Cônes asymptotiques et invariants de quasi-isométrie pour des espaces métriques hyperboliques

Cornelia DRUŢU*

UFR de Mathématiques et UMR 8524 au CNRS,
Université de Lille I, F–59655 Villeneuve d'Ascq, France
drutu@agat.univ-lille1.fr
et
Max-Planck-Institut für Mathematik
Vivatsgasse 7, D-53111 Bonn, Allemagne
drutu@mpim-bonn.mpg.de

1 Introduction

On s'intéresse aux invariants de quasi-isométrie des espaces métriques. On rappelle que deux espaces métriques X et Y sont dits *quasi-isométriques* s'il existe une fonction $f : X \to Y$ et des constantes $L \geq 1$ et $C \geq 0$ telles que :
• $\frac{1}{L}d(x,y) - C \leq d(f(x), f(y)) \leq Ld(x,y) + C$;
• $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$ tel que $d(y, f(x)) \leq C$.
Une telle fonction f s'appelle *une quasi-isométrie.*

On étudie des invariants de quasi-isométrie en utilisant les cônes asymptotiques. Pour un espace métrique donné, (X, d), un cône asymptotique représente, en gros, une image de X vu d'infiniment loin. Il apparaît comme une limite, en quelque sorte, d'une suite d'espaces de la forme $(X, \varepsilon_n \cdot d)$ avec $\varepsilon_n \to 0$.

Dans des classes particulières d'espaces métriques on a des topologies et même des distances qui nous permettent de définir une telle limite. Pour des espaces métriques compacts on a la distance de Hausdorff. Gromov étend la distance de Hausdorff [Gr_1, §6] à une pseudo-distance sur la classe des espaces propres qu'il appelle la pseudo-distance de Hausdorff modifiée. Cette pseudo-distance devient une vraie distance sur des classes d'espaces métriques "proches" l'un de l'autre. Mais une définition de l'espace limite d'une suite de type $(X, \varepsilon_n d)$, $\varepsilon_n \to 0$, avec la distance de Hausdorff modifiée présente l'inconvénient qu'il faut demander a priori à l'espace limite d'être propre, ce qui est une condition assez restrictive.

* *Mots clés* : cône asymptotique, espace hyperbolique, inégalité isopérimétrique ; *Classification math.* : 20F10, 53C23.

M. Gromov ([Gr_1] ,[Gr_3, §2]) et van den Dries et Wilkie [VDW] ont introduit, à l'aide de l'analyse non standard, une nouvelle notion d'espace limite d'une suite d'espaces métriques de type $(X, \varepsilon_n d)$, $\varepsilon_n \to 0$, qu'ils ont appelé cône asymptotique (voir la Section 2 pour plus de détails). Dans [Gr_3, §2.A], M. Gromov démontre que l'hyperbolicité d'un espace métrique géodésique est équivalente au fait que les cônes asymptotiques sont des arbres réels. Cette équivalence nous permet de donner dans cet article une preuve très courte du fait que si dans un espace métrique on a une inégalité isoperimétrique sous-quadratique, alors l'espace est hyperbolique (Section 3). Il y a plusieurs preuves de cette affirmation données par Y. Olshanskii [Ol], par P. Papasoglu [P_1] et par B. Bowditch [Bow_1]. Dans sa preuve, B. Bowditch met en évidence que seulement deux propriétés de la fonction de remplissage sont requises (voir Section 2.2.B pour la définition de la fonction de remplissage). Il appelle ces deux propriétés l'axiome (A1) et l'axiome (A2). Dans notre preuve nous utilisons seulement une de ces deux propriétés - l'axiome (A2).

On démontre aussi l'équivalence, pour un espace géodésique, de la propriété d'hyperbolicité avec la propriété que le rayon le remplissage est logarithmique. En fait il suffit de demander que le rayon le remplissage soit sous-linéaire pour avoir l'hyperbolicité de l'espace et l'ordre logarithmique du rayon de remplissage. Les mêmes affirmations restent vraies si on remplace le rayon de remplissage par l'étranglement des courbes (voir Section 3 pour la définition).

Remerciements

Je tiens à remercier Brian Bowditch et Panagiotis Papasoglu pour des discussions très intéressantes concernant le problème du remplissage et les espaces hyperboliques.

2 Définitions

2.1 Cône asymptotique

Soit (X, d) un espace métrique. Pour construire un cône asymptotique de X on utilise un *ultrafiltre non principal*, c'est-à-dire une mesure de probabilité $\omega : P(\mathbb{N}) \to \{0, 1\}$ finiment additive telle que $\omega(A) = 0, \forall A \subset \mathbb{N}$, A finie. Une propriété immédiate de ω est que si on a une partition de $\mathbb{N}$, $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_n$, alors il existe $i \in \{1, 2, \dots n\}$ tel que $\omega(A_i) = 1$, $\omega(A_j) = 0, \forall j \neq i$. On dit que ω *choisit toujours une parmi un nombre fini de possibilités.*

Dans un espace topologique Y on définit la *ω-limite d'une suite* $(a_n) \subset Y$ comme étant un élément $a \in Y$ tel que pour tout voisinage V de a, $\omega(\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in V\}) = 1$. La ω-limite d'une suite est unique si Y est séparé. Toute suite dans un compact a une ω-limite [Bou, I.9.1]. En particulier toute suite numérique bornée a une ω-limite.

On fixe un ultrafiltre non principal ω, une suite (x_n^0) dans X qu'on appelle *suite des centres d'observation*, et une suite de scalaires $(d_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ divergeant vers $+\infty$. On pose

$$\mathcal{S} := \{(y_n) \in X^{\mathbb{N}} \mid \exists c_y \text{ tel que } d(x_n^0, y_n) \leq c_y \cdot d_n,\ \forall n \in \mathbb{N}\} .$$

On introduit dans $\mathcal{S}$ la relation d'équivalence

$$(y_n) \sim (z_n) \Leftrightarrow \lim_\omega \frac{d(y_n, z_n)}{d_n} = 0.$$

On appelle l'espace quotient $\mathcal{S}/\sim$ *le ω-cône asymptotique de X par rapport aux centres d'observation* (x_n^0) *et aux scalaires* (d_n) et on le note $X_\omega((x_n^0),(d_n))$. C'est un espace métrique avec la métrique

$$d([y_n],[z_n]) = \lim_\omega \frac{d(y_n,z_n)}{d_n}.$$

Tout cône asymptotique $X_\omega((x_n^0),(d_n))$ est un espace métrique complet ([VDW], [P$_2$, §1]). Si (X,d) est un espace géodésique alors tout $X_\omega((x_n^0),(d_n))$ est un espace géodésique [P$_2$, §1].

