

Multi-level Monte-Carlo Methoden für stochastische partielle Differentialgleichungen

Diplomarbeit
von
Simone Graubner

betreut von
Prof. Dr. Klaus Ritter



Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe Stochastik

Freitag, 05. September 2008

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe. Außerdem versichere ich, dass ich die Inhalte dieser Arbeit in keinem anderen als diesem Prüfungsverfahren angemeldet habe.

Darmstadt, den 05. September 2008

.....
Simone Graubner

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Die Multi-level Monte-Carlo Methode	8
2.1	Die klassische Monte-Carlo Methode	8
2.2	Die Multi-level Monte-Carlo Methode	11
2.2.1	Das Verfahren	11
2.2.2	Fehler und Kosten	12
2.3	Monte-Carlo Methoden am Beispiel stochastischer Differentialgleichungen	16
2.3.1	Die klassische Euler-Monte-Carlo Methode	17
2.3.2	Die Multi-level Euler-Monte-Carlo Methode	18
3	Starke Approximation semilinearer stochastischer partieller Differentialgleichungen	21
3.1	Differenzenverfahren	23
3.1.1	Quasi-lineare parabolische stochastische partielle Differentialgleichungen	23
3.1.2	Die Stochastische Burgers-Gleichung	28
3.2	Spektral-Galerkin Verfahren	30
3.2.1	Starke Approximation mit impliziten Eulerverfahren	31
4	Schwache Approximation semilinearer stochastischer partieller Differentialgleichungen	34
4.1	Differenzenverfahren	34
4.1.1	Klassische Monte-Carlo Methode	34
4.1.2	Multi-level Monte-Carlo Methode	35
4.1.3	Konvergenzordnungen im Falle quasi-linearer parabolischer stochastischer Differentialgleichungen	36
4.1.4	Konvergenzordnungen im Vergleich	41
4.2	Spektral-Galerkin Verfahren	44
4.2.1	Klassische Monte-Carlo Methode	44
4.2.2	Multi-level Monte-Carlo Methode	47
4.2.3	Konvergenzordnungen im Vergleich	48
4.2.4	Explizite Lösung	49
5	Simulationen	51
5.1	Stochastische gewöhnliche Differentialgleichungen	52
5.2	Differenzenverfahren	57

5.2.1	Quasi-lineare parabolische stochastische partielle Differentialgleichungen	57
5.2.2	Stochastische Burgers-Gleichung	68
5.3	Spektral-Galerkin Verfahren	71
5.3.1	Wärmeleitungsgleichung mit Raum-Zeit Weißem Rauschen	71
5.3.2	Wärmeleitungsgleichung mit nuklearem Rauschen	74
5.4	Parameter und Vergleichswerte	77

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einer Multi-level Monte-Carlo Methode nach Giles [7]. Monte-Carlo Methoden finden Anwendung im Bereich der Finanzmathematik, aber auch in den Naturwissenschaften, wenn zufällige Ereignisse eine Rolle spielen, beispielsweise in der Physik, wenn es um die Beschreibung der Bewegung von Teilchen geht. Ziel der Monte-Carlo Methoden ist die Approximation von Erwartungswerten etwa von der Form $E[F(u)]$ mit einer Zufallsvariable u auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) mit Werten in einem Banachraum B und einem Funktional $F : B \rightarrow \mathbb{R}$. Hierbei kann u zum Beispiel die Lösung einer stochastischen Differentialgleichung sein.

Die hier studierten Monte-Carlo Methoden beruhen auf Approximationen u^n der Zufallsvariable u mit $n \in \mathbb{N}$, wobei diese Approximationen aus numerischen Verfahren hervorgehen. Man hat dabei die Vorstellung, dass die Approximationen u^n mit wachsendem n besser werden.

In dieser Arbeit wird die klassische Monte-Carlo Methode und die Multi-level Monte-Carlo Methode zunächst in abstrakter Form für eine beliebige Zufallsvariable u und beliebige Approximationen vorgestellt. Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ erhält man eine klassische Monte-Carlo Methode \hat{Y}_{MC} auf der Basis unabhängiger Kopien von u^n ([8], [6]).

Die Multi-level Monte-Carlo Methode \hat{Y}_{ML} verwendet eine Kombination von Approximationen verschiedener Levels aus einer Folge von Approximationen $(u_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$, die beispielsweise eine Teilfolge von $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sein kann. Der entscheidende Punkt ist, dass u und die Approximationen u_l aus ein und derselben Zufallsvariable w hervorgehen müssen, d.h. es gibt messbare Abbildungen φ und φ_l , so dass

$$u = \varphi w, \quad u_l = \varphi_l w$$

für alle $l \in \mathbb{N}_0$. Ist u die Lösung einer stochastischen Differentialgleichung, so entspricht die Zufallsvariable w einer Brownschen Bewegung und die Approximationen u_l können beispielsweise aus einem Eulerverfahren hervorgehen, welches auf den Inkrementen der Brownschen Bewegung basiert.

Der gesuchte Erwartungswert $E[F(u)]$ kann durch

$$E[F(u_L)] = E[F(u_0)] + \sum_{l=1}^L E[F(u_l) - F(u_{l-1})] \quad (1.1)$$

approximiert werden. Hierbei sind u_l und u_{l-1} über die Zufallsvariable w gekoppelt, denn sie sind Komponenten der Zufallsvariable

$$(u_l, u_{l-1}) = (\varphi_l w, \varphi_{l-1} w) : \Omega \rightarrow B \times B.$$

Die Erwartungswerte auf der rechten Seite von (1.1) werden durch klassische Monte-Carlo Methoden approximiert.

Für die Multi-level Monte-Carlo Methoden als auch für die klassischen Monte-Carlo Methoden werden, unter gewissen Voraussetzungen an die zugrunde liegenden Approximationen und das Funktional F , Konvergenzordnungen bewiesen. In der vorliegenden Arbeit stellen Konvergenzordnungen stets nur obere Schranken für den Fehler in Abhängigkeit der Kosten dar.

Des Weiteren wird in dieser Arbeit der Einsatz von Monte-Carlo Methoden zur schwachen Approximation der Lösung gewisser stochastischer partieller Differentialgleichungen behandelt. Auch hier wird untersucht, inwiefern die Multi-level Monte-Carlo Methode eine Verbesserung zu klassischen Monte-Carlo Methode darstellt.

Wir betrachten semilineare SPDEs

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = & \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + f(t, x, u(t, x)) + \frac{\partial}{\partial x} g(t, x, u(t, x)) \\ & + \sigma(t, x, u(t, x)) \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} W(t, x), \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, 1] \end{aligned}$$

mit Dirichlet-Randbedingungen, Anfangswert u_0 , sowie einem Brownschen Blatt W und geeigneten Abbildungen f , g und σ . Man spricht auch von SPDEs mit Raum-Zeit Weißem Rauschen. Diese Klasse von SPDEs enthält unter anderem auch stochastische Wärmeleitungsgleichungen und die stochastische Burgersgleichung ([3], [9], [4], [21]). Diese Gleichungen finden in der Fluid- und Thermodynamik Anwendung. Die Wärmeleitungsgleichung dient als Modell für die Ausbreitung eines gelösten Stoffes durch Diffusion oder als Modell für die Wärmeleitung in einem Körper. Ihre Lösung $u(t, x)$ beschreibt die Konzentration des Stoffes bzw. die Temperatur des Körpers zu einem Zeitpunkt t an einem Ort x . Die Burgersgleichung hingegen ist ein Modell für eindimensionale Strömungen von inkompressiblen newtonschen Flüssigkeiten oder Gasen. Die Lösung u kann als Strömungsgeschwindigkeit interpretiert werden ([20], [12]).

Um starke Approximationen der Lösungen solcher SPDEs zu erhalten, werden zwei verschiedene Ansätze betrachtet. Zuerst wird ein Differenzenverfahren nach Gyöngy ([10], [11], [1]) verwendet, welches sich aus einer Semidiskretisierung der räumlichen Komponente und einer Diskretisierung der Zeit durch ein Eulerverfahren zusammensetzt. Für eine Unterklasse der semilinearen SPDEs, den quasi-linearen SPDEs, sind starke Konvergenzordnungen des Differenzenverfahrens bekannt. Die stochastische Burgersgleichung gehört allerdings nicht zu diesen quasi-linearen SPDEs und entsprechende Konvergenzordnungen des Differenzenverfahrens sind nicht bekannt. Aufgrund von Abschätzungen der Semidiskretisierung der Burgersgleichung können allerdings Vermutungen geäußert werden.

Als zweiter Ansatz wird ein Spektral-Galerkin Verfahren nach Müller-Gronbach und Ritter ([17], [18]) verwendet. Dieser Ansatz ist für stochastische Wärmeleitungsgleichungen anwendbar, wobei hier sogar $x \in [0, 1]^d$ für $d \in \mathbb{N}$ sein darf. Wir betrachten für $d = 1$ Wärmeleitungsgleichungen mit Raum-Zeit Weißem Rauschen (ID) und für $d \in \mathbb{N}$ mit

nuklearem Rauschen (TC), das heißt der Kovarianz-Operator Q der Brownschen Bewegung ist ein Spurklasse-Operator. Auch für die Spektral-Galerkin Verfahren sind starke Konvergenzordnungen bekannt.

Diese starken Approximationen können als Grundlage für die klassischen Monte-Carlo Methoden und die Multi-level Monte-Carlo Methoden dienen. Für die Monte-Carlo Methoden, die das Differenzenverfahren verwenden, erhält man unter der Bedingung $u_0 \in C^3([0, 1])$ und unter geeigneten Annahmen an das Funktional F Konvergenzordnung $\frac{1}{8}$ für die klassische Monte-Carlo Methode und Konvergenzordnung $\frac{1}{6}$ für die Multi-level Monte-Carlo Methode. Mit dem Spektral-Galerkin Verfahren als Grundlage erhält man für pfadunabhängige lipschitz-stetige Funktionale F im Fall (ID) Konvergenzordnung $\frac{1}{4}$ für die klassische Monte-Carlo Methode und fast Konvergenzordnung $\frac{1}{2}$ für die Multi-level Methode. Im Fall (TC) erhält man unter geeigneten Annahmen an den Kovarianz-Operator Q Konvergenzordnung $\frac{1}{3}$ für die klassische Monte-Carlo Methode und $\frac{1}{2}$ für die Multi-level Methode. Auch hier ist wieder zu beachten, dass diese Konvergenzordnungen lediglich obere Schranken für den Fehler darstellen.

Es wurden klassische Monte-Carlo Methoden und Multi-level Monte-Carlo Methoden für verschiedene Gleichungen und zugrunde liegenden Verfahren implementiert. Hierbei wurden die Fehlerabschätzungen der starken Approximationen verwendet um die Parameter der Monte-Carlo Methoden zu wählen. Es ist mit dieser Grundlage allerdings nur möglich die Parameter bis auf Konstanten optimal zu wählen. Ein Vergleich der verschiedenen Monte-Carlo Methoden zeigt, dass stets die Multi-level Methode eine bessere Konvergenzrate besitzt als die klassische Monte-Carlo Methode. Besitzt die klassische Monte-Carlo Methode eine bessere Konvergenzrate als aus der Theorie mindestens hervorgesagt, so ist auch stets die Konvergenzrate der Multi-level Methode entsprechend größer als die Theorie besagt. Auch am Beispiel der stochastischen Burgersgleichung schneidet die Multi-level Methode deutlich besser ab als die klassische Monte-Carlo Methode. Da die theoretischen Fehlerschranken der Monte-Carlo Methoden in allen Fällen nur obere Schranken sind, ist der experimentelle Teil dieser Arbeit in seiner Wichtigkeit nicht zu unterschätzen.

2 Die Multi-level Monte-Carlo Methode

Monte-Carlo Methoden können benutzt werden, um Integrale zu approximieren. Insbesondere können damit Erwartungswerte von Zufallsvariablen näherungsweise berechnet werden. Wir betrachten zunächst eine Zufallsvariable u auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) mit Werten in einem Banachraum $(B, \|\cdot\|)$. Unser Ziel ist es, eine möglichst gute Näherung für den Erwartungswert von $F(u)$ für ein Funktional $F : B \rightarrow \mathbb{R}$ zu berechnen, wobei wir stets die Integrierbarkeit von $F(u)$ voraussetzen.

Allgemein ist eine Monte-Carlo Methode eine Zufallsvariable \hat{Y} auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ mit Werten in \mathbb{R} .

Definition 2.1 *Der Fehler einer Monte-Carlo Methode \hat{Y} (zur Berechnung von $E[F(u)]$) ist definiert durch*

$$e(\hat{Y}) = \left(\tilde{E} \left[\left(\hat{Y} - E[F(u)] \right)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.1)$$

Hierbei ist der Erwartungswert von $F(u)$ ein Erwartungswert bezüglich des Wahrscheinlichkeitsraums (Ω, \mathcal{A}, P) . Dagegen ist der äußere Erwartungswert in Bezug auf den Monte-Carlo Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ zu verstehen.

Für den Fehler gilt

$$e(\hat{Y}) = \left(\tilde{V}[\hat{Y}] + \left(\tilde{E}[\hat{Y}] - E[F(u)] \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.2)$$

er setzt sich also aus der Varianz der Monte-Carlo Methode und dem Quadrat der Differenz $\tilde{E}[\hat{Y}] - E[F(u)]$, die als Bias bezeichnet wird, zusammen. Gilt $\tilde{E}[\hat{Y}] = E[F(u)]$, so ist der Bias gleich Null und die Methode heißt erwartungstreu.

2.1 Die klassische Monte-Carlo Methode

Es sei $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Approximationen für u , das heißt die u^n sind Zufallsvariablen mit Werten in B . Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass u und die u^n Zufallsvariablen auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) sind. Wir setzen außerdem stets die quadratische Integrierbarkeit von $F(u^n)$ voraus.

Man stellt sich vor, dass die Folge $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem geeigneten Sinne gegen u konvergiert und die Approximationen u^n mit wachsendem n besser werden. Im Idealfall ist $u^n = u$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies wird jedoch im Kontext dieser Arbeit der Ausnahmefall sein. Für ein festes n ist die klassische Monte-Carlo Methode definiert durch

$$\hat{Y}_{MC} := \hat{Y}_{MC}^{n,N} := N^{-1} \sum_{j=1}^N F(u^{(n,j)}), \quad (2.3)$$

mit unabhängigen Kopien $u^{(n,1)}, \dots, u^{(n,N)}$ von u^n , das bedeutet die $u^{(n,j)}$ sind unabhängig und besitzen dieselbe Verteilung wie u^n .

Aufgrund des Starken Gesetzes der Großen Zahlen betrachten wir eine Realisierung $\hat{Y}_{MC}(\omega)$ mit $\omega \in \Omega$ als Approximation von $E[F(u)]$.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass alle u^n und $u^{(n,j)}$ Zufallsvariablen auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) sind. Die beiden Erwartungswerte in der Definition 2.1 des Fehlers einer Monte-Carlo Methode beziehen sich daher auf denselben Wahrscheinlichkeitsraum und müssen hier nicht mehr unterschiedlich gekennzeichnet werden. Im Allgemeinen ist die klassische Monte-Carlo Methode nicht erwartungstreu. Für ihren Fehler gilt

$$\begin{aligned} e(\hat{Y}_{MC}) &= \left(V[\hat{Y}_{MC}] + \left(E[\hat{Y}_{MC}] - E[F(u)] \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(N^{-1} V[F(u^n)] + \left(E[F(u^n)] - F(u) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Für den Spezialfall $u^n = u$ gilt allerdings die Erwartungstreue. Der Fehler reduziert sich dann zu

$$e(\hat{Y}_{MC}) = \left(N^{-1} V[F(u)] \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.5)$$

Für die Kosten einer Monte-Carlo Methode \hat{Y} soll hier kein Berechenbarkeitsmodell angegeben werden. Dazu sei auf [2] verwiesen. Wir definieren die Kosten $C(\hat{Y})$ einer Monte-Carlo Methode \hat{Y} als die Anzahl der Aufrufe eines idealen Zufallszahlengenerators, die für die Simulation einer Realisierung von \hat{Y} notwendig sind. Als Beispiel betrachten wir die klassische Monte-Carlo Methode (2.3). Falls n Aufrufe eines Zufallszahlengenerators für die Berechnung von u^n benötigt werden, so gilt $C(\hat{Y}_{MC}^{n,N}) = Nn$.

Für zwei Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen schreiben wir $a_n \preceq b_n$, falls $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n/b_n < \infty$. Außerdem schreiben wir $a_n \asymp b_n$, falls $a_n \preceq b_n$ und $b_n \preceq a_n$.

Definition 2.2 *Eine Folge von Monte-Carlo Methoden $(\hat{Y}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt Konvergenzordnung $\alpha > 0$, falls gilt*

$$e(\hat{Y}^n) \preceq \left(C(\hat{Y}^n) \right)^{-\alpha}. \quad (2.6)$$

Zu beachten ist hierbei, dass bei dieser Definition der Konvergenzordnung nur eine obere Schranke für den Fehler gegeben ist. Besitzt eine Folge von Monte-Carlo Methoden die Konvergenzordnung α , so ist es möglich, dass sie außerdem Konvergenzordnung β mit $\beta > \alpha$ besitzt, in jedem Fall besitzt sie Konvergenzordnung β für alle $0 < \beta < \alpha$.

Satz 2.1 Sei $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, für die es positive Konstanten α und c gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(i) \quad |E[F(u^n) - F(u)]| \leq c n^{-\alpha}$$

$$(ii) \quad V[F(u^n)] \leq c$$

$$(iii) \quad C(F(u^n)) \leq c n$$

Dann besitzt die Folge $(\hat{Y}_{MC}^{n, N_n})_{n \in \mathbb{N}}$ von klassischen Monte-Carlo Methoden mit

$$N_n := n^{2\alpha}$$

Konvergenzordnung

$$\frac{\alpha}{1+2\alpha} . \quad (2.7)$$

Beweis: Wegen (i) und (ii) gilt für den Fehler von $\hat{Y}_{MC} = \hat{Y}_{MC}^{n, N_n}$

$$\begin{aligned} e(\hat{Y}_{MC}) &= \left(N_n^{-1} V[F(u^n)] + (E[F(u^n) - F(u)])^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (c N_n^{-1} + c^2 n^{-2\alpha})^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

Für die Kosten $C(\hat{Y}_{MC})$ der Monte-Carlo Methode gilt

$$C(\hat{Y}_{MC}) \leq c N_n n = c n^{1+2\alpha} = c N_n^{1+\frac{1}{2\alpha}} .$$

Durch Umformen erhält man $n \geq (c^{-1} C(\hat{Y}_{MC}))^{\frac{1}{1+2\alpha}}$ und $N_n \geq (c^{-1} C(\hat{Y}_{MC}))^{\frac{2\alpha}{1+2\alpha}}$. Schließlich gibt es eine Konstante $c' > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} e(\hat{Y}_{MC}) &\leq (c N_n^{-1} + c^2 n^{-2\alpha})^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(c (c^{-1} C(\hat{Y}_{MC}))^{-\frac{2\alpha}{1+2\alpha}} + c^2 (c^{-1} C(\hat{Y}_{MC}))^{-\frac{2\alpha}{1+2\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c' C(\hat{Y}_{MC})^{-\frac{\alpha}{1+2\alpha}} . \end{aligned}$$

□

Für jedes $\alpha > 0$ ist die Konvergenzordnung $\frac{\alpha}{1+2\alpha} \in (0, \frac{1}{2})$. Durch die Multi-level Methode soll diese Konvergenzordnung verbessert werden. Dabei werden die Varianz und der Bias der Methode reduziert.

2.2 Die Multi-level Monte-Carlo Methode

2.2.1 Das Verfahren

Die nun vorgestellte Multi-level Monte-Carlo Methode geht auf [7] zurück. Wir betrachten eine Folge $(u_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$ von Zufallsvariablen, die u approximieren, wobei wir die quadratische Integrierbarkeit von $F(u_l)$ voraussetzen. Die u_l und u seien Bilder einer Zufallsvariable $w : \Omega \rightarrow \bar{B}$ mit einem Banachraum \bar{B} , das heißt es gibt messbare Abbildungen $\varphi : \bar{B} \rightarrow B$ und $\varphi_l : \bar{B} \rightarrow B$, so dass

$$u = \varphi w, \quad u_l = \varphi_l w, \quad (2.8)$$

für alle $l \in \mathbb{N}_0$. Ist beispielsweise u die Lösung einer stochastischen Differentialgleichung, so entspricht die Zufallsvariable w der Brownschen Bewegung und die Approximationen u_l gehen aus einem Verfahren hervor, das auf den Inkrementen der Brownschen Bewegung basiert.

