrale regolare del calcola della variazioni, Boll. Unione Mat. Ital. Ser. 4, 1 (1968) 219 - 226.

[9] J. Hadamard, "Leçons sur la propagation des ondes", Hermann, Paris, 1903.

[10] J.K. Knowles & E. Sternberg, On the failure of ellipticity and the emergence of discontinuous deformation gradients in plane finit elasticity, J. of Elasticity 8 (1978) 329 - 380.

[11] L.C. Young, "Lectures on the calculus of variations", Saunders, Philadelphia, 1969.