On dit qu'un sous-ensemble A de X_ω est un *ensemble limite* s'il existe une suite d'ensembles $A_n \subset X$ telle que $A = \{[x_n] \mid x_n \in A_n \ \omega\text{-p.s.}\}$. On note $A = [A_n]$.

2.2 Invariants de remplissage

2.2.A Disque de remplissage et aire de remplissage d'une courbe

Dans trois situations différentes on peut donner un sens aux notions de courbe fermée, de longueur d'une courbe fermée, de disque et d'aire de remplissage. Dans la suite on note D^2 le disque unité du plan et S^1 son bord, et λD^2, λS^1 leurs images par l'homothétie de centre l'origine et de facteur λ.

I) Si V est une variété riemannienne, on considère les courbes fermées lipschitziennes $c : S^1 \to V$ avec la notion de longueur classique. Un *disque qui remplit la courbe* c est une application lipschitzienne $\sigma : D^2 \to X$ qui étend c. *L'aire de remplissage de* c, $Ar(c)$, est le minimum des aires des disques qui remplissent c.

II) Soit Γ un groupe de présentation finie et $< S|R >$ une présentation de Γ, avec S famille de générateurs et R famille de relations. On note F_S le groupe libre engendré par S, N_R le sous-groupe distingué de F_S engendré par R. Alors Γ est isomorphe à F_S/N_R. Soit π la projection canonique de F_S dans Γ.

Les *courbes fermées dans* Γ sont les courbes fermées dans le graphe de Cayley associé à Γ. On peut aussi les voir comme des mots $w \in F_S$ dans l'alphabet S tels que $\pi(w)$ est l'élément neutre de Γ. *La longueur d'une telle courbe fermée* w est sa longueur en tant que mot dans l'alphabet S. Pour toute écriture de w dans F_S sous la forme $w = \prod_{i=1}^{p} \gamma_i r_i \gamma_i^{-1}, \gamma_i \in F_S, r_i \in R \cup R^{-1}$, on appelle *disque qui remplit* w l'ensemble de tous les éléments distincts de Γ représentés par des sous-mots de $\prod_{i=1}^{p} \gamma_i r_i \gamma_i^{-1}$ contenant la première lettre, ou, ce qui est équivalent, l'ensemble de tous les sommets du graphe de Cayley représentés par de tels mots.

On définit *l'aire de remplissage de* w, $Ar(w)$, comme le plus petit p tel que

$$w = \prod_{i=1}^{p} \gamma_i r_i \gamma_i^{-1}, \gamma_i \in F_S, r_i \in R \cup R^{-1}\ .$$

III) Si X est un espace métrique géodésique, on peut aussi définir une notion d'aire de remplissage d'une courbe ([Gr$_3$, §5.F], voir aussi [Bow$_2$, §2.3]). On considère seulement des courbes lipschitziennes fermées, $c : S^1 \to X$, avec la notion de longueur habituelle.

On considère une partition quelconque de D^2 en des polygones homéomorphes au disque. Chacun des polygones dans cette partition a le bord composé par des arcs de S^1 et par des segments. Soit $\wp$ l'ensemble des sommets de cette partition. On appelle *partition de c dans X* une application injective σ de l'ensemble $\wp$ dans X telle que $\sigma|_{\wp\cap S^1} \equiv c|_{\wp\cap S^1}$. On peut joindre dans X par des arcs géodésiques les paires de points qui sont des images de sommets de $\wp$ joints par une arête. On obtient ainsi le même nombre de contours que dans la partition de D^2 considérée.

La maille d'une partition σ, notée $\mathrm{Mesh}(\sigma)$, est la longueur maximale des contours qui composent la partition.

On définit $\mathrm{Mesh}(c, \nu) := \inf\{\mathrm{Mesh}(\sigma) \mid \sigma : \wp \to X$ partition de c, $\wp$ ensemble de sommets d'une partition de D^2 en ν parties $\}$.

Remarque 2.2.1 ([Gr$_3$], §5.F). *Pour toute partition $\sigma : \wp \to X$ d'une courbe fermée en ν parties, il existe une partition en ν parties, $\sigma' : \wp' \to X$, ayant $Mesh(\sigma') \leq Mesh(\sigma)$ et card $\wp' \leq N$, où N est une constante qui ne dépend que de ν.*

On fixe $\mu > 0$. Pour toute courbe lipschitzienne fermée c, on appelle *μ-disque qui remplit c dans X* l'image d'une partition σ de c ayant la maille au plus μ.

On note $P(c, \mu)$ le ν minimal tel que $\mathrm{Mesh}(c, \nu) \leq \mu$. Pour $\ell > \mu$, on note $P(\ell, \mu) := \sup\{P(c, \mu) \mid c$ courbe lipschitzienne de longueur $\leq \ell\}$.

La *μ-aire de remplissage de la courbe c* est $Ar_\mu(c) := P(c, \mu)$.

Dans les trois situations précédentes on a donc choisi un ensemble de courbes fermées Ω et on a défini une *fonction aire* $Ar : \Omega \to \mathbb{R}_+^* \cup \{\infty\}$. Chacune des fonctions aire définies précédemment possède la propriété suivante [Bow$_2$, §2.3 et chapitre 5]:

(**IQ**) (**inégalité du quadrilatère**) Soit c une courbe fermée dans X qu'on sépare en quatre arcs consécutifs $c(S^1) = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 \cup \alpha_4$. Alors, si on note $d_1 := dist(\alpha_1, \alpha_3)$ et $d_2 := dist(\alpha_2, \alpha_4)$, on a

$$Ar(c) \geq k d_1 d_2 - k'(d_1 + d_2 + 1),$$

ou k et k' sont des constantes universelles.