Im folgenden sei $L \in \mathbb{N}$. Um eine Näherung für $E[F(u)]$ zu erhalten, können wir eine Approximation von $E[F(u_L)]$ berechnen. Dieser Erwartungswert kann zerlegt werden in

$$E[F(u_L)] = E[F(u_0)] + \sum_{l=1}^L E[F(u_l) - F(u_{l-1})]. \quad (2.9)$$

Dabei sind die u_l und u_{l-1} in den Differenzen $F(u_l) - F(u_{l-1})$ über w gekoppelt, denn sie sind Komponenten der Zufallsvariable

$$(u_l, u_{l-1}) = (\varphi_l w, \varphi_{l-1} w) : \Omega \rightarrow B \times B.$$

Im folgenden seien $N_0, \dots, N_L \in \mathbb{N}$ und

$$w_l^{(j)}$$

seien für $j = 1, \dots, N_l$ und $l = 0, \dots, L$ unabhängige Kopien von w .

Wir verwenden $w_0^{(1)}, \dots, w_0^{(N_0)}$ zur Approximation von $E[F(u_0)]$ durch die klassische Monte-Carlo Methode

$$\hat{Y}_0 = N_0^{-1} \sum_{j=1}^{N_0} F(\varphi_0 w_0^{(j)}).$$

Ebenso verwenden wir für $l = 1, \dots, L$ die Zufallsvariablen $w_l^{(1)}, \dots, w_l^{(N_l)}$ zur Approximation von $E[F(u_l) - F(u_{l-1})]$ durch die klassische Monte-Carlo Methode

$$\hat{Y}_l = N_l^{-1} \sum_{j=1}^{N_l} \left(F(\varphi_l w_l^{(j)}) - F(\varphi_{l-1} w_l^{(j)}) \right).$$

Zusammengesetzt erhalten wir die Multi-level Monte-Carlo Methode

$$\hat{Y}_{ML} = \sum_{l=0}^L \hat{Y}_l \quad (2.10)$$

zur Approximation von $E[F(u)]$.

Aufgrund der Konstruktion sind

$$\hat{Y}_0, \dots, \hat{Y}_L$$

unabhängig und es gilt

$$E[\hat{Y}_0] = E[F(u_0)]$$

und

$$E[\hat{Y}_l] = E[F(u_l) - F(u_{l-1})]$$

für $l = 1, \dots, L$.

2.2.2 Fehler und Kosten

Nun soll der Fehler der Multi-level Methode betrachtet werden. Bezeichnen wir die Varianz von $F(u_0)$ mit V_0 und die Varianz von $F(u_l) - F(u_{l-1})$ für $l = 1, \dots, L$ mit V_l , so gilt aufgrund der Unabhängigkeit der \hat{Y}_l für die Varianz von \hat{Y}_{ML}

$$V[\hat{Y}_{ML}] = \sum_{l=0}^L N_l^{-1} V_l$$

und für den Fehler gilt

$$\begin{aligned} e(\hat{Y}_{ML}) &= \left(V[\hat{Y}_{ML}] + \left(E[\hat{Y}_{ML}] - E[F(u)] \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{l=0}^L N_l^{-1} V_l + \left(E[F(u_L) - F(u)] \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Die Kosten von \hat{Y}_l bezeichnen wir mit $C(\hat{Y}_l)$. Die Gesamtkosten $C(\hat{Y}_{ML})$ der Multi-level Methode \hat{Y}_{ML} sind dann

$$C(\hat{Y}_{ML}) = \sum_{l=0}^L C(\hat{Y}_l).$$

Die Kosten einer Zufallsvariable mit Werten in \mathbb{R}^2 definieren wir, in Analogie zu den Kosten einer Monte-Carlo Methode mit Werten in \mathbb{R} , als die Anzahl der Aufrufe eines

idealen Zufallszahlengenerators, die benötigt werden, um eine Simulation einer Realisierung zu berechnen.

Der folgende Satz beweist Schranken für den Fehler der Multi-level Methode in Abhängigkeit der Kosten unter bestimmten Annahmen an die zugrunde liegenden Approximationen u_l von u . Er geht aus Theorem 1 in [7] hervor. Hier ist allerdings die Formulierung geändert.

Satz 2.2 Sei $(u_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von Zufallsvariablen gemäß (2.8) für die es positive Konstanten $\alpha, \beta, c, \gamma \geq 0$ und ein $M \in \mathbb{N}$ mit $M \geq 2$ gibt, so dass für alle $l \in \mathbb{N}$ gilt

$$(i) \quad |E[F(u_l) - F(u)]| \leq c (M^l)^{-\alpha}$$

$$(ii) \quad V[F(u_l) - F(u_{l-1})] \leq c (M^l)^{-\beta}$$

$$(iii) \quad C(F(u_0)) \leq c \text{ und } C((F(u_l), F(u_{l-1}))) \leq c (M^l)^{1+\gamma}.$$

Mit der Wahl

$$N_l = \begin{cases} \lceil (M^l)^{-(1+\beta)/2} (M^L)^{2\alpha} \rceil, & \beta \geq 1 \\ \lceil (M^l)^{-(1+\beta)/2} (M^L)^{2\alpha+(1-\beta)/2} \rceil, & 0 < \beta < 1 \end{cases}$$

für $l = 0, \dots, L$ gilt für den Fehler und die Kosten der Multi-level Monte-Carlo Methoden $\hat{Y}_{ML} = \hat{Y}_{ML}^L$ mit $L \in \mathbb{N}$

$$e(\hat{Y}_{ML}) \preceq \begin{cases} C(\hat{Y}_{ML})^{-\frac{1}{2}}, & \beta > 1, \alpha \geq \frac{1}{2}, \gamma = 0 \\ C(\hat{Y}_{ML})^{-\frac{1}{2}} \log(C(\hat{Y}_{ML})), & \beta = 1, \alpha \geq \frac{1}{2}, \gamma = 0 \\ C(\hat{Y}_{ML})^{-\frac{\alpha}{\max(1+\gamma+2\alpha-\beta, 1+\gamma)}}, & \beta < 1, \alpha > 0, \gamma \geq 0. \end{cases}$$

Beweis: Wir betrachten zuerst den Fall $\beta = 1$ und wählen N_l wie oben. Wegen

$$N_l \leq (M^l)^{-1} (M^L)^{2\alpha} + 1$$

und (iii) gilt für die Kosten der Multi-level Methode

$$\begin{aligned} C(\hat{Y}_{ML}) &\leq c \sum_{l=0}^L N_l M^l \\ &\leq c \left(\sum_{l=0}^L (M^L)^{2\alpha} + \sum_{l=0}^L M^l \right) \\ &= c \left((M^L)^{2\alpha} (L+1) + \frac{M^{L+1} - 1}{M - 1} \right) \\ &\leq c \left((M^L)^{2\alpha} (L+1) + M^L \frac{M}{M-1} \right) \\ &\leq 2c (M^L)^{2\alpha} (L+1), \end{aligned} \tag{2.12}$$

denn $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Wegen $1 \leq 2 \log M$ gilt

$$L + 1 \leq 2L \leq 8\alpha L \log M = 4 \log \left((M^L)^{2\alpha} \right) \leq 4 \log \left((M^L)^{2\alpha} (L + 1) \right)$$

und da o.E. $c \geq \frac{1}{2}$ gewählt werden kann, folgt

$$\begin{aligned} (M^L)^{-\alpha} (L + 1)^{\frac{1}{2}} &\leq 4 \left((M^L)^{2\alpha} (L + 1) \right)^{-\frac{1}{2}} \log \left((M^L)^{2\alpha} (L + 1) \right) \\ &\leq 4(2c)^{\frac{1}{2}} \left(2c (M^L)^{2\alpha} (L + 1) \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\log(2c) + \log \left((M^L)^{2\alpha} (L + 1) \right) \right) \\ &= 4(2c)^{\frac{1}{2}} \left(2c (M^L)^{2\alpha} (L + 1) \right)^{-\frac{1}{2}} \log \left(2c (M^L)^{2\alpha} (L + 1) \right) \\ &\preceq C(\hat{Y}_{ML})^{-\frac{1}{2}} \log \left(C(\hat{Y}_{ML}) \right) \end{aligned}$$

mit (2.12), denn für $x \geq y \geq e^2$ gilt $x^{-\frac{1}{2}} \log x \leq y^{-\frac{1}{2}} \log y$ und o.E. $C(\hat{Y}_{ML}) \geq e^2$. Für den Fehler folgt mit (i) und (ii)

$$\begin{aligned} e(\hat{Y}_{ML}) &= \left(\sum_{l=0}^L N_l^{-1} V_l + (E[F(u_L) - F(u)])^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{l=0}^L M^l (M^L)^{-2\alpha} c (M^l)^{-1} + c^2 (M^L)^{-2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(c (M^L)^{-2\alpha} (L + 1) + c^2 (M^L)^{-2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\preceq (M^L)^{-\alpha} (L + 1)^{\frac{1}{2}} \\ &\preceq C(\hat{Y}_{ML})^{-\frac{1}{2}} \log \left(C(\hat{Y}_{ML}) \right). \end{aligned}$$

Als nächstes betrachten wir den Fall $\beta > 1$. Mit der entsprechenden Wahl von N_l können die Kosten nach oben abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} C(\hat{Y}_{ML}) &\leq c \sum_{l=0}^L N_l M^l \\ &\leq c \left((M^L)^{2\alpha} \sum_{l=0}^L (M^{\frac{1-\beta}{2}})^l + \sum_{l=0}^L M^l \right) \\ &\leq c \left((M^L)^{2\alpha} \frac{1 - (M^{\frac{1-\beta}{2}})^{L+1}}{1 - M^{\frac{1-\beta}{2}}} + M^L \frac{M}{M-1} \right) \\ &\preceq (M^L)^{2\alpha} \end{aligned}$$

und für den Fehler gilt

$$\begin{aligned}
e(\hat{Y}_{ML}) &= \left(\sum_{l=0}^L N_l^{-1} V_l + (E[F(u_L) - F(u)])^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(c (M^L)^{-2\alpha} \sum_{l=0}^L (M^{\frac{1-\beta}{2}})^l + c^2 (M^L)^{-2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\preceq (M^L)^{-\alpha} \\
&\preceq C(\hat{Y}_{ML})^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Für den Fall $0 < \beta < 1$ kann mit der entsprechenden Wahl von N_l analog gezeigt werden, dass

$$C(\hat{Y}_{ML}) \preceq (M^L)^{\max(1+\gamma+2\alpha-\beta, 1+\gamma)}$$

und

$$e(\hat{Y}_{ML}) \preceq (M^L)^{-\alpha} \preceq C(\hat{Y}_{ML})^{-\frac{\alpha}{\max(1+\gamma+2\alpha-\beta, 1+\gamma)}}.$$

□

Für den Fall $\beta = 1$ kann die zur Fehlerschranke

$$e(\hat{Y}_{ML}) \preceq C(\hat{Y}_{ML})^{\frac{1}{2}} \log(C(\hat{Y}_{ML}))$$

gehörende Konvergenzordnung der Folge von Multi-level Methoden nicht explizit ausgerechnet werden. Zur besseren Veranschaulichung kann man allerdings folgern, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein C_0 gibt, so dass

$$C^{-\frac{1}{2}} \log(C) \leq C^{-(\frac{1}{2}-\epsilon)},$$

für alle $C \geq C_0$.

Bemerkung 2.1 Wir betrachten nun einen wichtigen Spezialfall. Oft ist das Funktional F Lipschitz-stetig und für eine Folge $(u_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$ von Approximationen, die die Kosten-schranke (iii) aus Satz 2.2 mit einem $\gamma \geq 0$ erfüllt, ist eine Abschätzung der Form

$$\left(E[\|u_l - u\|^2] \right)^{\frac{1}{2}} \preceq (M^l)^{-\delta}$$

mit einem $\delta > 0$ bekannt. Aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit von F gilt

$$|E[F(u_l) - F(u)]| \leq E[c \|u_l - u\|] \leq c \left(E[\|u_l - u\|^2] \right)^{\frac{1}{2}} \preceq (M^l)^{-\delta}$$

und

$$\begin{aligned}
V[F(u_l) - F(u_{l-1})] &\leq E[(F(u_l) - F(u_{l-1}))^2] \\
&\leq \left((E[(F(u_l) - F(u))^2])^{\frac{1}{2}} + (E[(F(u_{l-1}) - F(u))^2])^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\
&\leq \left((E[(c \|u_l - u\|^2])^{\frac{1}{2}} + (E[(c \|u_{l-1} - u\|^2])^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\
&\preceq (M^l)^{-2\delta}
\end{aligned}$$

Die Bedingungen des Satzes 2.2 sind mit $\alpha = \delta$ und $\beta = 2\delta$ erfüllt.

2.3 Monte-Carlo Methoden am Beispiel stochastischer Differentialgleichungen

Um von der Multi-level Methode und den bewiesenen Fehlerschranken eine bessere Vorstellung zu bekommen, schauen wir uns zunächst ein Beispiel an.

Wir interessieren uns für Erwartungswerte gewisser Funktionale von Lösungen stochastischer Differentialgleichungen (Abkürzung: SDE). In der Finanzmathematik zum Beispiel dienen stochastische Differentialgleichungen zur Beschreibung von Aktienpreisprozessen und die Funktionale entsprechen Auszahlungsfunktionen von Optionen oder anderen Derivaten. Der Einfachheit halber betrachten wir nur ein-dimensionale stochastische Prozesse.

Es sei $u = (u(t))_{0 \leq t \leq T}$ ein stochastischer Prozess mit Werten in \mathbb{R} , der eine stochastische Differentialgleichung der Form

$$\begin{aligned}
du(t) &= a(u(t), t) dt + b(u(t), t) dW(t), \quad 0 \leq t \leq T \\
u(0) &= u_0
\end{aligned} \tag{2.13}$$

mit Drift $a : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, Diffusionskoeffizient $b : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ und Brownscher Bewegung W auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) in folgendem Sinne löst. Die Anfangsbedingung u_0 sei dazu eine \mathbb{R} -wertige Zufallsvariable auf (Ω, \mathcal{F}, P) , die unabhängig von W ist.

Definition 2.3 *Eine starke Lösung einer stochastischen Differentialgleichung (2.13) ist ein stochastischer Prozess $u = (u(t))_{0 \leq t \leq T}$ mit stetigen Pfaden und*

- (i) $u(t)$ ist messbar bezüglich $\mathcal{F}_t = (\sigma(u_0, W(s), 0 \leq s \leq t) \vee \mathcal{N})$, für alle $0 \leq t \leq T$, mit $\mathcal{N} = \{N \subseteq \Omega : \exists G \in \sigma(u_0, W(s), 0 \leq s \leq \infty) \text{ mit } N \subseteq G \text{ und } P(G) = 0\}$,
- (ii) $u(0) = u_0$ P -fast sicher,
- (iii) $\int_0^T |a(u(s), s)| + b^2(u(s), s) ds < \infty$ P -fast sicher,
- (iv) $u(t) = u(0) + \int_0^t a(u(s), s) ds + \int_0^t b(u(s), s) dW$ für alle $0 \leq t \leq T$, P -fast sicher.

Des Weiteren sei $F : B \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, das heißt es gibt eine Konstante $c > 0$, so dass

$$|F(v) - F(w)| \leq c \|v - w\| \quad \forall v, w \in B. \quad (2.14)$$

Für eine pfadunabhängige Auszahlungsfunktion F ist $B = \mathbb{R}$ und für eine pfadabhängige Auszahlungsfunktion ist $B = C([0, T])$. Im Folgenden betrachten wir den pfadunabhängigen Fall.

Unser Ziel ist es, einen Näherungswert für den Erwartungswert von $F(u(T))$ zu berechnen. Am einfachsten ist dies mit Hilfe des Eulerverfahrens und der klassischen Monte-Carlo Methode zu erreichen.

2.3.1 Die klassische Euler-Monte-Carlo Methode

Für das Eulerverfahren mit Schrittweite

$$h = \frac{T}{n}$$

betrachten wir die Zeitdiskretisierung $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = T$ mit $t_i = i \cdot h$ und setzen

$$\begin{aligned} u^n(0) &= u(0) \\ u^n(t_{i+1}) &= u^n(t_i) + a(u^n(t_i), t_i) h + b(u^n(t_i), t_i) (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \end{aligned} \quad (2.15)$$

für $i = 0, \dots, n - 1$.

Wir verwenden N unabhängige Kopien $u^{(n,1)}(T), \dots, u^{(n,N)}(T)$ der Euler-Approximation $u^n(T)$ und erhalten die klassische Monte-Carlo Methode

$$\hat{Y}_{MC} = \hat{Y}_{MC}^{n,N} = N^{-1} \sum_{j=1}^N F(u^{(n,j)}(T))$$

zur Approximation von $E[F(u(T))]$.

Unter geeigneten Annahmen an Drift, Diffusionskoeffizient und die Funktion F besitzt das Eulerverfahren schwache Konvergenzordnung 1 und für den Fehler der Monte-Carlo Methode gilt

$$\begin{aligned} e(\hat{Y}_{MC}) &= \left(V[\hat{Y}_{MC}] + \left(E[\hat{Y}_{MC}] - E[F(u(T))] \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(N^{-1} V[F(u^n(T))] + \left(E[F(u^n(T)) - F(u(T))] \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq N^{-\frac{1}{2}} + n^{-1}, \end{aligned}$$

siehe beispielsweise [16].

Für die Kosten $C(F(u^n))$ gilt

$$C(F(u^n)) = n.$$

Damit sind die Voraussetzungen des Satzes 2.1 mit $\alpha = 1$ erfüllt und die Folge $(\hat{Y}_{MC}^{n, N_n})_{n \in \mathbb{N}}$ von klassischen Monte-Carlo Methode mit

$$N_n := n^{2\alpha} = n^2$$

besitzt Konvergenzordnung $\frac{1}{3}$, das heißt es gilt

$$e(\hat{Y}_{MC}) \preceq C(\hat{Y}_{MC})^{-\frac{1}{3}}. \quad (2.16)$$

Wir schauen uns nun an, inwiefern die Multi-level Methode eine Verbesserung der Konvergenzordnung bewirkt.

2.3.2 Die Multi-level Euler-Monte-Carlo Methode

Es sei u die Lösung der SDE (2.13). Dann ist $u(T)$ eine Zufallsvariable mit Werten in $B = \mathbb{R}$. Die Zufallsvariable

$$w := (W(t))_{t \in [0, T]}$$

besitzt Werte in $\bar{B} = C([0, T])$. Es sei $\varphi : \bar{B} \rightarrow B$ eine messbare Abbildung, die die Lösung der SDE zur Zeit T liefert, das heißt

$$u(T) = \varphi w.$$

Wir fixieren nun $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$. Für $l \in \mathbb{N}$ seien $\varphi_l : \bar{B} \rightarrow B$ Abbildungen, die aus der Brownschen Bewegung die Euler-Approximationen (2.15) zur Zeit T mit Schrittweite

$$h = \frac{T}{M^l}$$

liefern. Wir setzen

$$u_l(T) := \varphi_l w.$$

Damit ist die Multi-level Monte-Carlo Methode

$$\hat{Y}_{ML} = \hat{Y}_{ML}^L = \sum_{l=0}^L \hat{Y}_l \quad (2.17)$$

für ein $L \in \mathbb{N}$ und $N_1, \dots, N_L \in \mathbb{N}$ zur Approximation von $E[F(u)]$ definiert wie in Kapitel 2.2.1, d.h.

$$\hat{Y}_0 = N_0^{-1} \sum_{j=1}^{N_0} F(\varphi_0 w_0^{(j)})$$

und

$$\hat{Y}_l = N_l^{-1} \sum_{j=1}^{N_l} \left(F(\varphi_l w_l^{(j)}) - F(\varphi_{l-1} w_l^{(j)}) \right)$$

mit unabhängigen Kopien $w_l^{(j)}$, $l = 0, \dots, L$, $j = 1, \dots, N_l$ von w .