Dans les cas **I** et **II** précédents on peut aussi définir *la fonction rayon* comme $r : \Omega \to \mathbb{R}_+^*$, $r(c) = \inf\{\max_{x\in D} dist(x, c(S^1)) \mid D$ disque qui remplit $c\}$. Dans le cas **III**, on fixe d'abord $\mu > 0$ et on définit la *μ-fonction rayon* comme $r_\mu : \Omega \to \mathbb{R}_+^*$, $r_\mu(c) = \inf\{\max_{x\in D} dist(x, c(S^1)) \mid D$ μ-disque qui remplit $c\}$.

Remarque 2.2.2. *Soit $c : S^1 \to X$ une courbe lipschitzienne fermée, $\sigma : \wp \to X$ une partition de c et $D = \sigma(\wp)$ le disque qui remplit c corréspondant. Alors il existe $\wp' \subset \wp$ telle que :*

(a) l'ensemble $\wp'$ est l'ensemble de sommets d'une partition de D^2 ayant les propriétés suivantes

(a_1) le bord d'un polygone de la partition ne peut avoir en commun avec S^1 qu'un point de $\wp'$ ou deux points de $\wp'$ ou deux points de $\wp'$ et un arc de S^1 compris entre les deux points ;

(a_2) l'intersection non-vide des bords de deux polygones ne peut être qu'un point de $\wp'$ ou deux points de $\wp'$ et le segment les joignant ;

(b) la partition $\sigma' = \sigma|_{\wp'}$ vérifie Mesh$(\sigma') \leq$ Mesh(σ).

Preuve. On va modifier la partition de D^2 d'ensemble de sommets $\wp$ de sorte que les conditions (a_1) et (a_2) soient vérifiés et que, à chaque modification, la longueur des contours ne croît pas.

Supposons d'abord que la partition de D^2 d'ensemble de sommets $\wp$ contient un polygone Π dont le bord intersecte S^1 en plusieurs composantes connexes (voir Figure 1). On exclut bien sur le cas admis ou l'intersection consiste en deux points.

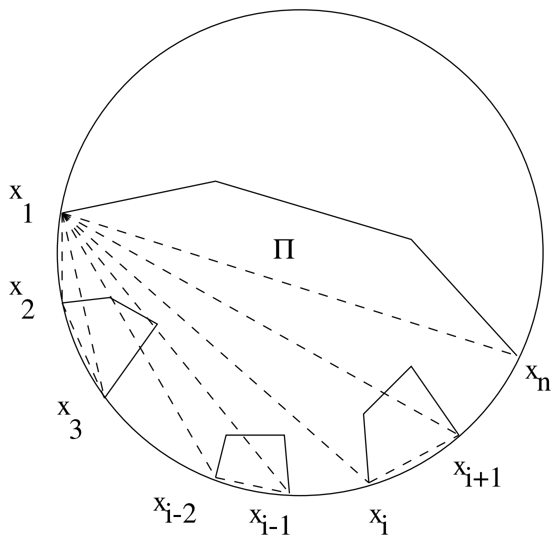

Figure 1:

Soient $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ l'ensemble des extremités des composantes connexes de $\partial\Pi \cap S^1$ considérés dans le sens de parcours anti-horaire. On peut supposer que si x_i et x_{i+1} ou x_n et x_1 sont les extremités de deux composantes connexes distinctes, la partie de $\partial\Pi$ comprise entre ces deux points et qui n'intersecte plus S^1 est un segment. Sinon on peut remplacer cette partie de $\partial\Pi$ par le segment respectif, quitte à enlever quelques sommets de $\wp$ (Figure 1). Puis on remplace dans la partition le polygone Π par l'ensemble de polygones partitionant Π obtenus en joignant x_1 tour à tour à $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

En répétant l'operation ci-dessus un nombre fini de fois, on élimine tous les polygones qui ne vérifient pas (a_1).

Supposons que deux polygones Π_1 et Π_2 ont la propriété que $\partial\Pi_1 \cap \partial\Pi_2$ a au moins deux composantes connexes (Figure 2).

Soit $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ l'ensemble des extremités des composantes connexes de $\partial\Pi_1 \cap \partial\Pi_2$ considérés dans le sens de parcours anti-horaire de $\partial\Pi_2$.

On remplace la partie de $\partial\Pi_1$ comprise entre y_1 et y_m et qui contient $\partial\Pi_1 \cap \partial\Pi_2$ par le segment $[y_1, y_m]$, quitte à éliminer quelques sommets de $\wp$. On fait la même chose pour le deuxième contour polygonal, $\partial\Pi_2$ (Figure 2).

En répétant cette deuxième opération un nombre fini de fois, on élimine toutes les paires de polygones qui ne vérifient pas (a_2). $\diamondsuit$

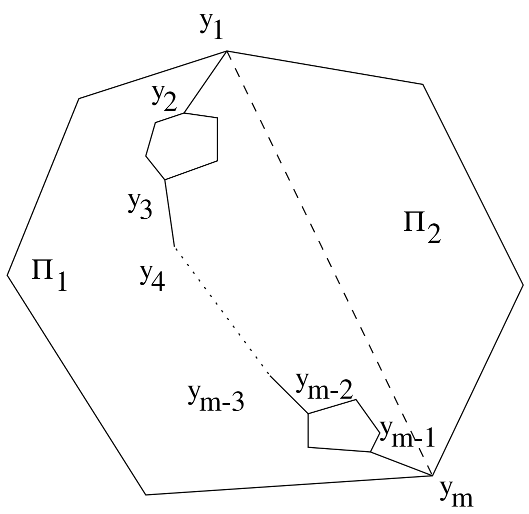

Figure 2:

2.2.B Fonction de remplissage et fonction rayon de remplissage

Chaque fois qu'on dispose d'une notion de courbe fermée, de longueur, de disque et d'aire de remplissage d'une telle courbe, on peut définir une *fonction de remplissage ou une fonction isoperimétrique* comme étant la fonction

$$A : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*,\ A(\ell) := \sup\{Ar(c) \mid c \text{ courbe fermée de longueur } \leq \ell\}.$$

Dans le cas **II** on appelle aussi cette fonction *la fonction de Dehn du groupe* Γ avec la présentation fixée. Dans le cas **III** pour chaque $\mu > 0$ on obtient une fonction de remplissage qu'on note A_μ. On peut aussi définir *la fonction rayon de remplissage*, d'une manière similaire, comme

$$r : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*,\ r(\ell) := \sup\{r(c) \mid c \text{ courbe fermée de longueur } \leq \ell\}\ .$$

Evidemment les fonctions de remplissage A et r dépendent de la présentation choisie pour le groupe, dans le cas **II**, et du $\mu > 0$ choisi dans le cas **III**, mais seulement dans une certaine mesure. On introduit une relation d'équivalence entre fonction numériques.