Zu beachten ist, dass $(\varphi_l v, \varphi_{l-1} v)$ für ein $v \in \bar{B}$ nur über die Inkremente

$$v \left(\frac{i}{M^l} T \right) - v \left(\frac{i-1}{M^l} T \right), \quad i = 1, \dots, M^l$$

von v abhängt. Deswegen gilt

$$C(F(u_l), F(u_{l-1})) = M^l.$$

Bei der Simulation einer solchen Multi-level Methode ist zu beachten, dass eine Realisierung der Differenz $F(\varphi_l w_l^{(j)}) - F(\varphi_{l-1} w_l^{(j)})$ auf Diskretisierungen zweier verschiedener Schrittweiten beruht, die aber zum selben Brownschen Pfad gehören. In der Praxis werden zuerst die Inkremente der Brownschen Bewegung der feineren Zerlegung simuliert und dann jeweils M dieser Inkremente aufsummiert. So erhält man die Simulationen der Inkremente der größeren Zerlegung.

Nun muss überprüft werden, ob die Bedingungen (i) und (ii) des Satzes 2.2 erfüllt sind. Unter geeigneten Annahmen an Drift und Diffusionskoeffizient besitzt das Eulerverfahren starke Konvergenzordnung $\frac{1}{2}$ und schwache Konvergenzordnung 1, siehe [16]. Deshalb folgt aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit (2.14) von F wie in Bemerkung 2.1

$$V[F(u_l(T)) - F(u_{l-1}(T))] \preceq (M^l)^{-1}$$

und

$$E[F(u_l(T)) - F(u(T))] \preceq (M^l)^{-1}.$$

Die Bedingungen (i)–(iii) aus Satz 2.2 sind also mit $\alpha = 1$, $\beta = 1$ und $\gamma = 0$ erfüllt. Für den Fehler erhalten wir somit

$$e(\hat{Y}_{ML}) \preceq C(\hat{Y}_{ML})^{-\frac{1}{2}} \log(C(\hat{Y}_{ML})). \quad (2.18)$$

Die Fehlerschranke der Folge $(\hat{Y}_{ML}^L)_{L \in \mathbb{N}}$ von Multi-level Methoden ist also in der Tat besser als die der klassischen Monte-Carlo Methoden. Besonders für große Parameter, also für große Kosten C , macht sich der Unterschied deutlich bemerkbar. Die Konvergenzordnung verbessert sich demnach durch die Multi-level Methode für große C von $\frac{1}{3}$ auf fast $\frac{1}{2}$. Die Fehlerabschätzungen der jeweiligen Methoden sind leider immer nur bis auf Konstanten bekannt. Es muss außerdem beachtet werden, dass die Abschätzungen für den Fehler nur obere Schranken sind. In Kapitel 5.1 werden die Ergebnisse experimentell überprüft.

Bemerkung 2.2 Für pfadabhängige Funktionale F , also mit $B = C([0, T])$, können die Fehlerschranken für die klassische Monte-Carlo Methode als auch für die Multi-level Methode analog wie für pfadunabhängige Funktionale hergeleitet werden. Für die klassische Monte-Carlo Methode erhält man auch hier Konvergenzordnung $\frac{1}{3}$ und für die Multi-level Methode fast Konvergenzordnung $\frac{1}{2}$.

3 Starke Approximation semilinearer stochastischer partieller Differentialgleichungen

Wir wollen uns in diesem Kapitel mit semilinearen stochastischen partiellen Differentialgleichungen beschäftigen. Diese Klasse von Differentialgleichungen enthält unter anderem die stochastische Wärmeleitungsgleichung und die stochastische Burgersgleichung, welche beide in der Physik eine wichtige Rolle spielen. Bis auf sehr wenige Spezialfälle sind explizite Lösungen dieser Gleichungen nicht bekannt.

Genauer betrachten wir stochastische partielle Differentialgleichungen (im Folgenden auch SPDEs genannt) der Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = & \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t, x) + f(t, x, u(t, x)) + \frac{\partial}{\partial x}g(t, x, u(t, x)) \\ & + \sigma(t, x, u(t, x))\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}W(t, x) \end{aligned} \quad (3.1)$$

mit Dirichlet Randbedingungen

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad t \in [0, T] \quad (3.2)$$

und Anfangsbedingungen

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [0, 1], \quad (3.3)$$

wobei $u_0 \in L^2([0, 1])$ und f , g , und σ Borel-messbare Funktionen von $[0, T] \times [0, 1] \times \mathbb{R}$ nach \mathbb{R} sind. Ferner bezeichnet W ein Brownsches Blatt auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) , welches im Folgenden definiert wird.

Definition 3.1 *Eine Familie $W = (W(t, x))_{(t,x) \in [0,T] \times [0,1]}$ heißt Brownsches Blatt auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) , falls*

(i) *W besitzt stetige Pfade,*

(ii) *W ist ein Gauß-Prozess mit*

$$E[W(t, x)] = 0$$

und

$$E[W(t, x)W(s, y)] = (t \wedge s)(x \wedge y)$$

für alle $s, t \in [0, T]$, $x, y \in [0, 1]$.

Für ein Brownsches Blatt W ist $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ mit

$$\mathcal{F}_t = \sigma \{W(s, x) : s \in [0, t], x \in [0, 1]\}$$

die kanonische Filtration.

Man sagt auch, dass (3.1) eine stochastische partielle Differentialgleichung mit Raum-Zeit Weißem Rauschen ist, falls W ein Brownsches Blatt ist.

Lemma 3.1 *Ist W ein Brownsches Blatt und*

$$0 \leq t_0 < \dots < t_m \leq T, \quad 0 \leq x_0 < \dots < x_n \leq 1,$$

für $m, n \in \mathbb{N}$, so sind die Inkremente

$$W(t_{i+1}, x_{k+1}) - W(t_i, x_{k+1}) - W(t_{i+1}, x_k) + W(t_i, x_k) \quad (3.4)$$

für $i = 0, \dots, m-1, k = 0, \dots, n-1$ unabhängig und normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $(t_{i+1} - t_i)(x_{k+1} - x_k)$.

Beweis: Da W ein Gauß-Prozess ist, sind die Inkremente gemeinsam normalverteilt. Aufgrund der Linearität des Erwartungswertes folgt, dass der Erwartungswert der Inkremente gleich 0 ist. Für die Varianz erhält man

$$\begin{aligned} & V[W(t_{i+1}, x_{k+1}) - W(t_i, x_{k+1}) - W(t_{i+1}, x_k) + W(t_i, x_k)] \\ &= E \left[(W(t_{i+1}, x_{k+1}) - W(t_i, x_{k+1}) - W(t_{i+1}, x_k) + W(t_i, x_k))^2 \right] \\ &= (t_{i+1} - t_i)(x_{k+1} - x_k) \end{aligned}$$

durch Ausmultiplizieren und unter Verwendung der speziellen Form der Kovarianzen. Ebenso kann unter Verwendung der Form der Kovarianzen nachgewiesen werden, dass die Inkremente unkorreliert sind. Da sie außerdem gemeinsam normalverteilt sind, folgt die Unabhängigkeit der Inkremente. \square

Es muss noch definiert werden, was unter einer Lösung der SPDE (3.1)–(3.3) zu verstehen ist.

Definition 3.2 *Ein $L^2([0, 1])$ -wertiger stetiger $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ -adaptierter stochastischer Prozess $u = \{u(t, \cdot) : t \in [0, T]\}$ heißt (schwache) Lösung von (3.1)–(3.3), falls P -fast sicher*

$$\begin{aligned} \int_0^1 u(t, x) \varphi(x) \, dx &= \int_0^1 u_0(x) \varphi(x) \, dx + \int_0^t \int_0^1 u(s, x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x) \, dx \, ds \\ &+ \int_0^t \int_0^1 f(s, x, u(s, x)) \varphi(x) \, dx \, ds - \int_0^t \int_0^1 g(s, x, u(s, x)) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) \, dx \, ds \\ &+ \int_0^t \int_0^1 \sigma(s, x, u(s, x)) \varphi(x) \, dW(s, x) \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$ und $\varphi \in C^2([0, 1])$ mit $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ gilt. Dabei muss das letzte Integral auf der rechten Seite als Itô-Integral verstanden werden.

Unter geeigneten Annahmen an f, g, σ und u_0 existiert eine schwache Lösung u von (3.1)–(3.3), die pfadweise eindeutig ist. Damit ist gemeint, dass für zwei schwache Lösungen u und v gilt

$$P[u(t, x) = v(t, x) \forall x \in [0, 1]] = 1 \quad \forall t \in [0, T].$$

Die Lösung besitzt außerdem eine in $[0, T] \times [0, 1]$ stetige Modifikation, siehe ([9], Satz 2.1). Im Folgenden betrachten wir stets diese stetige Modifikation.

Wir betrachten auch die etwas kleinere Klasse von Differentialgleichungen (3.1)–(3.3), für die $g \equiv 0$ ist. Diesen Typ von Differentialgleichungen nennt man auch quasi-lineare parabolische SPDEs. Sie sind von der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + f(t, x, u(t, x)) + \sigma(t, x, u(t, x)) \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} W(t, x) \quad (3.5)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad t \in [0, T] \quad (3.6)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (3.7)$$

Hierbei seien f und σ lokal beschränkte Borel-Funktionen und u_0 sei nun nicht mehr nur in $L^2([0, 1])$, sondern sogar stetig und es gelte $u_0(0) = u_0(1) = 0$.

3.1 Differenzenverfahren

3.1.1 Quasi-lineare parabolische stochastische partielle Differentialgleichungen

Wir betrachten nun ein Verfahren zur Lösung quasi-linearer Differentialgleichungen, das die Intervalle $[0, T]$ und $[0, 1]$ diskretisiert. Wir beginnen mit der Diskretisierung der räumlichen Komponente x .

Semidiskretisierung

Die stochastische partielle Differentialgleichung (3.5)–(3.7) kann durch ein System von Differentialgleichungen approximiert werden. Dabei werden die Ableitungen von u und W bezüglich x durch endliche Differenzen ersetzt. Wir erhalten somit eine Semidiskretisierung

$$\begin{aligned} du^n(t, x_k) = & n^2(u^n(t, x_{k+1}) - 2u^n(t, x_k) + u^n(t, x_{k-1})) dt + f(t, x_k, u^n(t, x_k)) dt \\ & + \sqrt{n} \sigma(t, x_k, u^n(t, x_k)) d(\sqrt{n}(W(t, x_{k+1}) - W(t, x_k))), \quad k = 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$u^n(t, 0) = u^n(t, 1) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (3.9)$$

$$u^n(0, x_k) = u_0(x_k), \quad (3.10)$$

$$x_k := \frac{k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

für $n \in \mathbb{N}$. Aus den Eigenschaften des Brownschen Blattes folgt, dass

$$W^n := \left(\sqrt{n}(W(\cdot, x_{k+1}) - W(\cdot, x_k)) \right)_{k=1, \dots, n-1}$$

eine $(n-1)$ -dimensionale Brownsche Bewegung ist. Die Semidiskretisierung führt somit auf ein System von stochastischen gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Für $x \in (\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$ definieren wir $u^n(t, x)$ durch lineare Interpolation, d.h.

$$u^n(t, x) := u^n(t, x_k) + (nx - k)(u^n(t, x_{k+1}) - u^n(t, x_k)). \quad (3.11)$$

Die folgenden Bedingungen seien für f und σ erfüllt:

$$(L) \quad |f(t, x, r) - f(t, y, p)| + |\sigma(t, x, r) - \sigma(t, y, p)| \leq C(|x - y|^{\frac{1}{2}} + |r - p|),$$

für alle $t \in [0, T]$, $x, y \in [0, 1]$, $r, p \in \mathbb{R}$ und eine Konstante C .

$$(LG) \quad |f(t, x, r)| + |\sigma(t, x, r)| \leq C(1 + |r|),$$

für alle $t \in [0, T]$, $x \in [0, 1]$, $r \in \mathbb{R}$ und eine Konstante C .

Unter den Bedingungen (L) und (LG) existiert eine schwache Lösung von (3.5)–(3.7) auf dem Zeitintervall $[0, T]$, die pfadweise eindeutig ist und für die lineare Interpolation der Lösung $u^n = u^n(t, x)$ von (3.8)–(3.10) gilt der folgende Satz, siehe ([10], Satz 3.1).

Satz 3.1 *Es gelte (L) und (LG). Dann gibt es für jedes $0 \leq \delta \leq 1/2$, $p \geq 1$ und jedes $t \in (0, T]$ eine Konstante $K = K(\delta, p, t)$, so dass*

$$\sup_{x \in [0, 1]} E[|u^n(t, x) - u(t, x)|^{2p}] \leq Kn^{-\delta p}. \quad (3.12)$$

Außerdem konvergiert $u^n(t, x)$ fast sicher gegen $u(t, x)$, gleichmäßig in $t \in [0, T]$ und $x \in [0, 1]$ für jedes $T > 0$. Ist $u_0 \in C^3([0, 1])$, so gilt die Abschätzung (3.12) mit $\delta = 1$ für alle $T > 0$ und mit derselben Konstante K für alle $t \in [0, T]$ und alle $n \geq 1$.

Diskretisierung in Raum und Zeit

Wir wollen nun das Problem (3.5)–(3.7) auf dem Zeitintervall $[0, T]$ in Raum und Zeit diskretisieren. Dazu wenden wir das explizite Eulerverfahren mit Schrittweite

$$h = Tm^{-1},$$

$m \in \mathbb{N}$ auf die Semidiskretisierung (3.8)–(3.10) an und erhalten das folgende Verfahren

$$\begin{aligned} u_m^n(t_{i+1}, x_k) &= u_m^n(t_i, x_k) + Tm^{-1}n^2(u_m^n(t_i, x_{k+1}) - 2u_m^n(t_i, x_k) + u_m^n(t_i, x_{k-1})) \\ &\quad + Tm^{-1}f(t_i, x_k, u_m^n(t_i, x_k)) \\ &\quad + n\sigma(t_i, x_k, u_m^n(t_i, x_k))(W(t_{i+1}, x_{k+1}) - W(t_i, x_{k+1}) - W(t_{i+1}, x_k) + W(t_i, x_k)) \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$u_m^n(t_i, 0) = u_m^n(t_i, 1) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (3.14)$$

$$u_m^n(0, x_k) = u_0(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (3.15)$$

mit

$$t_i := \frac{i}{m}T, \quad x_k := \frac{k}{n}.$$

Mit Hilfe der Operatoren Δ_n und \square_{nm} , definiert durch

$$\begin{aligned} (\Delta_n u(t_i, \cdot))(x_k) &:= n^2(u(t_i, x_{k+1}) - 2u(t_i, x_k) + u(t_i, x_{k-1})), \\ (\square_{nm} u(t_i, \cdot))(x_k) &:= u(t_{i+1}, x_{k+1}) - u(t_i, x_{k+1}) - (u(t_{i+1}, x_k) - u(t_i, x_k)), \end{aligned}$$

kann (3.13) geschrieben werden als

$$\begin{aligned} u_m^n(t_{i+1}, x_k) &= u_m^n(t_i, x_k) + Tm^{-1}((\Delta_n u_m^n(t_i, \cdot))(x_k) + f(t_i, x_k, u_m^n(t_i, x_k))) \\ &\quad + n\sigma(t_i, x_k, u_m^n(t_i, x_k))\square_{nm}W(t_i, \cdot)(x_k). \end{aligned}$$

Wir setzen nun u_m^n von dem Gitter $\{(t_i, x_k) : i = 0, \dots, m, k = 0, \dots, n\}$ auf $\mathcal{D} := [0, T] \times [0, 1]$ durch bilineare Interpolation fort. Dazu definieren wir für $(t, x) \in (t_i, t_{i+1}) \times (x_k, x_{k+1})$

$$\begin{aligned} u_m^n(t, x) &:= u_m^n(t, x_k) + n(x - x_k)(u_m^n(t, x_k) - u_m^n(t, x_{k+1})), \\ u_m^n(t, x_k) &:= u_m^n(t_i, x_k) + Tm^{-1}(t - t_i)(u_m^n(t_{i+1}, x_k) - u_m^n(t_i, x_k)). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Diese Fortsetzung u_m^n ist auf \mathcal{D} stetig.

Wir nehmen an, dass

- (H) $|f(t, x, r) - f(s, y, p)| + |\sigma(t, x, r) - \sigma(s, y, p)| \leq C(|t - s|^{1/4} + |x - y|^{1/2} + |r - p|)$
für alle $t, s \in [0, T]$, $x, y \in [0, 1]$, $r, p \in \mathbb{R}$ und eine Konstante C
- (R) Die Parameter n und m seien so, dass für ein festes $q < \frac{1}{2}$, stets die Ungleichung

$$\frac{n^2}{m}T \leq q$$

erfüllt ist

Da (H) die Bedingungen (L) und (LG) aus Abschnitt 3.1.1 impliziert, existiert unter der Bedingung (H) eine schwache Lösung von (3.5)–(3.7), die pfadweise eindeutig ist. Nach ([11], Satz 3.2) gilt der folgende Satz.

Satz 3.2 *Es gelte (H) und (R). Dann sind folgende Aussagen erfüllt.*

- (i) Für jedes $0 < \delta_1 < \frac{1}{4}$, $0 < \delta_2 < \frac{1}{2}$, $p \geq 1$ und jedes $t \in (0, T]$ gibt es eine Konstante $K := K(p, \delta_1, \delta_2, t)$, so dass

$$\sup_{x \in [0, 1]} E[|u_m^n(t, x) - u(t, x)|^{2p}] \leq K(m^{-\delta_1 p} + n^{-\delta_2 p}), \quad (3.17)$$

für alle $n \geq 1$, $m \geq 1$.

(ii) Seien $n = n_k$, $m = m_k$ Folgen in \mathbb{N} , so dass $n_k \geq k^\gamma$, $m_k \geq k^\gamma$ für alle $k \geq 1$ und ein $\gamma > 0$. Dann gilt fast sicher

$$\sup_{t \in [0, T]} \sup_{x \in [0, 1]} |u_{m_k}^{n_k}(t, x) - u(t, x)| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.18)$$

(iii) Ist außerdem $u_0 \in C^3([0, 1])$, so gilt (3.17) mit $\delta_1 := \frac{1}{2}$ und $\delta_2 := 1$ für alle $n \geq 1$, $m \geq 1$ für alle $t \in [0, T]$ mit einer Konstanten $K = K(p)$ unabhängig von t .

Anstelle des expliziten Eulerverfahrens können wir auch das implizite Eulerverfahren verwenden. Vorteil des impliziten Eulerverfahrens ist, dass die Aussagen des Satzes 3.2 mit diesem Verfahren auch ohne die Bedingung (R) gelten.

Das implizite Eulerverfahren mit Schrittweite $h = Tm^{-1}$ angewandt auf die Semidiscretisierung (3.8)–(3.10) lautet wie folgt

$$u^{nm}(t_{i+1}, x_k) = u^{nm}(t_i, x_k) + Tm^{-1}(\Delta_n u_m^n(t_{i+1}, \cdot))(x_k) + Tm^{-1}f(t_i, x_k, u_m^n(t_i, x_k)) + n\sigma(t_i, x_k, u_m^n(t_i, x_k))\square_{nm}W(t_i, \cdot)(x_k) \quad (3.19)$$

$$u^{nm}(t_i, 0) = u^{nm}(t_i, 1) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (3.20)$$

$$u^{nm}(0, x_k) = u_0(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.21)$$

Der Operator $(I - Tm^{-1}\Delta_n)$ kann als tridiagonale $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix aufgefasst werden. Da diese Tridiagonalmatrix außerdem diagonaldominant ist, ist sie invertierbar und wir erhalten mit der Notation $\mathcal{R} := \mathcal{R}^{nm} := (I - Tm^{-1}\Delta_n)^{-1}$ schließlich

$$u^{nm}(t_{i+1}, x_k) = (\mathcal{R}u^{nm}(t_i, \cdot))(x_k) + Tm^{-1}(\mathcal{R}f(t_i, \cdot, u^{nm}(t_i, \cdot)))(x_k) + n(\mathcal{R}\sigma(t_i, \cdot, u^{nm}(t_i, \cdot))\square_{nm}W(t_i, \cdot))(x_k).$$

In Kapitel 2 wurden die Kosten einer Monte-Carlo Methode als die Anzahl der Aufrufe des Zufallszahlengenerators definiert. Für das Differenzenverfahren, das auf dem explizitem Eulerverfahren basiert, ist dies angemessen, da für alle n und m die Anzahl der durchzuführenden Rechenschritte zur Berechnung von u_m^n bis auf eine Konstante kleiner gleich der Anzahl der benötigten Zufallszahlen sind. In diesem Fall sind die Kosten von $F(u_m^n)$ für ein Funktional F gleich nm . Für das implizite Verfahren trifft das allerdings nicht mehr zu. Durch die Anwendung des Operators \mathcal{R} auf eine Funktion entstehen zusätzliche Kosten, da dies einer Matrix-Vektor Multiplikation entspricht. Die Matrix hat die Größe $(n-1) \times (n-1)$ und ist im Allgemeinen vollbesetzt. Die Kosten zur Simulation eines Pfades mit Hilfe des impliziten Eulerverfahrens müssen deswegen bei entsprechender Implementierung zu $mn(1 + cn)$ mit einer Konstanten c korrigiert werden. Hieran sieht man, dass die Definition der Kosten über die Aufrufe des Zufallszahlen-Generators ein sehr vereinfachtes Modell ist. Für unsere Zwecke reicht dies aber trotzdem aus. Ein genaueres Modell für die Kosten wird zum Beispiel in [2] vorgestellt.

Satz 3.3 *Es gelte (H). Dann sind für u^{nm} aus (3.19)–(3.21) die Aussagen (i)–(iii) aus Satz 3.2 erfüllt.*

Der Beweis dieses Satzes ist in ([11], Satz 3.1) zu finden.

Starke Konvergenzordnung

Die pfadweise Approximation u_m^n basiert auf einem Gitter mit $(n+1) \cdot (m+1)$ Knoten und verwendet $n \cdot m$ Aufrufe des Zufallszahlengenerators für normalverteilte Zufallszahlen. Die Wahl der Parameter n und m erfolgt durch Minimierung der oberen Schranke (3.17) unter der Nebenbedingung

$$C = n \cdot m.$$

Es genügt den Fall $p = 1$ zu betrachten. Die obere Schranke wird minimal mit der Wahl

$$m = m_n \asymp n^{\frac{\delta_2}{\delta_1}}.$$

Daraus folgt

$$C = nm_n \asymp n^{1+\frac{\delta_2}{\delta_1}} \asymp m_n^{1+\frac{\delta_1}{\delta_2}}$$

bzw.

$$n \asymp C^{\frac{\delta_1}{\delta_1+\delta_2}}, \quad m_n \asymp C^{\frac{\delta_2}{\delta_1+\delta_2}}.$$

Durch Einsetzen in (3.17) erhält man

$$\sup_{x \in [0,1]} (E[|u_{m_n}^n(t, x) - u(t, x)|^2])^{\frac{1}{2}} \preceq C^{-\frac{\delta_1 \delta_2}{2(\delta_1+\delta_2)}},$$

für alle $t \in (0, T]$. Zu bemerken ist hier, dass die Konstante in der asymptotischen Ungleichung von t abhängt. Da die Ungleichung (3.17) für alle $\delta_1 < \frac{1}{4}$ und $\delta_2 < \frac{1}{2}$ gilt, liegt $\frac{\delta_1 \delta_2}{2(\delta_1+\delta_2)}$ beliebig nah an $\frac{1}{12}$.

Ist $u_0 \in C^3([0, 1])$, so gilt die Ungleichung (3.17) mit $\delta_1 = \frac{1}{2}$ und $\delta_2 = 1$, d.h.

$$\sup_{t \in [0, T]} \sup_{x \in [0, 1]} (E[|u_{m_n}^n(t, x) - u(t, x)|^2])^{\frac{1}{2}} \preceq C^{-\frac{1}{6}}.$$

In Analogie zu Definition 2.2 sagen wir deshalb, dass die Folge $(u_{m_n}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Approximationen Konvergenzordnung $\frac{1}{6}$ besitzt.

Berücksichtigt man, dass n in die Kosten für das Verfahren mit implizitem Eulerverfahren quadratisch eingeht, so erhält man analog mit $\delta_1 = \frac{1}{2}$ und $\delta_2 = 1$

$$\sup_{x \in [0, 1]} (E[|u^{nm_n}(t, x) - u(t, x)|^2])^{\frac{1}{2}} \preceq C^{-\frac{\delta_1 \delta_2}{2(2\delta_1+\delta_2)}} = C^{-\frac{1}{8}}$$

und wir sagen, dass die Folge $(u^{nm_n})_{n \in \mathbb{N}}$ von Approximationen Konvergenzordnung $\frac{1}{8}$ besitzt.

3.1.2 Die Stochastische Burgers-Gleichung

Setzen wir in der semilinearen Differentialgleichung (3.1)–(3.3)

$$g(t, x, u(t, x)) := \frac{1}{2}u^2(t, x)$$

und

$$\sigma(t, x, u(t, x)) := 1,$$

so erhalten wir die stochastische Burgers-Gleichung. Diese Gleichung kann als Modell für eindimensionale Strömungen in inkompressiblen newtonschen Flüssigkeiten oder Gasen (z.B. Wasser, Öle) gesehen werden. Die Lösung u beschreibt die Strömungsgeschwindigkeit. Die Burgers-Gleichung ist der eindimensionale Fall der Navier-Stokes-Gleichung. Die physikalischen Hintergründe der Navier-Stokes-Gleichung bzw. Burgers-Gleichung, zunächst ohne Weißes Rauschen, können in Büchern über Fluid- und Thermodynamik nachgelesen werden, z.B. [20], [12], [15]. Die stochastische Burgers-Gleichung lautet

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t, x) + f(t, x, u(t, x)) + u(t, x)\frac{\partial}{\partial x}u(t, x) + \frac{\partial^2}{\partial t\partial x}W(t, x), \quad (3.22)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad (3.23)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (3.24)$$

für $t \in [0, T]$, $x \in [0, 1]$. Ist f Lipschitz-stetig und $u_0 \in C([0, 1])$ fast sicher, so existiert eine (pfadweise) eindeutige Lösung u , die eine stetige Modifikation besitzt, siehe ([9], Satz 2.1).

Semidiskretisierung

Auch für die stochastische Burgers-Gleichung betrachten wir eine Diskretisierung der räumlichen Variable x , wobei wieder die Ableitungen durch endliche Differenzen ersetzt werden.

$$\begin{aligned} du^n(t, x_k) = & ((\Delta_n u^n(t, \cdot))(x_k) + f(t, x_k, u^n(t, x_k)) + (\Theta_n u^n(t, \cdot))(x_k)) dt \\ & + n d(W(t, x_{k+1}) - W(t, x_k)), \quad k = 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$u^n(t, x_0) = u^n(t, x_n) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (3.26)$$

$$u^n(0, x_k) = u_0(x_k), \quad (3.27)$$

$$x_k = \frac{k}{n}, \quad k = 0, \dots, n$$

für $n \in \mathbb{N}$ und mit dem Operator Θ_n definiert durch

$$\begin{aligned} (\Theta_n u(t, \cdot))(x_k) & := \frac{u(t, x_{k+1}) + u(t, x_k) + u(t, x_{k-1})}{3} \cdot \frac{u(t, x_{k+1}) - u(t, x_{k-1})}{2/n} \\ & = \frac{n}{6} ((u(t, x_{k+1}))^2 + u(t, x_{k+1})u(t, x_k) - u(t, x_k)u(t, x_{k-1}) - (u(t, x_{k-1}))^2). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Der erste Faktor in (3.28) ist eine Näherung für $u(t, x)$ und der zweite Faktor für $\frac{\partial}{\partial x}u(t, x)$ jeweils an der Stelle $x = x_k$. Zusammen erhält man eine Näherung für den vorletzten Summanden $u(t, x)\frac{\partial}{\partial x}u(t, x)$ auf der rechten Seite der Burgers-Gleichung.

Wir setzen u^n von dem Gitter auf das ganze Intervall $[0, 1]$ stückweise konstant fort, indem wir

$$u^n(t, x) := u^n(t, \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}), \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, T]$$

setzen. Mit dieser Fortsetzung gilt nach ([1], Satz 2.2) der folgende Satz.

Satz 3.4 *Sei f Lipschitz-stetig und $u_0 \in C([0, 1])$ fast sicher. Dann konvergiert $u^n(t, \cdot)$ fast sicher in $L^2([0, 1])$ gegen die Lösung $u(t, \cdot)$ von (3.22)-(3.24), gleichmäßig in $t \in [0, T]$ für jedes $T > 0$. Gilt $u_0 \in C^3([0, 1])$, so gibt es für alle $\delta < \frac{1}{2}$ und alle $T > 0$ eine endliche Zufallsvariable ζ_δ , so dass*

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_0^1 |u^n(t, x) - u(t, x)|^2 dx \leq \zeta_\delta n^{-\delta} \quad P - f.s. \quad (3.29)$$

für alle $n \geq 2$.

Vermutungen über Diskretisierung in Zeit und Raum der Burgers-Gleichung

Um ein numerisches Verfahren zur Lösung der Burgers-Gleichung zu erhalten, können wir auch auf die Semidiskretisierung (3.25)-(3.27) das Eulerverfahren anwenden. Das Diskretisierungsverfahren in Raum und Zeit ist dann

$$\begin{aligned} u_m^n(t_{i+1}, x_k) &= u_m^n(t_i, x_k) \\ &\quad + Tm^{-1}((\Delta_n u_m^n(t_i, \cdot))(x_k) + f(t_i, x_k, u_m^n(t_i, x_k)) + (\Theta_n u_m^n(t_i, \cdot))(x_k)) \\ &\quad + n \square_{nm} W(t_i, \cdot)(x_k) \\ u_m^n(t_i, 0) &= u_m^n(t_i, 1) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m, \\ u_m^n(0, x_k) &= u_0(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned}$$

mit

$$t_i := \frac{i}{m}T, \quad x_k := \frac{k}{n}.$$

Durch bilineare Interpolation wie in (3.16) erhält man auch hier eine Fortsetzung auf ganz $\mathcal{D} = [0, T] \times [0, 1]$. Konvergenzraten wie in Satz 3.2 sind dafür allerdings nicht bekannt. Da für den Fall $u_0 \in C^3([0, 1])$ die Ergebnisse für die Semidiskretisierung der Burgers-Gleichung ähnlich sind, wie die der Semidiskretisierung der quasi-linearen parabolischen SPDEs, arbeiten wir unter der Hypothese, dass die Konvergenzordnungen für eine Diskretisierung in Raum und Zeit auch ähnlich sind.

3.2 Spektral-Galerkin Verfahren

Im folgenden betrachten wir räumlich mehrdimensionale semilineare stochastische partielle Differentialgleichungen. Genauer haben wir nun $x \in [0, 1]^d$ statt $x \in [0, 1]$ und den Laplace-Operator Δ anstelle von $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Ebenfalls seien hier Dirichlet-Randbedingungen erfüllt. Für

$$g \equiv 0$$

spricht man dann auch von einer stochastischen Wärmeleitungsgleichung. Die Wärmeleitungsgleichung ist ein Modell für die Temperaturverteilung eines Körpers durch Wärmeleitung oder die Ausbreitung eines gelösten Stoffes durch Diffusion.

Hier betrachten wir nur den Spezialfall

$$\begin{aligned} du(t) &= \Delta u(t)dt + dW(t) \\ u(0) &= \xi \end{aligned} \tag{3.30}$$

auf dem Hilbertraum $H = L^2((0, 1)^d)$ mit deterministischem $\xi \in H$ und Dirichlet-Randbedingungen. Dabei sei W eine (zylindrische) Brownsche Bewegung mit Kovarianz-Operator Q . Die Gleichung (3.30) ist eine stochastische Wärmeleitungsgleichung mit additiven Rauschen und sie entspricht für $d = 1$ der Wahl von

$$f \equiv g \equiv 0, \quad \sigma \equiv 1$$

in (3.1).

Wir wollen sowohl die Wärmeleitungsgleichung mit Raum-Zeit Weißem Rauschen für $d = 1$ als auch mit nuklearem Rauschen für $d \in \mathbb{N}$ betrachten, d.h. der Kovarianz-Operator $Q : H \rightarrow H$ ist entweder die Identität für das Raum-Zeit Weiße Rauschen oder ein Spurklasse-Operator für nukleares Rauschen, siehe dazu [13] und [4].

Definition 3.3 Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein separabler Hilbertraum. Ein symmetrischer nicht-negativer Operator $Q : H \rightarrow H$ heißt Spurklasse-Operator, falls die Reihe

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle Q e_n, e_n \rangle$$

für eine Orthonormalbasis $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von H konvergiert.

Die normierten Eigenfunktionen

$$\varphi_i(x) = 2^{d/2} \prod_{l=1}^d \sin(i_l \pi x_l), \quad i = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d \tag{3.31}$$

des Laplace-Operators bilden eine Orthonormalbasis von $H = L^2([0, 1]^d)$.

Für $i \in \mathbb{N}^d$ definieren wir

$$|i|_2 := \sqrt{i_1^2 + \dots + i_d^2}.$$

Wir nehmen im folgenden an, dass die φ_i Eigenfunktionen des Operators Q sind mit Eigenwerten

$$\lambda_i = |i|_2^{-\gamma},$$

für $i = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d$ mit $\gamma > d$ im Falle eines Spurklasse-Operators und $\gamma = 0$ im Falle der Identität. Es werden unabhängige skalare Brownsche Bewegungen definiert durch

$$\beta_i(t) = \lambda_i^{-1/2} \langle W(t), \varphi_i \rangle$$

im Falle nuklearen Rauschens, bzw. durch

$$\beta_i(t) = W(t, \varphi_i)$$

im Falle Raum-Zeit Weißen Rauschens. Nachgelesen werden kann dies in [4].

3.2.1 Starke Approximation mit impliziten Eulerverfahren

Wir wollen nun ein Verfahren zur starken Approximation der Lösung der Wärmeleitungsgleichung (3.30) betrachten, welches auf [17] und [18] zurückgeht. Im folgenden bezeichnet

$$\mu_i = \pi^2 |i|_2^2$$

den Eigenwert des Laplace-Operators Δ zur Eigenfunktion φ_i .

Die Funktion G , gegeben durch

$$G(t, x, y) := \sum_{i \in \mathbb{N}^d} e^{-\mu_i t} \varphi_i(x) \varphi_i(y), \quad x, y \in [0, 1]^d \quad (3.32)$$

wird als Wärmeleitungskern für Dirichlet Randbedingungen bezeichnet. Diese Reihe konvergiert für alle $x, y \in [0, 1]$ und $t \in (0, T]$, denn

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{N}^d} e^{-\pi^2 |i|_2^2 t} |\varphi_i(x) \varphi_i(y)| &\leq 2^d \sum_{i \in \mathbb{N}^d} \left(e^{-\pi^2 t} \right)^{i_1^2 + \dots + i_d^2} = 2^d \prod_{l=1}^d \left(\sum_{i_l \in \mathbb{N}} \left(e^{-\pi^2 t} \right)^{i_l^2} \right) \\ &\leq 2^d \prod_{l=1}^d \left(\sum_{i_l \in \mathbb{N}} \left(e^{-\pi^2 t} \right)^{i_l} \right) < \infty, \end{aligned} \quad (3.33)$$

wobei die letzte Reihe konvergiert, weil sie eine geometrische Reihe ist und $|e^{-\pi^2 t}| < 1$ für $t \in (0, T]$. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass $G(t, \cdot, y)$ für alle $y \in [0, 1]$ die Wärmeleitungsgleichung

$$du(t) = \Delta u(t) dt \quad (3.34)$$

mit Dirichlet Randbedingungen löst. Man bezeichnet G auch als Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung. Mit ihr ist es möglich Lösungen von Wärmeleitungsgleichungen,

die außerdem noch zusätzliche Terme enthalten, in einer Integralform darzustellen. Ist ein stochastischer Prozess u definiert durch

$$u(t) = u(t, \cdot) = \int_0^t \int_0^1 G(t-s, \cdot, y) dW(s, y), \quad (3.35)$$

so löst er die stochastische Wärmeleitungsgleichung (3.30). Dieser stochastische Prozess u kann nun entwickelt werden in

$$u(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}^d} Y_i(t) \varphi_i \quad (3.36)$$

wobei die reell-wertigen stochastischen Prozesse Y_i unabhängige Ornstein-Uhlenbeck Prozesse sind. Sie erfüllen

$$\begin{aligned} dY_i(t) &= -\mu_i Y_i(t) dt + \lambda_i^{\frac{1}{2}} d\beta_i(t) \\ Y_i(0) &= \langle \xi, \varphi_i \rangle. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Zur Approximation der Y_i soll ein implizites Eulerverfahren verwendet werden, allerdings muss die Diskretisierung des Intervalls $[0, T]$ nicht unbedingt äquidistant sein. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir zuerst

$$\mathcal{I} = \left\{ i \in \mathbb{N}^d : |i|_2 \leq n^{\frac{1}{d}} \right\} \quad (3.38)$$

und

$$\nu_i = \begin{cases} \left[(\lambda_i/\mu_i)^{1/3} n^{(\gamma+2)/(3d)} \right], & \text{if } \gamma < 3d-2 \\ \left[(\lambda_i/\mu_i)^{1/3} n / \ln n \right], & \text{if } \gamma = 3d-2 \\ \left[(\lambda_i/\mu_i)^{1/3} n \right], & \text{if } \gamma > 3d-2. \end{cases}$$

Die Knoten $t_{l,i}$ in $[0, T]$ zur Approximation von Y_i werden definiert durch

$$\int_0^{t_{l,i}} \exp\left(-\frac{\mu_i}{3}(T-t)\right) dt = \frac{l}{\nu_i} \int_0^T \exp\left(-\frac{\mu_i}{3}(T-t)\right) dt,$$

für $l = 0, \dots, \nu_i$. Dies sind $1/\nu_i$ -Quantile bezüglich einer fixierten Wahrscheinlichkeitsdichte. Explizit erhält man

$$t_{l,i} = \frac{3}{\mu_i} \ln \left(\frac{l}{\nu_i} + \exp\left(-\frac{\mu_i}{3}T\right) \left(1 - \frac{l}{\nu_i}\right) \right) + T.$$

Die Approximation $\hat{Y}_i(T)$ von $Y_i(T)$ wird nun, mit Hilfe des Drift-impliziten Eulerverfahren, definiert durch

$$\begin{aligned} \hat{Y}_i(0) &= \langle \xi, \varphi_i \rangle \\ \hat{Y}_i(t_{l,i}) &= \hat{Y}_i(t_{l-1,i}) - \mu_i \hat{Y}_i(t_{l,i})(t_{l,i} - t_{l-1,i}) + \lambda_i^{\frac{1}{2}} (\beta_i(t_{l,i}) - \beta_i(t_{l-1,i})), \end{aligned} \quad (3.39)$$

für $l = 1, \dots, \nu_i$. Schließlich definieren wir

$$u^n(T) := \sum_{i \in \mathcal{I}} \hat{Y}_i(T) \varphi_i \quad (3.40)$$

als Approximation von $u(T)$.

Der Fehler der pfadweisen Approximation $u^n(T)$ ist definiert als

$$e(u^n(T)) := \left(E \|u^n(T) - u(T)\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.41)$$

Man kann leicht zeigen, dass

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \nu_i \preceq n,$$

und damit gilt für die Kosten C von $F(u^n(T))$ für ein Funktional F

$$C \preceq n.$$

In [18] wird der folgende Satz bewiesen.

Satz 3.5 *Ist $|\langle \xi, h_i \rangle| \preceq |i|_2^{-1}$, so gilt*

(i)

$$e(u^n(T)) \asymp n^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.42)$$

falls $d = 1$ und der Kovarianz-Operator Q die Identität ist

(ii)

$$e(u^n(T)) \asymp \begin{cases} n^{-(\gamma-d+2)/(2d)}, & \text{if } \gamma < 3d - 2 \\ n^{-1}(\ln n)^{3/2}, & \text{if } \gamma = 3d - 2 \\ n^{-1}, & \text{if } \gamma > 3d - 2 \end{cases} \quad (3.43)$$

falls $d \in \mathbb{N}$ und der Kovarianz-Operator Q ein Spurklasse-Operator ist, dessen Eigenfunktionen durch

$$\varphi_i(x) = 2^{d/2} \prod_{l=1}^d \sin(i_l \pi x_l)$$

und Eigenwerte durch

$$\lambda_i = |i|_2^{-\gamma}$$

für $i = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d$ gegeben sind.

In [18] wird außerdem gezeigt, dass die Konvergenzordnungen in (3.42) und (3.43) die bestmöglichen Konvergenzordnungen sind, die mit einem beliebigen Verfahren $u^n(T)$ zur pfadweisen Approximation der Lösung der Wärmeleitungsgleichung, dessen Kosten kleiner gleich n sind, erreicht werden können.