Pour $f_j : D_j \to C$ $(j = 1, 2)$, on dit que la fonction f_1 est *majorée* par f_2, et on note $f_1 \prec f_2$, s'il existe une constante $c > 0$ telle que $f_1(t) \leq c\tilde{f}_2(ct + c) + ct + c$ pour tout $t \in D_1$, où $\tilde{f}_2(t) = \sup\{f_2(x) \mid x \in D_2 \text{ et } x \leq t\}$. On dit que f_1, f_2 sont équivalentes, et on note $f_1 \sim f_2$, si $f_1 \prec f_2$ et $f_2 \prec f_1$.

Proposition 2.2.3. *[[Al], [Ge]] Si le groupe* Γ *a deux présentations finies* $\Gamma =< S_1|R_1 >$ *et* $\Gamma =< S_2|R_2 >$ *et* $A_1(n), A_2(n)$ *sont les fonctions de Dehn associées aux deux présentations alors* $A_1(n)$ *et* $A_2(n)$ *sont équivalentes.*

Dans le cas d'un espace métrique, il suffit de supposer que l'espace X vérifie la propriété

$$(P_{\mu_0}) \quad A_\mu(\ell) < +\infty, \forall \ell \geq \mu \geq \mu_0\ ,$$

pour un $\mu_0 > 0$. On apelle un tel espace, avec la terminologie de [Bow$_2$, Chapitre 8, §1], *espace μ_0-simplement connexe.* Pour tout espace μ_0-simplement connexe on prend le

$\mu_0 \geq 1$ minimal pour lequel on a cette propriété. Il n'est pas difficile de voir alors que toutes les fonctions $A_\mu(\ell)$ avec $\mu \geq \mu_0$ sont équivalentes et que la même chose est vraie pour toutes les fonctions $r_\mu(\ell)$ avec $\mu \geq \mu_0$. On appelle A_{μ_0} *la fonction de remplissage de l'espace* X et r_{μ_0} *la fonction rayon de remplissage de* X.

Désormais on suppose que tous les espaces métriques considérés sont μ_0-simplement connexes.

Remarques 2.2.4. *(1) Si deux espaces métriques X et Y sont quasi-isométriques, leurs fonctions de remplissage sont équivalentes.*

(2) Soit Γ un groupe de présentation finie muni de la métrique des mots. En le considérant en tant qu'espace métrique géodésique, pour tout $\mu \geq 3$ on peut définir une fonction de remplissage A_μ. Toute fonction A_μ est équivalente à la fonction de Dehn de Γ.

(3) Si X est une variété riemannienne sa fonction de remplissage en tant que variété est équivalente à sa fonction de remplissage en tant qu'espace métrique.

(4) Les trois affirmations précédentes restent vraies pour la fonction rayon de remplissage.

Pour plus de détails voir [Dr$_1$].

3 Espaces métriques hyperboliques : cônes asymptotiques et invariants de quasi-isométrie

On rappelle la définition d'un espace hyperbolique ([Gr$_2$, §1], [GH]). Soit (X, d) un espace métrique. Si a, x, y sont trois points dans X, *le produit de Gromov de x et y par rapport à a* est $(x.y)_a := \frac{1}{2}(d(a, x) + d(a, y) - d(x, y))$.

On dit que X est *δ-hyperbolique*, où $\delta > 0$, s'il existe $a \in X$ tel que

$$(3.1) \qquad (x.y)_a \geq \min\{(x.z)_a\,,\,(y.z)_a\} - \delta,\ \forall x, y, z \in X\ .$$

Quitte à doubler la constante δ, on peut remplacer le point a dans (3.1) par n'importe quel point de X et la relation reste vraie.

On dispose aussi d'une autre définition de l'hyperbolicité qui a un sens pour les espaces métriques géodésiques. Soit X un tel espace. Soit Δ un triangle géodésique de sommets $x_1, x_2, x_3 \in X$. On construit dans le plan euclidien un tripode $T = (O, x_1', x_2', x_3')$ tel que $d(O, x_i') = (x_j.x_k)_{x_i}$, où $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Soit f l'application de Δ dans T qui est une isométrie sur chaque arête du triangle. On dit que Δ est *δ-mince* si $d(x, y) < \delta$ pour toute paire (x, y) telle que $f(x) = f(y)$. Une propriété équivalente est que tout point sur une arête du triangle est à une distance d'au plus δ' de la réunion des deux autres arêtes, où δ' ne dépend que de δ.

On dit que l'espace géodésique X est *δ-hyperbolique* si tout triangle géodésique dans X est δ-mince. Un espace métrique géodésique 0-hyperbolique s'appelle *arbre réel.*

Dans chacune des deux définitions précédentes, on appelle δ la constante d'hyperbolicité de X. Dans la suite on va considérer automatiquement la deuxième définition pour les espaces métriques géodésiques et la première définition dans les autres cas.

On a le résultat suivant :

Proposition 3.1 ([Gr$_3$], §2.A). **(i)** *Si* (X,d) *est un espace* δ*-hyperbolique alors tout cône asymptotique* $X_\omega((x_n^0),(d_n))$ *est* 0*-hyperbolique.*

(ii) *Si* (X,d) *est un espace géodésique on a même plus :* (X,d) *est* δ*-hyperbolique si et seulement si* $X_\omega((x_n^0),(d_n))$ *est un arbre réel, pour tout* ω*,* (x_n^0) *et* (d_n)*.*

Pour une preuve plus détaillée voir [Dr$_2$]. Une variante de l'implication directe de la Proposition 3.1, (ii), a été énoncée et démontrée dans [GH, Chapitre 2, §1, Proposition 11].