4 Schwache Approximation semilinearer stochastischer partieller Differentialgleichungen

Wir wollen uns nun mit der schwachen Approximation von Lösungen semilinearer stochastischer partieller Differentialgleichungen beschäftigen. Dabei sollen die im vorherigen Kapitel beschriebenen Verfahren als Grundlage dienen. Da wir nun Erwartungswerte approximieren wollen, verwenden wir Monte-Carlo Methoden. In diesem Kapitel soll untersucht werden, ob die Multi-level Monte-Carlo Methode mit dem Differenzenverfahren und dem Spektral-Galerkin-Verfahren für stochastische partielle Differentialgleichungen als Grundlage eine Verbesserung im Vergleich zur klassischen Monte-Carlo Methode ist. Wie diese Verfahren zur schwachen Approximation genau aussehen wird im Folgenden beschrieben.

4.1 Differenzenverfahren

Wir betrachten zunächst allgemein eine Approximation u_m^n der Lösung u einer Gleichung der Form (3.1)–(3.3), wobei n und m die Diskretisierungsparameter in Raum bzw. Zeit sind. Die Kosten zur Berechnung von $F(u_m^n)$, für ein Funktional F , seien $\mathcal{O}(nm)$. Ein Beispiel dafür ist die Approximation in (3.13)–(3.15).

Unser Ziel ist es, den Erwartungswert von $F(u)$ zu approximieren. Das Funktional $F : B \rightarrow \mathbb{R}$ kann pfadunabhängig mit $B = C([0, 1])$ oder es kann pfadabhängig mit $B = C([0, T] \times [0, 1])$ sein. Wir betrachten hier den pfadabhängigen Fall. Für pfadunabhängige Funktionale sind die Resultate der folgenden Abschnitte allerdings auch gültig.

In diesem Kapitel bezeichnen wir Konstanten, die unabhängig von den Diskretisierungsparametern und der Anzahl der Monte-Carlo Kopien sind, mit c . Diese Konstanten können trotz der einheitlichen Bezeichnung unterschiedliche Werte besitzen.

4.1.1 Klassische Monte-Carlo Methode

Zuerst schauen wir uns die schwache Approximation mit Hilfe der klassischen Monte-Carlo Methode an. Für $n, m \in \mathbb{N}$ betrachten wir N unabhängige Kopien $u_m^{(n,1)}, \dots, u_m^{(n,N)}$

der Approximation u_m^n und erhalten die klassische Monte-Carlo Methode

$$\hat{Y}_{MC} = \hat{Y}_{MC}^{n,m,N} = N^{-1} \sum_{j=1}^N F(u_m^{(n,j)})$$

zur Approximation von $E[F(u)]$. Für den Fehler von \hat{Y}_{MC} gilt

$$e(\hat{Y}_{MC}) = \left(N^{-1} V[F(u_m^n)] + (E[F(u_m^n)] - F(u))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.1)$$

und für die Kosten von \hat{Y}_{MC} gilt

$$C(\hat{Y}_{MC}) \leq c N m n. \quad (4.2)$$

4.1.2 Multi-level Monte-Carlo Methode

Anstelle der klassischen Monte-Carlo Methode, soll nun die Multi-level Methode zur Approximation von $E[F(u)]$ verwendet werden. Dazu definieren wir

$$w := (W(t, x))_{(t,x) \in [0,T] \times [0,1]},$$

wobei W das Brownsche Blatt aus der SPDE (3.1) ist. Die Zufallsvariable w besitzt Werte in

$$\bar{B} = C([0, T] \times [0, 1]).$$

Es sei $\varphi : \bar{B} \rightarrow B$ eine messbare Abbildung, die die Lösung u der SPDE liefert, genauer

$$u = \varphi w.$$

Wir fixieren nun $M_1, M_2 \in \mathbb{N}$, $M_1, M_2 \geq 2$ und $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$. Für $l \in \mathbb{N}_0$ seien $\varphi_l : \bar{B} \rightarrow B$ Abbildungen, die aus w die Approximationen $u_{m_l}^{n_l}$ aus dem Differenzenverfahren mit Parametern

$$\begin{aligned} n_l &= M_1^l n_0, \\ m_l &= M_2^l m_0 \end{aligned}$$

liefern. Wir setzen

$$u_l := u_{m_l}^{n_l}, \quad l \in \mathbb{N}_0.$$

Für ein $L \in \mathbb{N}$ und $N_0, \dots, N_L \in \mathbb{N}$ ist die Multi-level Monte-Carlo Methode definiert durch

$$\hat{Y}_{ML} = \sum_{l=0}^L \hat{Y}_l$$

mit

$$\begin{aligned}\hat{Y}_0 &= N_0^{-1} \sum_{j=1}^{N_0} F(\varphi_0 w_0^{(j)}), \\ \hat{Y}_l &= N_l^{-1} \sum_{j=1}^{N_l} \left(F(\varphi_l w_l^{(j)}) - F(\varphi_{l-1} w_l^{(j)}) \right), \quad l = 1, \dots, L,\end{aligned}$$

und mit unabhängigen Kopien

$$w_l^{(j)}, \quad j = 1, \dots, N_l, \quad l = 0, \dots, L$$

von w .

Für den Fehler der Multi-level Methode \hat{Y}_{ML} gilt aufgrund der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $\hat{Y}_0, \dots, \hat{Y}_L$

$$\begin{aligned}e(\hat{Y}_{ML}) &= \left(V[\hat{Y}_{ML}] + \left(E[\hat{Y}_{ML}] - E[F(u)] \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{l=0}^L N_l^{-1} V_l + (E[F(u_L)] - F(u))^2 \right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{4.3}$$

mit $V_l = V[F(u_l) - F(u_{l-1})]$.

Wir bezeichnen die Kosten von \hat{Y}_l mit $C(\hat{Y}_l)$. Dann gilt für die Kosten $C(\hat{Y}_{ML})$ der Multi-level Methode \hat{Y}_{ML}

$$C(\hat{Y}_{ML}) = \sum_{l=0}^L C(\hat{Y}_l) \leq c \sum_{l=0}^L N_l m_l n_l.\tag{4.4}$$

4.1.3 Konvergenzordnungen im Falle quasi-linearer parabolischer stochastischer Differentialgleichungen

Es sei nun u die Lösung einer quasi-linearen parabolischen SPDE (3.5)–(3.7) mit

$$u_0 \in C^3([0, 1]).$$

Wir betrachten das Differenzenverfahren aus (3.13)–(3.15) und die bilineare Interpolation u_m^n aus (3.16) und untersuchen den Fehler der klassischen Monte-Carlo Methode und der Multi-level Methode genauer.

Die Bedingungen (H) und (R) aus Abschnitt 3.1.1 seien erfüllt und für das Funktional $F : C([0, T] \times [0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ gelte:

(I) Für alle $v, w \in C([0, T] \times [0, 1])$ gilt

$$|F(v) - F(w)| \leq (\|v\|_2 + \|w\|_2) \|v - w\|_2.$$

Naheliegender wäre hier, anstelle von Voraussetzung (I), globale Lipschitz-Stetigkeit zu fordern. Da das in den Experimenten in Kapitel 5 verwendete Funktional

$$F(v) = \int_0^1 \int_0^1 v^2(x, t) dx dt$$

nicht global Lipschitz-stetig ist, wird hier die schwächere Voraussetzung (I), die von dem Funktional F erfüllt ist, verwendet. Aus (I) folgt außerdem für alle $v \in C([0, T] \times [0, 1])$

$$|F(v)| \leq c(1 + \|v\|_2^2)$$

mit einer Konstanten c , das heißt F ist höchstens von quadratischem Wachstum.

Bevor wir mit der Abschätzung der Varianz und des Bias der Monte-Carlo Methoden beginnen, benötigen wir noch einige Vorbereitungen. Nach Proposition 3.5 aus [11] gibt es für jedes $p \geq 1$ eine Konstante c , so dass

$$\sup_{t \in [0, T]} \sup_{x \in [0, 1]} (E[|u_m^n(t, x)|^{2p}])^{\frac{1}{2p}} \leq c \quad (4.5)$$

für alle $n \geq 1$, $m \geq 1$, die (R) erfüllen. Daraus folgt

$$\begin{aligned} E[\|u_m^n\|_2^{2p}] &\leq c E[\|u_m^n\|_{2p}^{2p}] \\ &= c \int_0^T \int_0^1 E[|u_m^n(t, x)|^{2p}] dx dt \\ &\leq c T \sup_{t \in [0, T]} \sup_{x \in [0, 1]} E[|u_m^n(t, x)|^{2p}] \\ &\leq c. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Es folgt aus Satz 3.2 (iii)

$$\begin{aligned} E[\|u_m^n - u\|_2^{2p}] &\leq c E[\|u_m^n - u\|_{2p}^{2p}] \\ &\leq c \int_0^T \int_0^1 E[|u_m^n(t, x) - u(t, x)|^{2p}] dx dt \\ &\leq c T \sup_{t \in [0, T]} \sup_{x \in [0, 1]} E[|u_m^n(t, x) - u(t, x)|^{2p}] \\ &\leq c (m^{-\delta_1 p} + n^{-\delta_2 p}), \end{aligned} \quad (4.7)$$

mit

$$\delta_1 = \frac{1}{2}, \quad \delta_2 = 1$$

und einer Konstanten c , die unabhängig ist von m und n . Aus (4.6) und (4.7) folgt außerdem unter Verwendung der Binomischen Formel und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} E[\|u\|_2^{2p}] &= E[\|u - u_m^n + u_m^n\|_2^{2p}] \\ &\leq E[(\|u - u_m^n\|_2 + \|u_m^n\|_2)^{2p}] \\ &\leq c. \end{aligned}$$

Die klassische Monte-Carlo Methode

Wir beginnen mit der oberen Schranke des Bias. Wegen (4.7), Eigenschaft (I) des Funktionals F und unter Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}
 (E[F(u_m^n)] - E[F(u)])^2 &= (E[F(u_m^n) - F(u)])^2 \\
 &\leq (E[(\|u_m^n\|_2 + \|u\|_2) \|u_m^n - u\|_2])^2 \\
 &\leq E[(\|u_m^n\|_2 + \|u\|_2)^2] E[\|u_m^n - u\|_2^2] \\
 &\leq c (m^{-\delta_1} + n^{-\delta_2})
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

für alle $n \geq 1$, $m \geq 1$, denn

$$\begin{aligned}
 E[(\|u_m^n\|_2 + \|u\|_2)^2] &= E[\|u_m^n\|_2^2 + 2\|u_m^n\|_2\|u\|_2 + \|u\|_2^2] \\
 &\leq \left(E[\|u_m^n\|_2^2] + 2 \left(E[\|u_m^n\|_2^2] E[\|u\|_2^2] \right)^{\frac{1}{2}} + E[\|u\|_2^2] \right) \\
 &\leq c
 \end{aligned}$$

mit einer Konstanten c , die unabhängig von m und n ist.

Die Varianz von $F(u_m^n)$ kann nach oben abgeschätzt werden, denn aus (4.6) und da F höchstens von quadratischem Wachstums ist folgt

$$\begin{aligned}
 V[F(u_m^n)] &\leq E[(F(u_m^n))^2] \\
 &\leq E[c^2 (1 + \|u_m^n\|_2^2)^2] \\
 &\leq c^2 E[1 + 2\|u_m^n\|_2^2 + \|u_m^n\|_2^4] \\
 &\leq c
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

für alle $n, m \geq 1$.

Aus (4.1), (4.8) und (4.9) folgt für den Fehler der klassischen Monte-Carlo Methode

$$\begin{aligned}
 e(\hat{Y}_{MC}) &= \left(N^{-1} V[F(u_m^n)] + (E[F(u_m^n)] - E[F(u)])^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq c (N^{-\frac{1}{2}} + m^{-\frac{\delta_1}{2}} + n^{-\frac{\delta_2}{2}}).
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Damit die Parameter optimal in Bezug auf die obere Schranke sind, wählen wir $N = N_n$ und $m = m_n$, so dass

$$N_n \asymp n^{\delta_2}, \quad m_n \asymp n^{\frac{\delta_2}{\delta_1}}.$$

Dann folgt nach (4.2) für die Kosten

$$C(\hat{Y}_{MC}) \asymp n^{1+\delta_2+\frac{\delta_2}{\delta_1}} \asymp m_n^{1+\delta_1+\frac{\delta_1}{\delta_2}} \asymp N_n^{1+\frac{1}{\delta_1}+\frac{1}{\delta_2}}$$

und man erhält für den Fehler

$$e(\hat{Y}_{MC}) \preceq C(\hat{Y}_{MC})^{-\frac{1}{2(1+\frac{1}{\delta_1}+\frac{1}{\delta_2})}}. \quad (4.11)$$

Da $u_0 \in C^3([0, 1])$, ist $\delta_1 = \frac{1}{2}$ und $\delta_2 = 1$ und es folgt

$$e(\hat{Y}_{MC}) \preceq C(\hat{Y}_{MC})^{-\frac{1}{8}}. \quad (4.12)$$

Die Folge $(\hat{Y}_{MC}^{n, m_n, N_n})_{n \in \mathbb{N}}$ von klassischen Monte-Carlo Methoden besitzt somit Konvergenzordnung $\frac{1}{8}$. Wir hoffen diese Konvergenzordnung mit Hilfe der Multi-level Methode zu verbessern.

Die Multi-level Monte-Carlo Methode

Für die Multi-level Methode können die Varianzen V_l wie folgt abgeschätzt werden. Aus (4.7) mit $p = 2$, Eigenschaft (I) des Funktionals und unter Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} V_l &= V[F(u_l) - F(u_{l-1})] \\ &\leq E \left[(F(u_l) - F(u) + F(u) - F(u_{l-1}))^2 \right] \\ &\leq \left((E[(F(u_l) - F(u))^2])^{1/2} + (E[(F(u_{l-1}) - F(u))^2])^{1/2} \right)^2 \\ &\leq \left(\left(E[(\|u_l\|_2 + \|u\|_2)^2 \|u_l - u\|_2^2] \right)^{1/2} + \left(E[(\|u_{l-1}\|_2 + \|u\|_2)^2 \|u_{l-1} - u\|_2^2] \right)^{1/2} \right)^2 \\ &\leq \left(\left(E[(\|u_l\|_2 + \|u\|_2)^4] E[\|u_l - u\|_2^4] \right)^{1/4} \right. \\ &\quad \left. + \left(E[(\|u_{l-1}\|_2 + \|u\|_2)^4] E[\|u_{l-1} - u\|_2^4] \right)^{1/4} \right)^2 \\ &\leq c \left(\left((m_l^{-2\delta_1} + n_l^{-2\delta_2}) \right)^{1/4} + \left((m_{l-1}^{-2\delta_1} + n_{l-1}^{-2\delta_2}) \right)^{1/4} \right)^2 \\ &\leq c \left(m_l^{-\delta_1} + n_l^{-\delta_2} \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

wobei wieder $\delta_1 = \frac{1}{2}$ und $\delta_2 = 1$.

Wie für die klassische Monte-Carlo Methode gilt auch hier für das Quadrat des Bias

$$(E[F(u_L)] - E[F(u)])^2 \leq c \left(m_L^{-\delta_1} + n_L^{-\delta_2} \right) \quad (4.14)$$

Aus (4.1), (4.13) und (4.14) folgt für den Fehler

$$\begin{aligned} e(\hat{Y}_{ML}) &\preceq \left(\sum_{l=0}^L N_l^{-1} \left(m_l^{-\delta_1} + n_l^{-\delta_2} \right) + \left(m_L^{-\delta_1} + n_L^{-\delta_2} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{l=0}^L N_l^{-1} \left(m_l^{-\frac{1}{2}} + n_l^{-1} \right) + \left(m_L^{-\frac{1}{2}} + n_L^{-1} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

und für die Kosten gilt

$$C(\hat{Y}_{ML}) = \sum_{l=0}^L N_l m_l n_l. \quad (4.16)$$

Wir setzen

$$u_l := u_{m^l}^{n_l}$$

mit

$$n_l = \sqrt{M^l}, \quad m_l = 4M^l$$

für $l \in \mathbb{N}_0$ und einer natürlichen Zahl $\sqrt{M} \geq 2$. Mit diesen Parametern ist (R) erfüllt und die Voraussetzungen des Satzes 2.2 sind mit

$$\alpha = \frac{\delta_1}{2} = \frac{1}{4}, \quad \beta = \delta_1 = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{2}$$

erfüllt, vgl. (4.15) und (4.16). Für die Folge von Multi-level Monte-Carlo Methoden $\hat{Y}_{ML} = \hat{Y}_{ML}^L$ mit $L \in \mathbb{N}$ gilt demnach

$$e(\hat{Y}_{ML}) \preceq C(\hat{Y}_{ML})^{-\frac{\alpha}{\max(1+\gamma+2\alpha-\beta, 1+\gamma)}} = C(\hat{Y}_{ML})^{-\frac{\delta_1}{3}} = C(\hat{Y}_{ML})^{-\frac{1}{6}}.$$

Wie in (4.12) gezeigt wurde, gilt für die Folge von klassische Monte-Carlo Methoden nur

$$e(\hat{Y}_{MC}) \preceq C(\hat{Y}_{MC})^{-\frac{1}{2(1+\frac{1}{\delta_1}+\frac{1}{\delta_2})}} = C(\hat{Y}_{MC})^{-\frac{1}{8}}.$$

Durch die Multi-level Methode erhalten wir also eine Verbesserung der Konvergenzordnung von $\frac{1}{8}$ auf $\frac{1}{6}$.

Bemerkung 4.1 Die soeben gezeigten Konvergenzordnungen $\frac{1}{8}$ für die klassische Monte-Carlo Methode und $\frac{1}{6}$ für die Multi-level Methode sind auch gültig, falls $u_0 \in C^3([0, 1])$ und das Funktional $F : B \rightarrow \mathbb{R}$ pfadunabhängig ist, d.h. $B = C([0, 1])$. Die Voraussetzung an das Funktional lautet dann:

(I) Für alle $v, w \in C([0, 1])$ gilt

$$|F(v) - F(w)| \leq (\|v\|_2 + \|w\|_2) \|v - w\|_2.$$

Die Konvergenzordnungen können analog wie im pfadabhängigen Fall gezeigt werden.

Bemerkung 4.2 Gilt für die Anfangsbedingung der SPDE nur $u_0 \in C([0, 1])$, so können im pfadunabhängigen Fall die Konvergenzordnungen

$$\frac{1}{2(1 + \frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2})}$$

für die klassischen Monte-Carlo Methoden und

$$\frac{\delta_1}{3}$$

für die Multi-level Monte-Carlo Methoden für jedes $\delta_1 < \frac{1}{4}$ und $\delta_2 < \frac{1}{2}$ analog gezeigt werden.

4.1.4 Konvergenzordnungen im Vergleich

Mit den soeben gezeigten Konvergenzordnungen haben wir obere Schranken für den Fehler. Mit diesen Ergebnissen allein ist es zunächst einmal nicht möglich zu sagen, ob die Konvergenzrate der Multi-level Methoden wirklich größer ist als die der klassischen Monte-Carlo Methoden. Die klassischen Monte-Carlo Methoden können deutlich größere Konvergenzordnungen als $\frac{1}{8}$ besitzen. Untere Schranken für den Fehler der klassischen Monte-Carlo Methoden sind im Allgemeinen nicht bekannt. Wir können allerdings ein Verhältnis der Konvergenzordnungen der beiden Methoden bestimmen.

Wir betrachten wieder den Fall $u_0 \in C^3([0, 1])$. Aus Abschnitt 4.1.3 wissen wir, dass der Fehler der klassischen Monte-Carlo Methode nach oben beschränkt ist durch

$$e(\hat{Y}_{MC}) \leq N^{-\frac{1}{2}} + m^{-\frac{\delta_1}{2}} + n^{-\frac{\delta_2}{2}}.$$

Wir konstruieren nun eine untere Schranke für diesen Fehler. Dazu setzen wir zunächst einmal voraus, dass $V[F(u)] \neq 0$ ist. Wie in (4.13) erhält man

$$V[F(u_m^n) - F(u)] \leq E[(F(u_m^n) - F(u))^2] \leq c(m^{-\delta_1} + n^{-\delta_2}).$$

Dann gibt es $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ und $m \geq m_0$ gilt

$$V[F(u_m^n) - F(u)] \leq \frac{1}{4}V[F(u)].$$

Damit erhalten wir eine untere Schranke für die Varianzen $V[F(u_m^n)]$, die unabhängig von n und m ist, denn es gilt

$$V[F(u)] = V[F(u) - F(u_m^n) + F(u_m^n)] \leq \left((V[F(u) - F(u_m^n)])^{\frac{1}{2}} + (V[F(u_m^n)])^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} V[F(u_m^n)] &\geq \left((V[F(u)])^{\frac{1}{2}} - (V[F(u) - F(u_m^n)])^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\ &\geq \left((V[F(u)])^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{4}V[F(u)] \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4}V[F(u)], \end{aligned} \tag{4.17}$$

für alle $n \geq n_0$ und $m \geq m_0$.