Une conséquence immédiate de la Proposition 3.1 est le fait que le remplissage sous-quadratique implique l'hyperbolicité. Avant de démontrer ceci on énonce un résultat simple dont on aura besoin par la suite.

Lemme 3.2. *Soit* Y *un espace métrique géodésique qui n'est pas un arbre. Alors il existe dans* Y *un triangle géodésique* Δ *tel que deux arêtes distinctes arbitraires de* Δ *ont en commun seulement un sommet.*

Preuve. Puisque Y n'est pas un arbre il existe un triangle géodésique abc dans Y tel qu'un point p sur une arête n'est pas contenu dans la réunion des deux autres arêtes. Supposons $p \in [a,b]$. Soit x le point sur $[p,a]$ le plus proche de p contenu dans $[a,c]\cup[b,c]$ et y le point sur $[p,b]$ le plus proche de p contenu dans $[a,c]\cup[b,c]$. L'arc de $[a,c]\cup[b,c]$ compris entre x et y est ou bien une géodésique ou bien une réunion de deux géodésiques, selon que c est contenu dans cet arc ou pas. Dans le premier cas on note z un point quelconque à l'intérieur de l'arc, dans le deuxième cas on note z le point commun de $[x,c]$ et $[y,c]$ le plus éloigné de c. Le triangle $[xyz]$ est le triangle géodésique cherché. $\diamondsuit$

Proposition 3.3. *Soit* X *un espace métrique géodésique,* Ω *l'ensemble de toutes les courbes fermées lipschitziennes dans* X*,* $Ar:\Omega\to\mathbb{R}_+^*$ *une fonction qui vérifie la propriété (IQ) du paragraphe 2.2.A et* $A:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*$ *la fonction définie par* $A(\ell) := \sup\{Ar(c) \mid c\in\Omega,\ c \text{ de longueur au plus } \ell\}$*.*

Si $A(\ell)=o(\ell^2)$ *alors* X *est un espace hyperbolique.*

Preuve. On démontre que tout cône asymptotique de X est un arbre réel. Supposons qu'un cône asymptotique $X_\omega((x_n^0),(d_n))$ n'est pas un arbre réel. Alors il existe dans ce cône un triangle géodésique $\Delta=[xyz]$ vérifiant la propriété du Lemme 3.2. Soit ℓ la longueur de Δ. On peut trouver une décomposition de Δ en quatre arcs consécutifs $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4$ tels que $d(\alpha_1,\alpha_3)>4\varepsilon>0,\ d(\alpha_2,\alpha_4)>4\varepsilon>0$. Le triangle Δ est l'ensemble limite d'une suite de triangles géodésiques (Δ_n) dans X, chaque Δ_n de longueur au plus $2\ell d_n$. Chaque arc α_i de Δ est l'ensemble limite d'une suite d'arcs α_i^n de Δ_n. De plus $d(\alpha_1^n,\alpha_3^n)>2\varepsilon d_n,\ d(\alpha_2^n,\alpha_4^n)>2\varepsilon d_n$ ω-presque sûrement. La propriété **(IQ)** implique alors que

$$Ar\,(\Delta_n) > \varepsilon^2 d_n^2 \geq \frac{\varepsilon^2}{4\ell^2}(long(\Delta_n))^2 \ \ \omega-\text{p.s.}$$

D'autre part $Ar\,(\Delta_n)\leq A(long(\Delta_n)) = o((long(\Delta_n))^2)$. On a obtenu une contradiction. $\diamondsuit$

Remarques 3.4. *(1) Une conséquence de la Proposition 3.3 et des résultats de [Gr_1, §6.8] est que, si* $Ar : \Omega \to \mathbb{R}_+^*$ *est une fonction aire et* $A : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ *la fonction de remplissage correspondante, l'hypothèse* $A(\ell) = o(\ell^2)$ *implique que* $A(\ell)$ *est du même ordre que* ℓ.

(2) Dans la Proposition 3.3 on peut remplacer l'ensemble Ω *des courbes lipschitziennes fermées par le sous-ensemble des triangles géodésiques.*

(3) Dans [Bow_2, §2.3] B. Bowditch définit " l'énergie d'une courbe fermée" dans un espace métrique géodésique, qu'on peut considérer comme une définition alternative pour la notion d'aire de remplissage. Dans la Proposition 3.3 on peut considérer comme fonction Ar ou bien l'aire de remplissage telle qu'on l'a définie dans la Section 2.2.A ou bien l'énergie. Les deux notions vérifient l'inégalité du quadrilatère - or cette inégalité est essentielle dans nos raisonnements.

La Proposition 3.1 permet aussi d'obtenir d'autres propriétés métriques équivalentes à l'hyperbolicité. Avant d'énoncer deux de ces propriétés on définit encore une fonction numérique. Soit (X, d) un espace métrique. Pour une courbe lipschitzienne fermée simple $c : S^1 \to X$ de longueur ℓ et pour un nombre $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ on peut définir le *λ-étranglement de la courbe* c comme étant $etr_\lambda(c) := \inf\{d(x, y) \mid x, y \in c(S^1)$ points qui coupent $c(S^1)$ en deux arcs de longueur au moins $\lambda\ell\}$. Alors pour $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ fixé on peut définir la fonction de *λ-étranglement* comme $etr_\lambda : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$,

$$etr_\lambda(\ell) := \sup\{etr_\lambda(c) \mid c \text{ courbe lipschitzienne fermée simple de longueur } \leq \ell\} .$$

Proposition 3.5. *Soit X un espace métrique géodésique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) X est hyperbolique ;

(2)(étranglement sous-linéaire) Il existe $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ *tel que* $etr_\lambda(\ell) = o(\ell)$ *;*

(3)(étranglement logarithmique) Pour tout $\lambda \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$, $etr_\lambda(\ell) = O(\log \ell)$.

Preuve. On démontre que (1) $\Rightarrow$ (3). Il est facile de voir que si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ alors $etr_{\lambda_1} \leq etr_{\lambda_2}$. Il suffit donc de montrer (3) pour $etr_{\frac{1}{4}}$. Soit ℓ suffisament grand et $c : S^1 \to X$ une courbe lipschitzienne fermée simple de longueur ℓ. On peut supposer que $etr_{\frac{1}{4}}(c) \geq M$, où M est une constante suffisamment grande. Pour simplifier on note $etr_{\frac{1}{4}}(c)$ par etr. On choisit trois points x, y, z sur $c(S^1)$ tels que les arcs compris entre x et y et entre y et z sont de longueur $\frac{\ell}{4}$. Alors l'arc compris entre x et z et qui ne contient pas y est de longueur $\frac{\ell}{2}$ et se trouve entièrement à l'extérieur de la boule $B(y, etr)$. Soit t le point sur cet arc qui minimise la distance à y. Un des deux sous-arcs $x-t$ et $z-t$ est de longueur au moins $\frac{\ell}{4}$. Supposons que c'est l'arc $x - t$. On remplace le point x par un point x' sur l'arc $x - y$ qui ne contient pas t tel que $d(y, x') = d(y, t)$. On a $d(x', t) \geq etr$. La Proposition 4.7 de [Bow_2] implique que la longueur de l'arc $x' - t$ est plus grande que $e^{\theta \cdot etr}$, où θ est une constante qui ne dépend que de la constante d'hyperbolicité de X. D'où $\frac{\ell}{2} \geq e^{\theta \cdot etr}$, ce qui implique que $etr \leq \frac{1}{\theta} \log \ell$.

Il est évident que (3) $\Rightarrow$ (2). Il reste à démontrer que (2) $\Rightarrow$ (1). Supposons qu'un espace métrique X vérifie la propriété (2) et qu'un de ses cônes asymptotiques, $X_\omega((x_n^0), (d_n))$, n'est pas un arbre. Le Lemme 3.2 implique qu'il existe un triangle Δ dans ce cône, de longueur ℓ et tel que $etr_\lambda(\Delta) \geq 2\varepsilon > 0$. Le triangle Δ est l'ensemble limite d'une suite de triangles (Δ_n) dont les longueurs sont d'ordre ℓd_n et avec $etr_\lambda(\Delta_n) \geq \varepsilon d_n$. Ceci contredit la propriété (2) de l'espace. ◊

Remarque 3.6. *On peut encore affaiblir l'hypothèse* (2)*, suffisante pour l'hyperbolicité, en remplaçant la fonction* etr_λ *par sa restriction à l'ensemble des triangles géodésiques.*

L'estimation dans la propriété (3) ne peut pas être ameliorée. Pour voir cela il suffit de regarder dans le modèle du demi-espace de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$ le cercle $\mathcal{C}$ de rayon R dans le plan horizontal $t = 1$. Sa longueur dans la métrique de Poincaré est $2\pi R$. Pour tout $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $etr_\lambda(\mathcal{C})$ est d'ordre $\log R$.

On peut obtenir un résultat similaire concernant le rayon de remplissage.

Proposition 3.7. *Soit* X *un espace géodésique hyperbolique* μ_0*-simplement connexe et* $r : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ *la fonction rayon de remplissage dans cet espace. On a l'équivalence suivante :*

(1) X *est hyperbolique ;*

(2)(rayon de remplissage sous-linéaire) $r(\ell) = o(\ell)$ *;*

(3)(rayon de remplissage logarithmique) $r(\ell) = O(\log \ell)$.

Preuve. On démontre que (1) $\Rightarrow$ (3). Soit c une courbe dans X de longueur ℓ suffisamment grande. On suppose que $r(c) \geq R$, où R est une constante suffisamment grande. Soit D un disque qui remplit c tel que $r := \max_{x \in D} d(x, c(S^1)) \leq r(c) + 1$. On choisit $x_0 \in D$ tel que $d(x_0, c(S^1)) = r$.

D'après la Proposition 4.5 de [Bow$_2$], il existe $L > 0$ et $\zeta > 0$ tels que si deux points y, z se trouvent à l'extérieur de la boule $B(x, r_0 + r)$ et leurs projections sur $\overline{B(x, r_0)}$ sont à distance au moins L l'une de l'autre, alors toute courbe entre x et y qui est entièrement à l'extérieur de la boule $B(x, r_0 + r)$ est de longueur au moins $Le^{\zeta r}$. Dans la suite on veut appliquer ce résultat. Soit ρ le diamètre de la projection de $c(S^1)$ sur $B\left(x_0, \frac{3r}{4}\right)$. On a deux cas : (a) $\rho \geq L$ et (b) $\rho < L$.

(a) Dans ce cas, d'après la Proposition citée, $\ell \geq Le^{\zeta \frac{r}{4}}$ ce qui implique $r(c) \leq r \leq \frac{4}{\zeta} \log \ell$.

(b) Soient t et s deux points quelconques dans $c(S^1)$ et p et q leurs projections respectives sur $B\left(x_0, \frac{3r}{4}\right)$. Alors $d(t, s) \leq d(t, p) + d(p, q) + d(q, s) \leq \frac{r}{2} + L$. Ceci implique qu'un disque de remplissage D' obtenu en joignant un point $t \in c(S^1)$ fixé au point $s \in c(S^1)$ qui parcourt $c(S^1)$ a $\max_{x \in D'} d(x, c(S^1))$ au plus $\frac{r}{4} + \frac{L}{2}$. Si R (et par conséquent $r(c)$) est suffisamment grand, on a la suite d'inégalités $\frac{r}{4} + \frac{L}{2} \leq \frac{r(c)}{4} + \frac{1}{4} + \frac{L}{2} < r(c)$. Ceci contredit la minimalité de $r(c)$.

Il reste à démontrer (2) $\Rightarrow$ (1), puisque (3) $\Rightarrow$ (2) est évident. Soit X un espace géodésique vérifiant (2). On démontre que tous ses cônes asymptotiques sont des arbres. Soit $X_\omega((x_n^0), (d_n))$ un tel cône asymptotique et soit $\Delta = [xyz]$ un triangle géodésique quelconque dans X_ω. Il suffit de démontrer que $[x, y] \subset [x, z] \cup [y, z]$. Soit $\Delta_n = [x_n y_n z_n]$ la suite de triangles géodésiques qui a Δ comme ensemble limite.