Aus der Aussage des Satzes 3.2 können wir wie in (4.8) folgern, dass

$$|E[F(u_m^n) - F(u)]| \preceq m^{-\frac{\delta_1}{2}} + n^{-\frac{\delta_2}{2}} = m^{-\frac{1}{4}} + n^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.18)$$

Es ist aber durchaus möglich, dass der Bias von $F(u_m^n)$ auch größere Konvergenzordnungen besitzt. Falls es α_1 und α_2 gibt, so dass

$$|E[F(u_m^n) - F(u)]| \asymp m^{-\alpha_1} + n^{-\alpha_2},$$

dann ist $\alpha_1 \geq \frac{1}{4}$, $\alpha_2 \geq \frac{1}{2}$ und wegen (4.17) gilt für den Fehler der klassischen Monte-Carlo Methode

$$\begin{aligned} e(\hat{Y}_{MC}) &= \left(N^{-1} V[F(u_m^n)] + (E[F(u_m^n) - F(u)])^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\asymp \left(N^{-1} + (m^{-\alpha_1} + n^{-\alpha_2})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\asymp N^{-\frac{1}{2}} + m^{-\alpha_1} + n^{-\alpha_2}. \end{aligned}$$

Die Parameter m und n müssen so gewählt werden, dass die Bedingung (R) aus Kapitel 3.1.1 erfüllt ist. Unter dieser Bedingung sind die Parameter $N = N_n$ und $m = m_n$ bezogen auf die Fehlerschranken optimal gewählt, falls

$$N_n \asymp n^{2\alpha_2}, \quad m_n \asymp n^{\max\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, 2\right)}.$$

Da für die Kosten $C(\hat{Y}_{MC}) = Nmn$ gilt, folgt

$$e(\hat{Y}_{MC}) \asymp C(\hat{Y}_{MC})^{-\frac{1}{2 + \max\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{2}{\alpha_2}\right) + \frac{1}{\alpha_2}}}. \quad (4.19)$$

Die maximale Konvergenzordnung der Folge von klassischen Monte-Carlo Methoden in Abhängigkeit von α_1 und α_2 ist dann

$$\gamma_{MC} := \frac{1}{2 + \max\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{2}{\alpha_2}\right) + \frac{1}{\alpha_2}}.$$

Dabei ist zu beachten, dass wir in (4.19) eine obere und auch eine untere Schranke für den Fehler haben.

Als nächstes schauen wir uns den Fehler der Multi-level Monte-Carlo Methode an. Für

$$u_l := u_{m_l}^{n_l}$$

mit

$$n_l = \left(M^{\frac{1}{\max\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, 2\right)}} \right)^l, \quad m_l = 4M^l$$

sind (R) und die Voraussetzungen des Satzes 2.2 mit

$$\alpha = \frac{1}{\max(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{2}{\alpha_2})}, \quad \beta = \delta_1 = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{\max(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, 2)}$$

erfüllt. Mit N_l gemäß Satz 2.2 gilt für den Fehler der Multi-level Methode

$$e(\hat{Y}_{ML}) \leq C(\hat{Y}_{ML})^{-\frac{\alpha}{\max(1+\gamma+2\alpha-\beta, 1+\gamma)}} \leq C(\hat{Y}_{ML})^{-\frac{1}{2+\frac{1}{2}\max(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{2}{\alpha_2})+\frac{1}{\alpha_2}}}.$$

Definieren wir γ_{ML} als

$$\gamma_{ML} := \sup \left\{ a > 0 : e(\hat{Y}_{ML}) \leq C(\hat{Y}_{ML})^{-a} \right\},$$

so gilt

$$\gamma_{ML} \geq \frac{1}{2 + \frac{1}{2}\max(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{2}{\alpha_2}) + \frac{1}{\alpha_2}}.$$

Uns interessiert vor allem das Verhältnis von γ_{MC} und γ_{ML}

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{ML}}{\gamma_{MC}} &\geq \frac{\frac{1}{2+\frac{1}{2}\max(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{2}{\alpha_2})+\frac{1}{\alpha_2}}}{\frac{1}{2+\max(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{2}{\alpha_2})+\frac{1}{\alpha_2}}} = \frac{2 + \max(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{2}{\alpha_2}) + \frac{1}{\alpha_2}}{2 + \frac{1}{2}\max(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{2}{\alpha_2}) + \frac{1}{\alpha_2}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}\max(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{2}{\alpha_2})}{2 + \frac{1}{2}\max(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{2}{\alpha_2}) + \frac{1}{\alpha_2}} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2\min(2\alpha_1, \alpha_2) + 2} > 1 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Aus diesem Ergebnis können wir folgern, dass man auch ohne die bestmöglichen Konvergenzordnungen zu kennen eine bessere Konvergenzrate für die Folge von Multi-level Methoden erwarten kann als für die Folge von klassischen Monte-Carlo Methoden. Ist beispielsweise $\alpha_1 = \frac{\delta_1}{2} = \frac{1}{4}$ und $\alpha_2 = \frac{\delta_2}{2} = \frac{1}{2}$, so kann man für die Multi-level Methoden eine um mindestens den Faktor

$$\frac{\gamma_{ML}}{\gamma_{MC}} \geq 1 + \frac{1}{4\alpha_1 + 1 + \frac{2\alpha_1}{\alpha_2}} = \frac{4}{3} = 1.3333 \quad (4.21)$$

größere Konvergenzrate als für die klassische Monte-Carlo Methoden erwarten. Ist dagegen beispielsweise $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ und $\alpha_2 = 1$ so erhält man den Faktor

$$\frac{\gamma_{ML}}{\gamma_{MC}} \geq 1 + \frac{1}{4\alpha_1 + 1 + \frac{2\alpha_1}{\alpha_2}} = \frac{5}{4} = 1.25.$$

Im Kapitel 5 werden diese Verhältnisse der Konvergenzordnungen experimentell bestätigt.

Bemerkung 4.3 Betrachtet man Approximationen, die aus dem Differenzenverfahren mit implizitem Eulerverfahren hervorgehen, so kann bei der Wahl der Parameter m_n

$\max(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, 2)$ durch $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ ersetzt werden, da Bedingung (R) nicht erfüllt sein muss. Berücksichtigt man, dass beim impliziten Verfahren der Parameter n in die Kosten quadratisch eingeht (siehe Kapitel 3.1.1), so erhält man, analog wie bei dem expliziten Verfahren, bei entsprechender Parameterwahl für den Fehler der klassischen Monte-Carlo Methode

$$e(\hat{Y}_{MC}) \asymp C(\hat{Y}_{MC})^{-\frac{1}{2+\frac{1}{\alpha_1}+\frac{2}{\alpha_2}}}$$

und für den Fehler der Multi-level Methode

$$e(\hat{Y}_{ML}) \preceq C(\hat{Y}_{ML})^{-\frac{1}{2+\frac{1}{2\alpha_1}+\frac{2}{\alpha_2}}}$$

Werden γ_{MC} und γ_{ML} analog definiert wie für das explizite Verfahren, so erhält man

$$\frac{\gamma_{ML}}{\gamma_{MC}} \geq 1 + \frac{1}{4\alpha_1 + 1 + \frac{4\alpha_1}{\alpha_2}} > 1$$

und beispielsweise für $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ und $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ ist

$$\frac{\gamma_{ML}}{\gamma_{MC}} \geq 1 + \frac{1}{4\alpha_1 + 1 + \frac{4\alpha_1}{\alpha_2}} = \frac{5}{4} = 1.25. \quad (4.22)$$

Die Verbesserung der Konvergenzordnung durch die Multi-level Methode ist hier kleiner als bei dem entsprechenden Beispiel (4.21) des expliziten Verfahrens.

4.2 Spektral-Galerkin Verfahren

Auch für das Spektral-Galerkin Verfahren zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung soll die schwache Approximation mit Hilfe von Monte-Carlo Methoden untersucht werden. Insbesondere interessieren wir uns natürlich dafür, ob der Einsatz der Multi-level Methode entscheidende Verbesserungen bringt.

4.2.1 Klassische Monte-Carlo Methode

Wir verwenden die klassische Monte-Carlo Methode zur schwachen Approximation. Die Approximationen $u^n(T)$ von $u(T)$ werden mit dem Verfahren im Abschnitt 3.2.1 berechnet. Wir erhalten die klassische Monte-Carlo Methode

$$\hat{Y}_{MC} = \hat{Y}_{MC}^{n,N} = N^{-1} \sum_{j=1}^N F(u^{(n,j)}(T))$$

mit unabhängigen Kopien $u^{(n,1)}(T), \dots, u^{(n,N)}(T)$ von $u^n(T)$ als Approximation von $E[F(u(T))]$ mit einem Funktional $F : B \rightarrow \mathbb{R}$ mit $B = C([0, 1]^d)$, welches die folgende Eigenschaft erfülle:

(I) F ist Lipschitz-stetig, das heißt es gibt eine Konstante $c > 0$, so dass für alle $v, w \in C([0, 1]^d)$ gilt

$$|F(v) - F(w)| \leq c \|v - w\|_2$$

Aus der Lipschitz-Stetigkeit folgt außerdem, dass F höchstens von linearem Wachstum ist, das heißt

$$|F(v)| \leq c(1 + \|v\|_2)$$

mit einer Konstanten c . Um die Varianz der Monte-Carlo Methode \hat{Y}_{MC} abzuschätzen, zeigen wir zunächst einmal, dass $\sum_{i \in \mathcal{I}} E[(\hat{Y}_i(T))^2]$ nach oben beschränkt ist. Es gilt

$$\hat{Y}_i(T) = \hat{Y}_i(0) \prod_{k=1}^{\nu_i} \frac{1}{1 + \mu_i(t_{k,i} - t_{k-1,i})} + \sum_{l=1}^{\nu_i} \left(\prod_{k=l}^{\nu_i} \frac{1}{1 + \mu_i(t_{k,i} - t_{k-1,i})} \right) (\beta_i(t_{l,i}) - \beta_i(t_{l-1,i})),$$

wobei

$$\frac{1}{1 + \mu_i(t_{k,i} - t_{k-1,i})} \leq e^{-c \mu_i(t_{k,i} - t_{k-1,i})},$$

siehe ([17], S.9). Daraus folgt mit der Unabhängigkeit der Inkremente der Brownschen Bewegung

$$\begin{aligned} E[(\hat{Y}_i(T))^2] &= \left(\langle \xi, \varphi_i \rangle \prod_{k=1}^{\nu_i} \frac{1}{1 + \mu_i(t_{k,i} - t_{k-1,i})} \right)^2 \\ &\quad + 2 \langle \xi, \varphi_i \rangle \prod_{k=1}^{\nu_i} \frac{1}{1 + \mu_i(t_{k,i} - t_{k-1,i})} \sum_{l=1}^{\nu_i} \left(\prod_{k=l}^{\nu_i} \frac{1}{1 + \mu_i(t_{k,i} - t_{k-1,i})} \right) E[(\beta_i(t_{l,i}) - \beta_i(t_{l-1,i}))] \\ &\quad + \sum_{l=1}^{\nu_i} \left(\prod_{k=l}^{\nu_i} \frac{1}{1 + \mu_i(t_{k,i} - t_{k-1,i})} \right)^2 E[(\beta_i(t_{l,i}) - \beta_i(t_{l-1,i}))^2] \\ &= \langle \xi, \varphi_i \rangle^2 e^{-2c \mu_i(T-t_{0,i})} + \sum_{l=1}^{\nu_i} e^{-2c \mu_i(T-t_{l,i})} (t_{l,i} - t_{l-1,i}) \\ &\leq c e^{-c \mu_i T} + c \int_0^T e^{-c \mu_i(T-t)} dt \\ &= c e^{-c \mu_i T} + c \frac{1}{\mu_i} (1 - e^{-c \mu_i T}) \\ &\leq c e^{-c i^2 T} + c i^{-2}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} E[(\hat{Y}_i(T))^2] \leq c \sum_{i \in \mathcal{I}} (e^{-c i^2 T} + i^{-2}) < c. \quad (4.23)$$

Die Beschränktheit von $\sum_{i \in \mathcal{I}} E[|\hat{Y}_i(T)|]$ lässt sich analog zeigen.

Da das Funktional höchstens von linearem Wachstum ist, kann die Varianz von $F(u^n(T))$ nach oben abgeschätzt werden durch eine Konstante c , denn

$$\begin{aligned}
V[F(u^n(T))] &\leq E[(F(u^n(T)))^2] \\
&\leq c E[(1 + \|u^n(T)\|_2)^2] \\
&\leq c (1 + 2E[\|u^n(T)\|_2] + E[\|u^n(T)\|_2^2]) \\
&\leq c \left(1 + 2 \sup_{x \in [0,1]} E \left[\left| \sum_{i \in \mathcal{I}} \hat{Y}_i(T) \varphi_i(x) \right| \right] + \sup_{x \in [0,1]} E \left[\left| \sum_{i \in \mathcal{I}} \hat{Y}_i(T) \varphi_i(x) \right|^2 \right] \right) \\
&\leq c \left(1 + 2E \left[\left| \sum_{i \in \mathcal{I}} \hat{Y}_i(T) 2^{d/2} \right| \right] + E \left[\left| \sum_{i \in \mathcal{I}} \hat{Y}_i(T) 2^{d/2} \right|^2 \right] \right) \\
&\leq c \left(1 + 2E \left[\sum_{i \in \mathcal{I}} |\hat{Y}_i(T)| \right] + E \left[\left(\sum_{i \in \mathcal{I}} |\hat{Y}_i(T)| \right)^2 \right] \right) \\
&\leq c.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

In der letzten Ungleichung wird die Unabhängigkeit der $\hat{Y}_i(T)$ und (4.23) verwendet. Für den Fehler der klassischen Monte-Carlo Methode gilt unter der Annahme (I) und mit dem Ergebnis der pfadweisen Approximation aus (3.42) und (3.43)

$$\begin{aligned}
e(\hat{Y}_{MC}) &= \left(N^{-1} V[F(u^n(T))] + (E[F(u^n(T)) - F(u(T))])^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(c N^{-1} + (E[c \|u^n(T) - u(T)\|_2])^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c (N^{-1} + E[\|u^n(T) - u(T)\|_2^2])^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c (N^{-\frac{1}{2}} + n^{-\frac{\delta}{2}}),
\end{aligned} \tag{4.25}$$

mit $\delta = 1$, falls der Kovarianz-Operator Q die Identität ist und $\delta = 2$ im Falle eines Spurklasse-Operators mit $\gamma > 3d - 2$. Die anderen möglichen Fälle folgen aus (3.43).

Für die Kosten $C(\hat{Y}_{MC})$ der Monte-Carlo Methode gilt

$$C(\hat{Y}_{MC}) \leq c N n.$$

Wie in Satz 2.1 folgt mit $\alpha = \frac{\delta}{2}$ und der Wahl $N = N_n \asymp n^{2\alpha}$

$$e(\hat{Y}_{MC}) \preceq C(\hat{Y}_{MC})^{-\frac{\alpha}{1+2\alpha}}. \tag{4.26}$$

Die Folge $(\hat{Y}_{MC}^{n, N_n})_{n \in \mathbb{N}}$ von klassischen Monte-Carlo Methode besitzt also Konvergenzordnung $\frac{1}{4}$, falls Q die Identität ist und $\frac{1}{3}$, falls Q ein Spurklasse-Operator mit $\gamma > 3d - 2$ ist.

4.2.2 Multi-level Monte-Carlo Methode

Wir setzen

$$w = (W(t))_{t \in [0, T]},$$

wobei W die (zylindrische) Brownsche Bewegung ist. Dann ist w eine Zufallsvariable mit Werten in

$$\bar{B} = C([0, T] \times [0, 1]^d).$$

Es seien $\varphi, \varphi_l : \bar{B} \rightarrow B$, $l \in \mathbb{N}_0$ messbare Abbildungen, die aus w die Lösung $u(T)$ zum Zeitpunkt T bzw. die Approximationen $u_l(T) := u^{n_l}(T)$ aus dem Spektral-Galerkin Verfahren mit Parametern $n_l = M^l$, $M \geq 2$ liefern, also

$$\begin{aligned} u(T) &= \varphi w \\ u_l(T) &= \varphi_l w. \end{aligned}$$

Wie in Kapitel 2.2.1 ist die Multi-level Monte-Carlo Methode für ein $L \in \mathbb{N}$ und $N_0, \dots, N_L \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$\hat{Y}_{ML} = \sum_{l=0}^L \hat{Y}_l \quad (4.27)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{Y}_0 &= N_0^{-1} \sum_{j=1}^{N_0} F(\varphi_0 w_0^{(j)}) \\ \hat{Y}_l &= N_l^{-1} \sum_{j=1}^{N_l} \left(F(\varphi_l w_l^{(j)}) - F(\varphi_{l-1} w_l^{(j)}) \right) \end{aligned}$$

und unabhängigen Kopien $w_l^{(j)}$ für $j = 1, \dots, N_l$, $l = 0, \dots, L$ von w .

Für den Fehler der Multi-level Methode gilt

$$e(\hat{Y}_{ML}) = \left(\sum_{l=0}^L N_l^{-1} V_l + (E[F(u_L(T)) - F(u(T))])^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

mit $V_l = V[F(u_l(T)) - F(u_{l-1}(T))]$. Die Varianzen V_l können abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} V_l &\leq \left[(E[(F(u_l(T)) - F(u(T)))^2])^{\frac{1}{2}} + (E[(F(u_{l-1}(T)) - F(u(T)))^2])^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\ &\leq \left[(E[c \|u_l(T) - u(T)\|_2^2])^{\frac{1}{2}} + (E[c \|u_{l-1}(T) - u(T)\|_2^2])^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\ &\leq c n_l^{-\delta}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

mit δ wie in (4.25), also $\delta = 1$ im Falle der Identität als Kovarianz-Operator und $\delta = 2$ im Falle eines Spurklasse-Operators mit $\gamma > 3d - 2$.

Die Abschätzung für den Bias kann analog wie bei der klassischen Monte-Carlo Methode durchgeführt werden

$$|E[F(u^n(T)) - F(u(T))]| \preceq n^{-\frac{\delta}{2}}. \quad (4.29)$$

Da außerdem die Kosten beschränkt sind durch

$$C(\hat{Y}_{ML}) \leq c \sum_{l=0}^L N_l M^l,$$

sind die Voraussetzungen des Satzes 2.2 mit $\alpha = \frac{\delta}{2}$ und $\beta = \delta$ erfüllt.

Für den Fehler der Multi-level Methoden gilt also, falls Q die Identität ist,

$$e(\hat{Y}_{ML}) \preceq C(\hat{Y}_{ML})^{-\frac{1}{2}} \log(C(\hat{Y}_{ML})) \quad (4.30)$$

und falls Q ein Spurklasse-Operator mit $\gamma > 3d - 2$ ist

$$e(\hat{Y}_{ML}) \preceq C(\hat{Y}_{ML})^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.31)$$

Dies ist eine deutliche Verbesserung im Vergleich zur Konvergenzordnung $\frac{1}{4}$ bzw. $\frac{1}{3}$ der klassischen Monte-Carlo Methode.

Untere Schranken für den Fehler haben wir leider nicht. Ob die Folge von klassischen Monte-Carlo Methoden wirklich nur Konvergenzrate $\frac{1}{4}$ bzw. $\frac{1}{3}$ hat, muss noch experimentell überprüft werden.

4.2.3 Konvergenzordnungen im Vergleich

Wie bei den Differenzenverfahren ist auch hier vor allem das Verhältnis der Konvergenzordnungen interessant. Wir wissen, dass

$$|E[F(u^n(T)) - F(u(T))]| \preceq \left(E \|u^n(T) - u(T)\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \asymp n^{-\frac{\delta}{2}}. \quad (4.32)$$

Falls es α gibt mit

$$|E[F(u^n(T)) - F(u(T))]| \asymp n^{-\alpha}, \quad (4.33)$$

so gilt $\alpha \geq \frac{\delta}{2}$ und für den Fehler der klassischen Monte-Carlo Methode gilt analog wie in 4.1.4 unter der Voraussetzung $V[F(u)] \neq 0$, dass

$$\begin{aligned} e(\hat{Y}_{MC}) &\asymp N^{-\frac{1}{2}} + n^{-\alpha} \\ &\asymp C(\hat{Y}_{MC})^{-\frac{1}{2+\frac{1}{\alpha}}}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Wir haben damit eine obere und untere Schranke für den Fehler und die maximale Konvergenzordnung in Abhängigkeit von α ist

$$\gamma_{MC} := \frac{1}{2 + \frac{1}{\alpha}}.$$

Für den Fehler der Multi-level Methode erhält man nach Satz 2.2

$$e(\hat{Y}_{ML}) \preceq \begin{cases} C(\hat{Y}_{MC})^{-\frac{1}{2}} \log(C(\hat{Y}_{MC})), & \beta = 1, \\ C(\hat{Y}_{MC})^{-\frac{1}{2}}, & \beta > 1. \end{cases} \quad (4.35)$$

Wir definieren γ_{ML} als

$$\gamma_{ML} := \sup \left\{ \alpha > 0 : e(\hat{Y}_{ML}) \preceq C(\hat{Y}_{ML})^{-\alpha} \right\}.$$

Im Fall $\beta = 1$ wird dieses Supremum nicht unbedingt angenommen. Es gilt allerdings immer

$$\gamma_{ML} \geq \frac{1}{2}.$$

Für das Verhältnis von γ_{ML} und γ_{MC} erhält man

$$\frac{\gamma_{ML}}{\gamma_{MC}} \geq \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2 + \frac{1}{\alpha}}} = \frac{2 + \frac{1}{\alpha}}{2} = 1 + \frac{1}{2\alpha} > 1. \quad (4.36)$$

Man kann hieraus folgern, dass die Konvergenzrate für die Multi-level Methoden für hinreichend große Parameter (bzw. Kosten) immer größer ist als die Konvergenzrate für die klassischen Monte-Carlo Methoden, falls solch ein α existiert. Für $\alpha = \frac{1}{2}$ beispielsweise erhält man

$$\frac{\gamma_{ML}}{\gamma_{MC}} \geq 1 + \frac{1}{2\alpha} = 2.$$

4.2.4 Explizite Lösung

Für die Wärmeleitungsgleichung (3.30) ist es möglich die Lösung explizit darzustellen. Dies können wir nutzen, um einen Vergleichswert für die Experimente in Kapitel 5 zu berechnen. Die Lösung u der Wärmeleitungsgleichung zu einem festen Zeitpunkt $t \in [0, T]$ ist gegeben durch

$$u(t, \cdot) = \int_0^t \int_0^1 G(t-s, \cdot, y) dW(s, y), \quad (4.37)$$

wobei G der Wärmeleitungskern aus (3.32) ist.

Weiter kann $u(t, \cdot)$ entwickelt werden in

$$u(t, \cdot) = \sum_{i \in \mathbb{N}^d} Y_i(t) \varphi_i \quad (4.38)$$

mit unabhängigen Ornstein-Uhlenbeck-Prozessen Y_i , $i = 1, 2, \dots$, die die stochastischen Differentialgleichungen

$$dY_i(t) = -\mu_i Y_i(t) dt + \lambda_i^{\frac{1}{2}} d\beta_i(t),$$

mit unabhängigen skalaren Brownschen Bewegungen

$$\beta_i(t) = \lambda_i^{-\frac{1}{2}} \langle W(t, \cdot), \varphi_i \rangle,$$

lösen. Für die Lösung Y_i einer solchen Differentialgleichung gilt

$$Y_i(t) = \lambda_i^{\frac{1}{2}} \int_0^t e^{-\mu_i(t-s)} d\beta_i(s) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$$

mit

$$\sigma_i^2 = \lambda_i^{\frac{1}{2}} \int_0^t e^{-2\mu_i(t-s)} ds = \frac{\lambda_i^{\frac{1}{2}}}{2\mu_i} (1 - e^{-2\mu_i t}).$$

Mit (4.38) können nun Realisierungen der Lösung der Wärmeleitungsgleichung simuliert werden, wobei die Summe nach endlich vielen Summanden abgebrochen werden muss.

Um den Erwartungswert von $F(u(t, \cdot))$ für ein Funktional $F : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ zu berechnen, kann man eine klassische Monte-Carlo Methode mit N unabhängigen Kopien $u(t, \cdot)^{(1)}, \dots, u(t, \cdot)^{(N)}$ von $u(t, \cdot)$ verwenden. Als Approximation für diesen Erwartungswert erhält man

$$N^{-1} \sum_{j=1}^N F(u(t, \cdot)^{(j)}).$$

Für das Funktional F , definiert durch

$$F(u(t, \cdot)) = \int_0^1 u^2(t, x) dx, \quad (4.39)$$

kann $E[F(u(t, \cdot))]$ für $t \in [0, T]$ sogar ohne Monte-Carlo Methode berechnet werden, denn wegen der Orthonormalität der φ_i gilt

$$\begin{aligned} E[F(u(t, \cdot))] &= E \left[\int_0^1 u^2(t, x) dx \right] \\ &= E \left[\int_0^1 \left(\sum_{i \in \mathbb{N}^d} Y_i(t) \varphi_i(x) \right)^2 dx \right] \\ &= E \left[\sum_{i \in \mathbb{N}^d} Y_i^2(t) \int_0^1 \varphi_i^2(x) dx \right] \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}^d} E[Y_i^2(t)] \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}^d} \sigma_i^2. \end{aligned}$$

5 Simulationen

Die in den vorherigen Kapiteln beschriebenen Verfahren beruhen auf Realisierungen der Inkremente der Brownschen Bewegung bzw. des Brownschen Blattes. In der Praxis werden diese Realisierungen simuliert. Für die Simulationen verwenden wir Zufallszahlen, die mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators, dem Mersenne Twister, generiert werden. Der Mersenne Twister liefert Pseudo-Zufallszahlen, die wir als Realisierungen von unabhängigen und auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen ansehen. Für die Simulation der Inkremente benötigen wir allerdings normalverteilte Zufallszahlen. Dazu kann die Box-Muller Methode verwendet werden. Sie transformiert einen auf dem Einheitsquadrat $[0, 1]^2$ gleichverteilten Zufallsvektor in einen zweidimensional standard-normalverteilten Zufallsvektor. Durch Multiplikation mit $\sigma \in \mathbb{R}$ erhält man aus einer standard normalverteilten Zufallsvariable eine normalverteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2 .

Die Inkremente der Brownschen Bewegung lassen sich auf diese Weise simulieren, denn bekanntlich gilt

$$W(t_{i+1}) - W(t_i) \sim \mathcal{N}(0, t_{i+1} - t_i), \quad i = 0, \dots, m - 1$$

$$W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1}) \text{ sind unabhängig}$$

für $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = T$.

Ist W wie bei den Verfahren für stochastische partielle Differentialgleichungen ein Brownsches Blatt auf $[0, T] \times [0, 1]$, so gilt

$$W(t_{i+1}, x_{k+1}) - W(t_i, x_{k+1}) - (W(t_{i+1}, x_k) - W(t_i, x_k)) \sim \mathcal{N}(0, (t_{i+1} - t_i)(x_{k+1} - x_k))$$

und die Inkremente sind unabhängig für $i = 0, \dots, m - 1$ und $k = 0, \dots, n - 1$. Auch die Inkremente des Brownschen Blattes können somit wie oben beschrieben simuliert werden.

Um die verschiedenen Monte-Carlo Methoden vergleichen zu können, wird jeweils der experimentell berechnete Fehler in Abhängigkeit der Kosten der Methode dargestellt. Um den Fehler einer Monte-Carlo Methode \hat{Y} zu berechnen, wurden Realisierungen von 100 unabhängigen Kopien $\hat{Y}^{(1)}, \dots, \hat{Y}^{(100)}$ von \hat{Y} simuliert. Die Simulationsergebnisse bezeichnen wir mit $y^{(1)}, \dots, y^{(100)}$ und setzen

$$\text{RMSE}_{100} = \left(\frac{1}{100} \sum_{j=1}^{100} \left(y^{(j)} - E[F(u)] \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.1)$$

Aufgrund der sehr langen Laufzeiten der Programme, die in der Größenordnung von mehreren Tagen liegen, kann die Anzahl der unabhängigen Kopien nicht beliebig erhöht

werden. Eine Begründung dafür, dass 100 Realisierungen ausreichend sind, erhält man bei der Betrachtung der Simulationen einer Realisierung der Zufallsvariablen

$$D_M = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \hat{Y}^{(j)}$$

für $M = 1, \dots, 200$ mit unabhängigen Kopien $\hat{Y}^{(j)}$ der Monte-Carlo Methode \hat{Y} und den dazugehörigen Konfidenzintervallen. In Abbildung 5.1 sind als Beispiel Simulationen für D_M und Konfidenzintervalle zum Niveau 0.95 für eine klassische Monte-Carlo Methode \hat{Y}_{MC} zur Approximation der Lösung der Wärmeleitungsgleichung aus Abschnitt 5.2.1 zu sehen. Dabei liegt der Monte-Carlo Methode $\hat{Y}_{MC} = \hat{Y}_{MC}^{n,m,N}$ das Differenzenverfahren und feste Parameter n, m und N zugrunde (vgl. Abbildung 5.8). Wie man in Abbildung 5.1 sieht, sind bei etwa $M = 100$ die Konfidenzintervalle und damit auch die Schwankungen von D_M nicht mehr allzu groß. Vergleicht man die Größe der Konfidenzintervalle bei $M = 100$ und $M = 200$ so sieht man, dass die Verbesserung bei einer Verdopplung der Anzahl der Kopien von \hat{Y} gering ist.

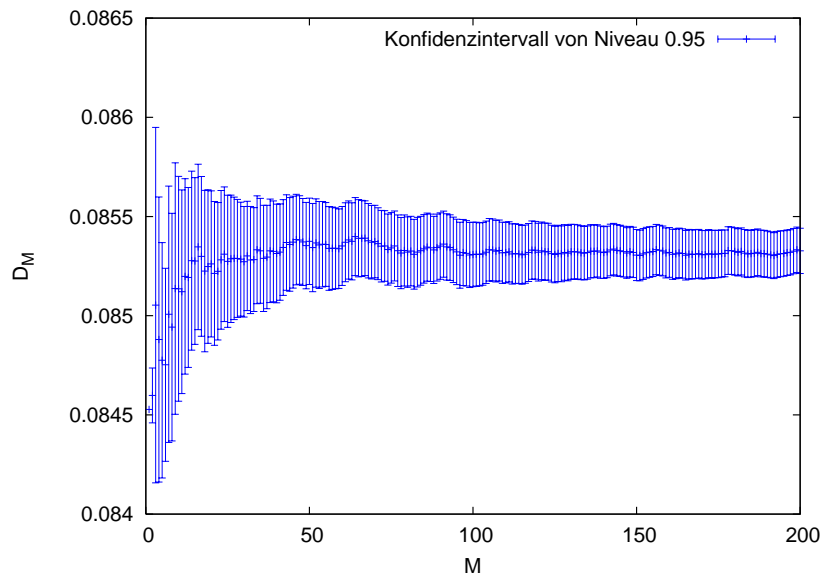


Abbildung 5.1: D_M und Konfidenzintervalle

5.1 Stochastische gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir beginnen mit einem Beispiel aus der Finanzmathematik. Dazu betrachten wir die stochastische Differentialgleichung

$$du(t) = ru(t)dt + \sigma u(t)dW(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (5.2)$$

mit $u(0) = 1$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$ und einer Brownschen Bewegung W . Diese Differentialgleichung besitzt eine eindeutige starke Lösung u , die gegeben ist durch

$$u(t) = u(0)e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)}, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (5.3)$$

Die Lösung u ist also eine geometrische Brownsche Bewegung. Wie in Kapitel 2.3 verwenden wir als Basis ein einfaches Eulerverfahren und vergleichen dann die klassische Monte-Carlo Methode (MC) mit der Multi-level Monte-Carlo Methode (ML) zur Approximation von $E[F_i(u)]$ für die Funktionale

$$\begin{aligned} F_1(u) &= u(T) \\ F_2(u) &= \max(u(T) - K, 0) \\ F_3(u) &= \max\left(\int_0^T u(t)dt - K, 0\right) \end{aligned}$$

mit $T = 1$ und $K = 1$. Das Funktional F_1 ist die Auswertung von u zum Endzeitpunkt, F_2 ist die Auszahlungsfunktion eines europäischen Calls und F_3 ist die einer Asiatischen Option. Diskontierungsfaktoren wurden der Einfachheit halber weggelassen.

Die Erwartungswerte $E[F_i(u)]$ können für die Funktionale F_1 und F_2 explizit berechnet werden. Es gilt

$$\begin{aligned} E[F_1(u)] &= u(0)e^{rT} \\ E[F_2(u)] &= u(0)e^{rT} \Phi\left(\frac{\log(u(0)/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \Phi\left(\frac{\log(u(0)/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \end{aligned}$$

mit der Verteilungsfunktion Φ der Standard-Normalverteilung. Letztere Formel entspricht der Black-Scholes-Formel, allerdings ohne Diskontierung. Mit der expliziten Formel (5.3) für die Lösung u und der klassischen Monte-Carlo Methode kann eine sehr gute Approximation von $E[F_3(u)]$ berechnet werden, die wir als exakte Lösung ansehen. Das heißt wir verwenden diese Approximation anstelle von $E[F_3(u)]$ in der Berechnung von RMSE_{100} . Eine Tabelle mit diesen Vergleichswerten und den Parametern, die für die Monte-Carlo Methoden gewählt wurden, ist in Kapitel 5.4 zu finden, damit die Ergebnisse reproduzierbar sind.

In Kapitel 2.3.1 wurde gezeigt, dass für den Fehler der klassischen Monte-Carlo Methoden $e(\hat{Y}_{MC}) \leq N^{-\frac{1}{2}} + n^{-1}$ gilt, wobei n der Diskretisierungsparameter der Zeit für das Eulerverfahren und N die Anzahl der unabhängigen Kopien für die Monte-Carlo Methode ist. Wegen diesem Zusammenhang wurden die Parameter n und N so gewählt, dass $N \asymp n^2$ gilt. In 2.3.2 wurde gezeigt, dass für die Multi-level Methoden die Voraussetzungen des Satzes 2.2 mit $\alpha = 1$ und $\beta = 1$ erfüllt sind. Deswegen sind die Parameter N_l für $l = 0, \dots, L$ bezüglich der oberen Fehlerschranke optimal gewählt, wenn $N_l \asymp (M^l)^{-1}(M^L)^2$. Die optimalen Parameter sind leider immer nur bis auf Konstanten bekannt. Die Experimente wurden deswegen jeweils mit verschiedenen Proportionalitätskonstanten durchgeführt und die besten Ergebnisse wurden für die Abbildungen ausgewählt. Bei dieser Auswahl wurde in erster Linie darauf geachtet, dass die Konvergenzrate

maximal ist und als zweites sollten die Werte der Fehler möglichst klein sein.

Die Geraden in den Abbildungen sind Regressionsgeraden, wobei beachtet werden muss, dass die Achsen logarithmisch sind. In der ursprünglichen Skalierung entsprechen sie Funktionen der Form $b C^{-a}$, wobei die Variable C den Kosten, also der Anzahl der Aufrufe des Zufallszahlengenerators, entspricht. Die negative Steigung a der Geraden entspricht dann der Konvergenzrate der Methode.

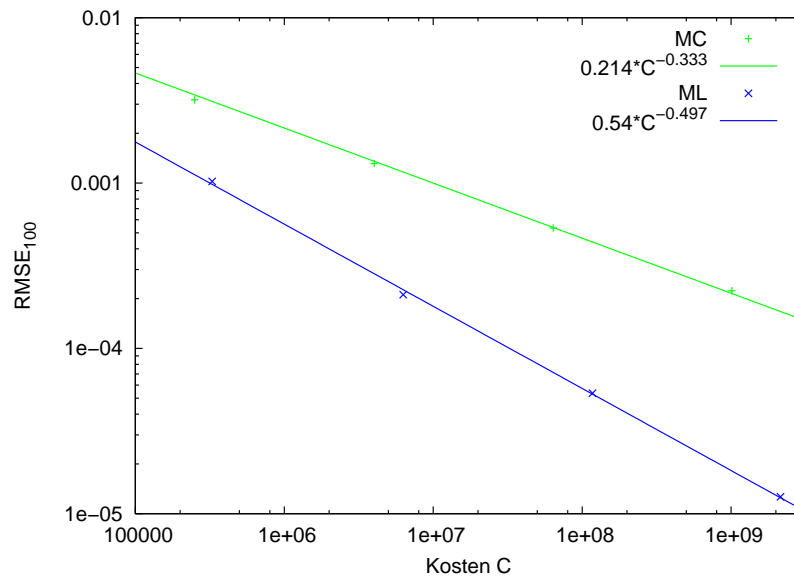


Abbildung 5.2: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_1(u)]$ für SDE

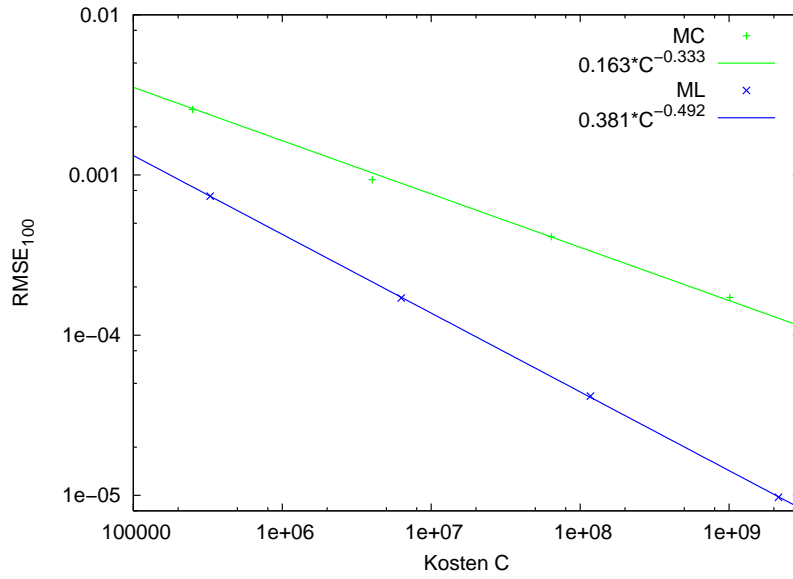


Abbildung 5.3: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_2(u)]$ für SDE

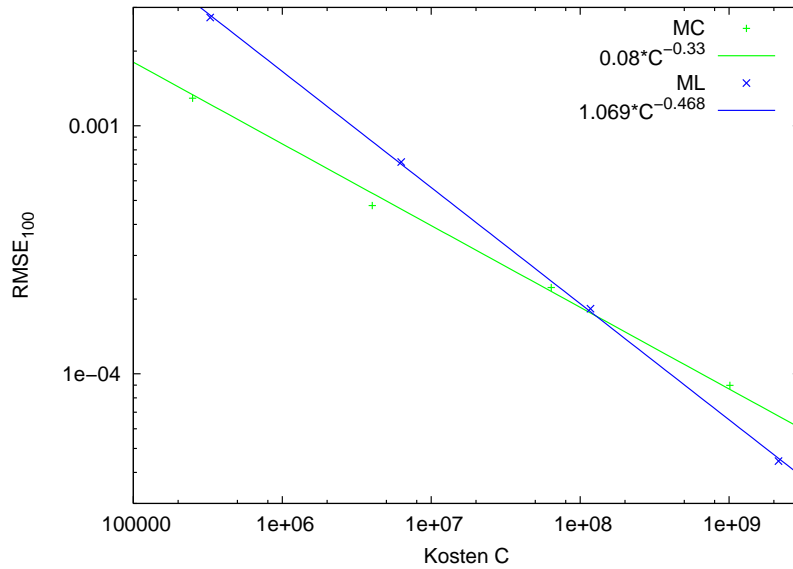


Abbildung 5.4: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_3(u)]$ für SDE

Nach den theoretischen Ergebnissen aus Kapitel 2.3.1 bzw. 2.3.2 sollte für den Fehler der MC-Methoden gelten $e(\hat{Y}_{MC}) \preceq C^{-\frac{1}{3}}$ und für den Fehler der ML-Methoden $e(\hat{Y}_{ML}) \preceq C^{-\frac{1}{2}} \log(C)$. Obwohl sich die Konvergenzordnung der ML-Methoden für größer werdende Kosten der Konvergenzordnung $\frac{1}{2}$ nähert, können wir nicht unbedingt erwarten, dass die Konvergenzrate der ML-Methoden $\frac{1}{2}$ ist für Kosten im Bereich von $10^5 - 10^9$.