On considère $\mu_0 \geq 1$ minimal tel que X soit μ_0-simplement connexe. Dans la suite tous les disques de remplissage qu'on considère sont des μ_0-disques et en parlant de rayon de remplissage on sous-entend qu'il s'agit du μ_0-rayon.

Soit $c_n : S^1 \to \Delta_n$ la paramétrization selon la longueur de l'arc. Soient $\bar{x}_n = c^{-1}(x_n)$, $\bar{y}_n = c^{-1}(y_n)$, $\bar{z}_n = c^{-1}(z_n)$. Dans la suite du raisonnement, pour deux points $a, b \in S^1$ on note $a - b$ le plus petit arc de S^1 ayant a et b comme extrémités.

Soit $\sigma_n : \wp_n \to X$ une partition de c_n dans X avec $\text{Mesh}(\sigma_n) \leq \mu_0$ telle que le μ_0-disque $D_n = \sigma_n(\wp_n)$ qui remplit c_n vérifie $\max_{x\in D_n} d(x, \Delta_n) \leq r(\Delta_n) + 1$. On note $r_n := \max_{x\in D_n} d(x, \Delta_n)$. D'après la Remarque 2.2.2, on peut supposer que $\wp_n$ est l'ensemble de sommets d'une partition vérifiant les conditions (a_1) et (a_2).

Soit $\Re_n$ l'ensemble de dimension 1 obtenu comme reunion de Δ_n avec les géodésiques entre chaque paire de sommets de $\sigma_n(\wp_n)$ images de sommets de $\wp_n$ joints par un segment dans la partition de D^2. On étend σ_n à $\bar{\sigma}_n : \Re_n \to X$ par $\bar{\sigma}_n|_{S^1} = c_n$, $\bar{\sigma}_n|_{[\alpha,\beta]} : [\alpha, \beta] \to [\sigma_n(\alpha), \sigma_n(\beta)]$ homothétie, pour toute paire de sommets α, β de $\wp_n$ joints par un segment dans la partition de D^2.

Soit γ une courbe sans autointersections contenue dans $\Re_n$ ayant les extremités a et b dans l'intersection de $\wp_n$ avec $\bar{x}_n - \bar{z}_n$ et $\bar{y}_n - \bar{z}_n$ respectivement. On appelle *la distance combinatorielle de* γ *à* $\bar{z}_n$ le nombre de polygones de la partition situés entre γ, l'arc $\bar{z}_n - a$ et l'arc $\bar{z}_n - b$. Soit γ_n la courbe située à distance combinatorielle maximale de $\bar{z}_n$ telle que tous les points de $\bar{\sigma}_n(\gamma_n)$ soient à distance $2r_n$ de $[x_n, z_n] \cup [y_n, z_n]$. On montre que ses extremités doivent être $\bar{x}_n$ et $\bar{y}_n$. On suppose le contraire, par exemple que $a_n \neq \bar{x}_n$ (Figure 3). Soit a'_n le sommet de $\wp_n$ sur l'arc $\bar{x}_n - a_n$ le plus proche de a_n. L'arc $a_n - a'_n$ est contenu dans le bord d'un polygone Π de la partition. Soit γ'_n la courbe obtenue à partir de γ_n en lui rajoutant l'adhérence de $\partial\Pi \cap Int\ D^2$ et éventuellement en éffaçant la partie commune entre la ligne polygonale qu'on rajoute et γ_n. La courbe γ'_n a les mêmes propriétés que γ_n et se trouve à une distance combinatorielle de $\bar{z}_n$ plus grande que γ_n.

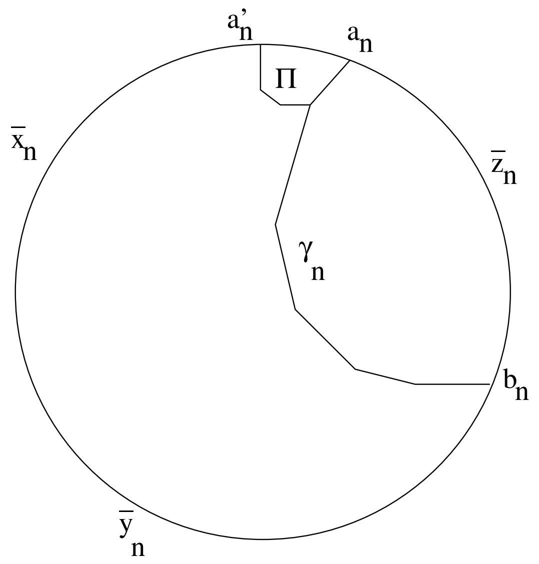

Figure 3:

On conclut que γ_n a les extremités $\bar{x}_n$ et $\bar{y}_n$. Aussi, γ_n peut contenir seulement des arcs de S^1 inclus dans l'arc $\bar{x}_n - \bar{y}_n$. Car si elle contenait un arc de $\bar{x}_n - \bar{z}_n$ par exemple, un raisonnement similaire à celui ci-dessus impliquerait qu'il existe une courbe γ'_n avec les mêmes propriétés que γ_n mais situé à une distance combinatorielle de $\bar{z}_n$ plus grande. Donc γ_n est formé par des sous-arcs de l'arc $\bar{x}_n - \bar{y}_n$ et par des segments dont l'intérieur est contenu dans l'intérieur de D^2. Chaque segment $[\alpha, \beta] \subset \gamma_n$ d'intérieur contenu dans l'intérieur de D^2 est aussi contenu dans le bord d'un polygone Π de la partition qui n'est pas dans le domaine delimité par γ_n et les arcs $\bar{z}_n - \bar{x}_n$ et $\bar{z}_n - \bar{y}_n$. Le choix de γ_n implique qu'il existe un point $p \in \partial\Pi$ tel que $d(\bar{\sigma}_n(p), [x_n, z_n] \cup [y_n, z_n]) > 2r_n$. Alors $d(\bar{\sigma}_n(p), [x_n, y_n]) \leq r_n$. Ceci implique que $d(\bar{\sigma}_n(\alpha), [x_n, y_n]) \leq r_n + \mu_0$ et $d(\bar{\sigma}_n(\beta), [x_n, y_n]) \leq r_n + \mu_0$.

Soit $\mathbf{V}_n = \{v_0^{(n)}, v_1^{(n)}, \dots v_{k_n}^{(n)}\}$ l'ensemble des sommets de $\bar{\sigma}_n(\gamma_n)$, $v_0^{(n)} = x_n$, $v_{k_n}^{(n)} = y_n$. Le raisonnement précédent implique que chaque sommet $v_i^{(n)}$ est ou bien contenu dans $[x_n, y_n]$ ou bien à distance au plus $r_n + \mu_0$ de $[x_n, y_n]$. Soit $w_i^{(n)}$ une projection de $v_i^{(n)}$ sur $[x_n, y_n]$, $i \in \{0, 1, \dots k_n\}$. Alors $w_0^{(n)}, w_1^{(n)}, \dots w_{k_n}^{(n)}$ est un chemin discret de x_n à y_n contenu dans $[x_n, y_n]$ tel que $d(w_i^{(n)}, w_{i+1}^{(n)}) \leq 2r_n + 2\mu_0 + d(v_i^{(n)}, v_{i+1}^{(n)}) \leq 2r_n + 3\mu_0$. Ceci implique la suite d'inclusions $[x_n, y_n] \subset V_{2r_n+3\mu_0}(\{w_0^{(n)}, w_1^{(n)}, \dots w_{k_n}^{(n)}\}) \subset V_{3r_n+4\mu_0}(\gamma_n) \subset V_{5r_n+4\mu_0}([x_n, z_n] \cup [y_n, z_n])$. Ici et dans la suite $V_\varepsilon(A)$ signifie le ε-voisinage de l'ensemble A dans un espace métrique X qui le contient, c'est-à-dire l'ensemble $\{x \in X \mid d(x, A) \leq \varepsilon\}$.

D'autre part on sait que $r_n \leq r(c_n) + 1 = o(long(\Delta_n)) = o(d_n)$. Ceci et l'inclusion $[x_n, y_n] \subset V_{5r_n+4\mu_0}([x_n, z_n] \cup [y_n, z_n])$ obtenue ci-dessus impliquent que dans le cône asymptotique $X_\omega((x_n^0), (d_n))$ on a l'inclusion $[x, y] \subset [x, z] \cup [y, z]$. $\diamondsuit$

L'estimation $r(\ell) = O(\log \ell)$ est la meilleure possible. L'exemple illustrant ceci est toujours le cercle $\mathcal{C}$ de rayon R dans le plan horizontal $t = 1$ du modèle du demi-espace de $\mathbb{H}^3$. Pour tout disque qui remplit ce cercle, soit P un des points du disque qui se trouvent sur l'axe verticale A passant par le centre du cercle. Un point quelconque Q de $\mathcal{C}$ se trouve à une distance de P d'au moins $d(Q, A)$. Or la distance $d(Q, A)$ est la même pour tout $Q \in \mathcal{C}$ et est d'ordre $\log R$.

References

[Al] J. Alonso, *"Inégalités isopérimétriques et quasi-isométries"*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série 1, **311** (1991), 761-764.

[Bou] N. Bourbaki, "Topologie générale", quatrième édition, Hermann, Paris, 1965.

[Bow$_1$] B. Bowditch, *"A short proof that a sub-quadratic isoperimetric inequality implies a linear one"*, Mich. J. Math **42** (1995), 103-107.

[Bow$_2$] B. Bowditch, *"Notes on Gromov's hyperbolicity criterion for path metric spaces"*, "Group Theory from a Geometrical Viewpoint", E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovski (eds), ICTP Trieste, World Scientific Publishing Co. 1991.

[Dr$_1$] C. Druţu, *"Remplissage dans des réseaux de Q-rang* 1 *et dans des groupes résolubles"*, Pacific J. Math **185**(1998), 269-305.

[Dr$_2$] C. Druţu, *"Réseaux des groupes de Lie semisimples et invariants de quasi-isométrie"*, thèse, Université de Paris-Sud XI.

[Ge] S. Gersten, *"Isoperimetric and Isodiametric Functions of Finite Presentations"*, "Geometric Group Theory"(vol. 1), G. A. Niblo, M. A. Roller (eds), Proceedings of the Symposium held in Sussex, LMS Lecture Notes Series 181, Cambridge University Press 1991.

[GH] E. Ghys, P. de la Harpe (eds), "Sur les groupes hyperboliques d'après M. Gromov", Birkhäuser, 1990.

[Gr_1] M. Gromov, *"Groups of polynomial growth and expanding maps"*, Publ. Math. IHES **53** (1981), 53-73.

[Gr_2] M. Gromov, *"Hyperbolic groups"*, "Essays in group theory", S.Gersten (ed), MSRI Publ. **8**, Springer (1987), 75-265.

[Gr_3] M. Gromov, *"Asymptotic Invariants of Infinite Groups"*, Geometric Group Theory(vol. 2), G. A. Niblo, M. A. Roller (eds), Proc. of the Symposium held in Sussex, LMS Lecture Notes Series 181, Cambridge University Press 1991.

[Ol] A. Yu. Olshanski, *"Hyperbolicity of groups with subquadratic isoperimetric inequalities"*, Intl. J. Alg. Comp. **1**(1991), 282-290.

[P_1] P. Papasoglu, *" On the subquadratic isoperimetric inequality"*, Geometric group theory, R. Charney, M. Davis, M. Shapiro (eds), de Gruyter, Berlin-New-York, 1995.

[P_2] P. Papasoglu, *" On the asymptotic cone of groups satisfying a quadratic isoperimetric inequality "*, J. Diff. Geometry **44**(1996), 789-806.

[VDW] L. van den Dries, A. J. Wilkie, *"On Gromov's theorem concerning groups of polynomial growth and elementary logic"*. J. of Algebra **89** (1984), 349-374.