Der Faktor $\log(C)$ kann hierbei nicht ganz vernachlässigt werden.

Die folgenden beiden Abbildungen sollen helfen eine bessere Vorstellung der Fehlerschranken zu bekommen.

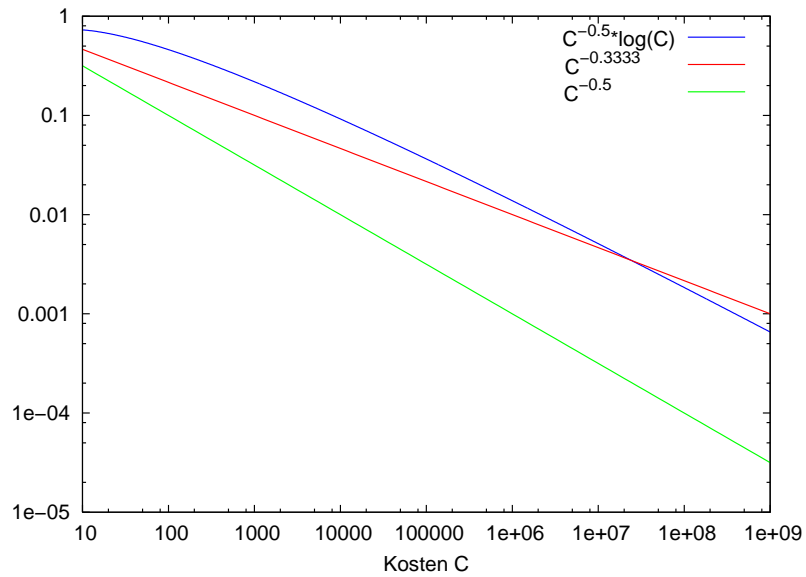


Abbildung 5.5: Fehlerschranken im Vergleich

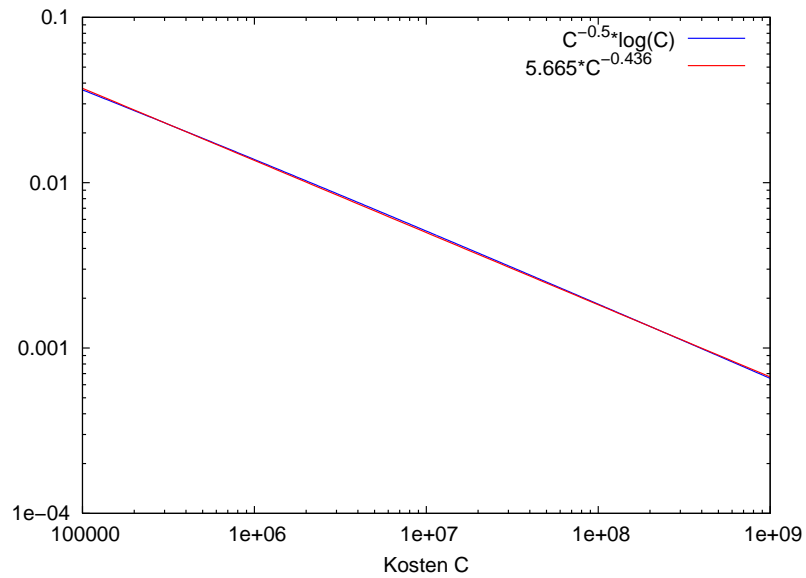


Abbildung 5.6: Fehlerschranke der ML-Methode und Regressionsgerade

In Abbildung 5.6 ist $C^{-\frac{1}{2}} \log C$ im Bereich von $C = 10^5$ bis $C = 10^9$ zu sehen. Das ist etwa der Bereich, in dem auch die Kosten der Monte-Carlo Methoden liegen. Außerdem zeigt die Abbildung eine Regressionsgerade aus den Daten $(C, C^{-\frac{1}{2}} \log C)$ mit $C = 10^k$, $k = 5, \dots, 9$. Genauer gesagt entspricht diese Gerade der Funktion $5.652 C^{-0.436}$. Wir können daraus folgern, dass etwa 0.436 die Konvergenzrate ist, die für die ML-Methoden in diesem Kostenbereich mindestens erwartet werden kann.

Schauen wir nun noch einmal zurück zu den Abbildungen 5.2–5.4, so sehen wir, dass die Konvergenzraten der MC-Methoden wie erwartet etwa $\frac{1}{3}$ sind. Die Konvergenzraten der ML-Methoden sind deutlich größer als $\frac{1}{3}$ und in der Tat sind sie immer mindestens 0.436. Die experimentellen Ergebnisse erfüllen damit genau die Erwartungen aus der Theorie.

5.2 Differenzenverfahren

Als nächstes werden die experimentellen Ergebnisse für die MC-Methode und die ML-Methode, angewandt auf die Differenzenverfahren aus Kapitel 3.1, vorgestellt. In den Abbildungen 5.8–5.11 ist wieder der Fehler der jeweiligen Methode in Abhängigkeit der Kosten dargestellt. Die theoretischen Ergebnisse dazu sind in Kapitel 4.1 zu finden.

5.2.1 Quasi-lineare parabolische stochastische partielle Differentialgleichungen

Wärmeleitungsgleichung

Das einfachste Beispiel einer quasi-linearen stochastischen Differentialgleichung (3.5)–(3.7) ist die Wärmeleitungsgleichung mit

$$g \equiv 0, \quad f \equiv 0, \quad \sigma \equiv 1, \quad u_0 \equiv 0.$$

Abbildung 5.7 zeigt pfadweise Approximationen dieser Wärmeleitungsgleichung zum Zeitpunkt $T = 1$ zu verschiedenen Parametern, aber jeweils zum selben Pfad des Brownschen Blattes W .

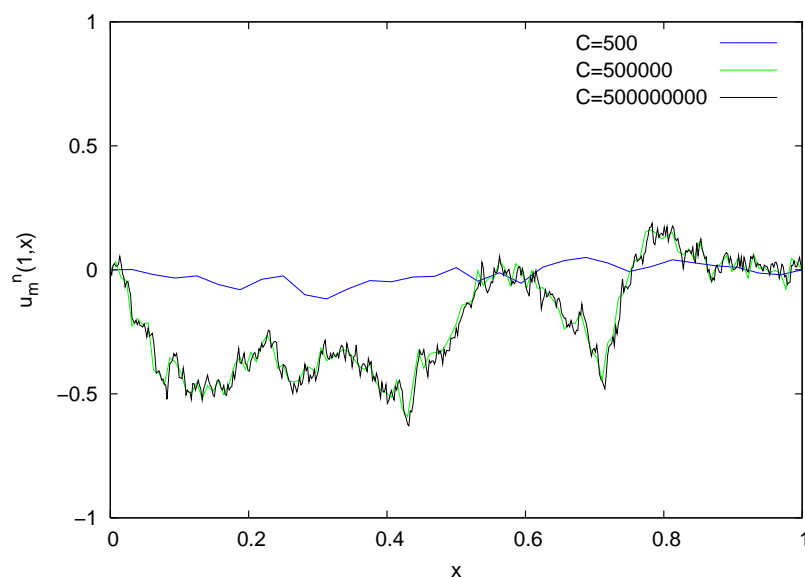


Abbildung 5.7: Simulationen von $u_m^n(1)$

Für die schwache Approximation wurden als Funktionale

$$F_1(u) = \int_0^1 u^2(x, 1) dx$$

$$F_2(u) = \max_{x \in [0, 1]} u(x, 1)$$

$$F_3(u) = \int_0^1 u(x, 1) dx$$

$$F_4(u) = \int_0^1 \int_0^1 u^2(x, t) dx dt$$

gewählt, wobei $T = 1$ der Endzeitpunkt ist.

Wie in 4.2.4 kann eine sehr gute Näherung von $E[F_i(u)]$ berechnet werden. Damit haben wir einen Vergleichswert für unsere Approximationen, die aus den Differenzenverfahren hervorgehen. Diese Werte sind in Tabellen in Kapitel 5.4 zu finden.

In den Abbildungen 5.8–5.15 wird die MC-Methode mit der ML-Methode verglichen, wobei jeweils das Differenzenverfahren mit explizitem oder implizitem Eulerverfahren zugrunde liegt.

Für den Fehler der MC-Methoden gilt

$$e(\hat{Y}_{MC}) \preceq N_n^{-\frac{1}{2}} + m_n^{-\frac{1}{4}} + n^{-\frac{1}{2}}$$

nach Kapitel 4.1.3. Das heißt die Parameter sind in Bezug auf die obere Schranke optimal, wenn $N_n \asymp n$ und $m_n \asymp n^2$. Wir können damit für die MC-Methoden Konvergenzrate $\frac{1}{8}$

erwarten. Da für die ML-Methoden mit

$$u_l := u_{m_l}^{n_l}, \quad n_l = \sqrt{M^l}, \quad m_l = 4M^l$$

die Voraussetzungen des Satz 2.2 mit $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{1}{2}$ und $\gamma = \frac{1}{2}$ erfüllt sind, wählen wir $N_l \asymp (M^L)^{\frac{3}{4}}(M^l)^{-\frac{3}{4}}$ und erwarten Konvergenzrate $\frac{1}{6}$.

Es werden zuerst die Ergebnisse der Methoden, die als Basis das explizite Eulerverfahren verwenden, dargestellt.

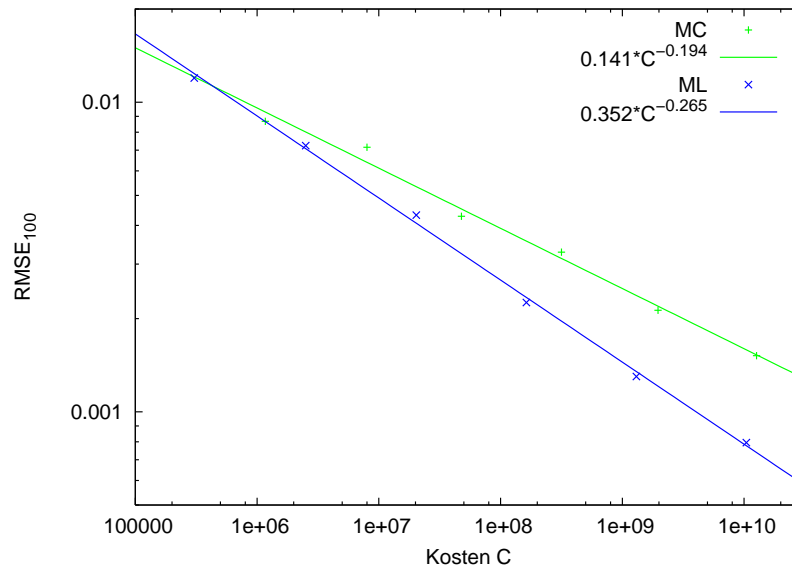


Abbildung 5.8: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_1(u)]$ für Wärmeleitungsgleichung mit explizitem Eulerverfahren

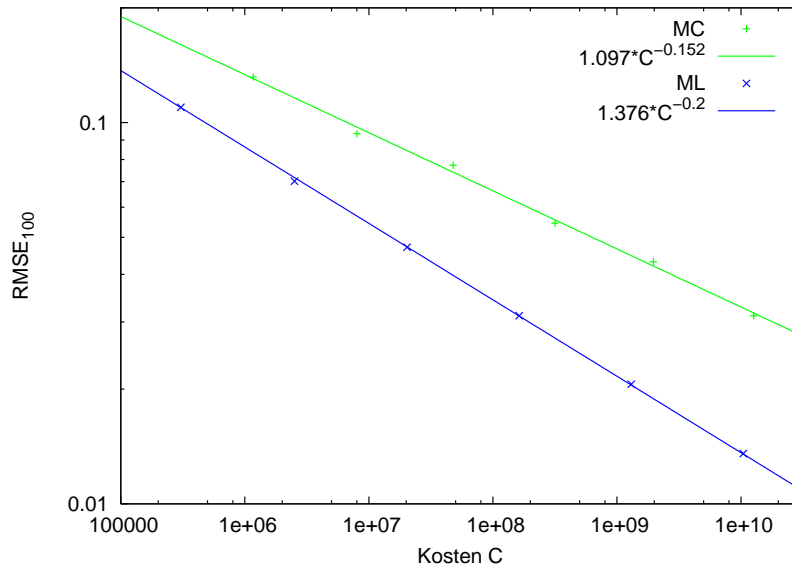


Abbildung 5.9: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_2(u)]$ für Wärmeleitungsgleichung mit explizitem Eulerverfahren

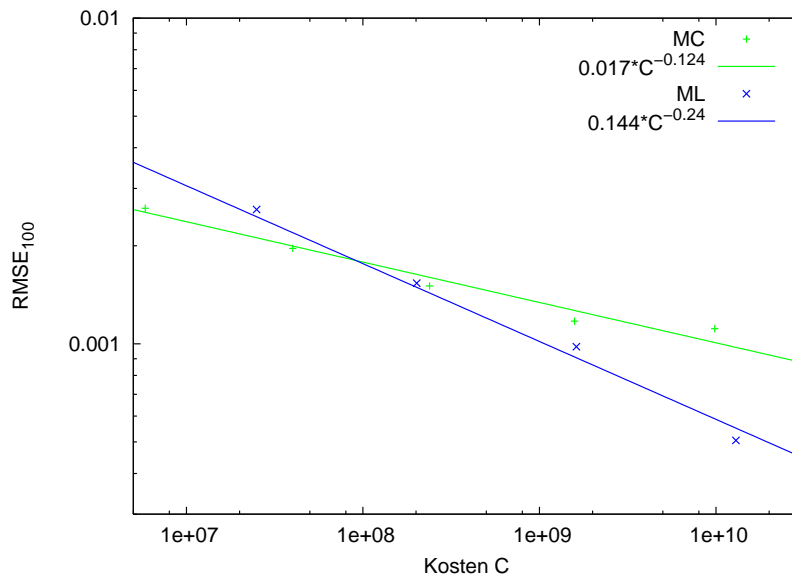


Abbildung 5.10: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_3(u)]$ für Wärmeleitungsgleichung mit explizitem Eulerverfahren

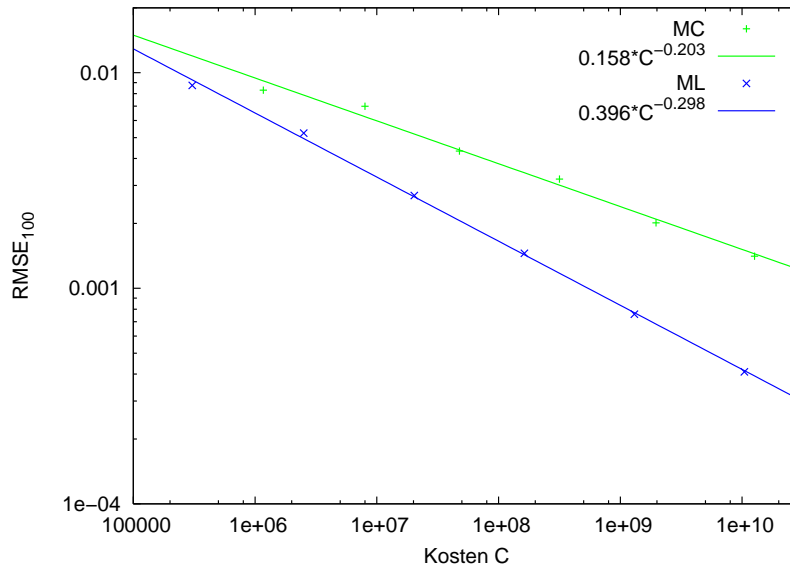


Abbildung 5.11: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_4(u)]$ für Wärmeleitungsgleichung mit explizitem Eulerverfahren

Die nach Kapitel 4.1.3 mindestens erwarteten Konvergenzraten sind für die MC-Methoden $\frac{1}{8} = 0.125$ und für die ML-Methoden $\frac{1}{6} = 0,167$. Die Schranken für die Fehler sind allerdings nur obere Schranken, deshalb können die Konvergenzraten auch größer sein. Wie in Abbildung 5.8–5.11 zu sehen ist, sind die Konvergenzraten der MC-Methoden in der Tat oft größer als $\frac{1}{8}$. Die Konvergenzraten der ML-Methoden sind allerdings auch stets größer als $\frac{1}{6}$. Interessant ist für uns vor allem das Verhältnis der Konvergenzraten der verschiedenen Methoden. Aufgrund der theoretischen Ergebnisse des Kapitels 4.1.4 erwarten wir zumindest, dass die Konvergenzraten der ML-Methoden größer sind als die der MC-Methoden. Rechnet man die Quotienten der Raten aus, so stellt man fest, dass die Rate der ML-Methoden in den Abbildungen immer mindestens 1.3 Mal so groß ist wie die entsprechende Rate der MC-Methoden.

Die Laufzeiten der Programme für die Monte-Carlo Methoden sind zu den Kosten C proportional. Für Kosten $C = 10^{10}$ liegt die Laufzeit zur Berechnung von RMSE_{100} in der Größenordnung von mehreren Tagen.

Nun werden auch die Resultate der Monte-Carlo Methoden mit dem impliziten Eulerverfahren vorgestellt.

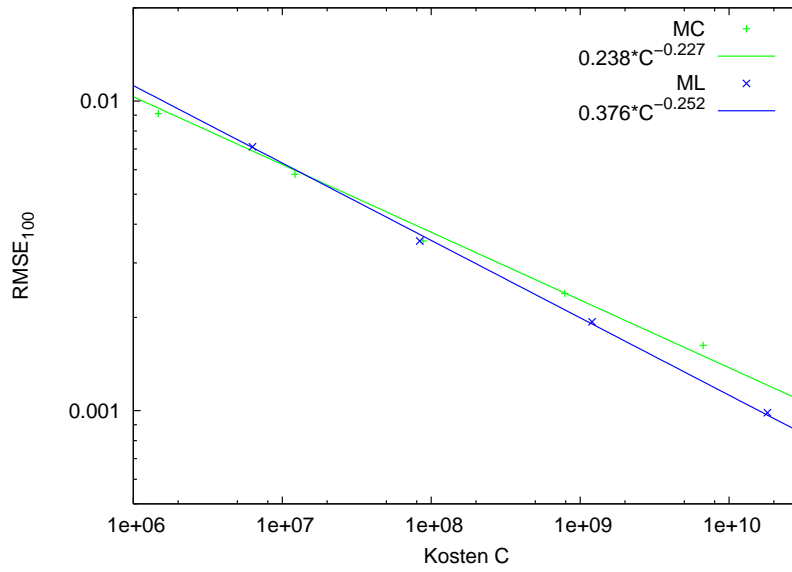


Abbildung 5.12: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_1(u)]$ für Wärmeleitungsgleichung mit implizitem Eulerverfahren

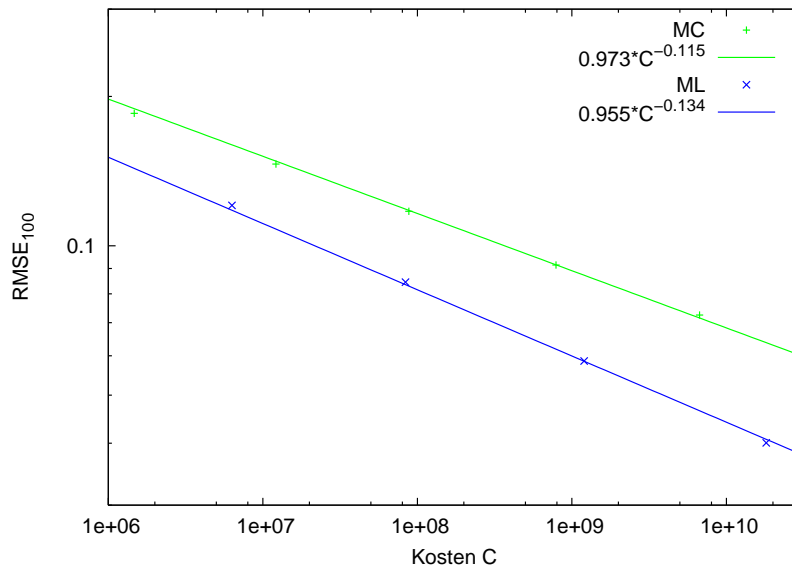


Abbildung 5.13: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_2(u)]$ für Wärmeleitungsgleichung mit implizitem Eulerverfahren

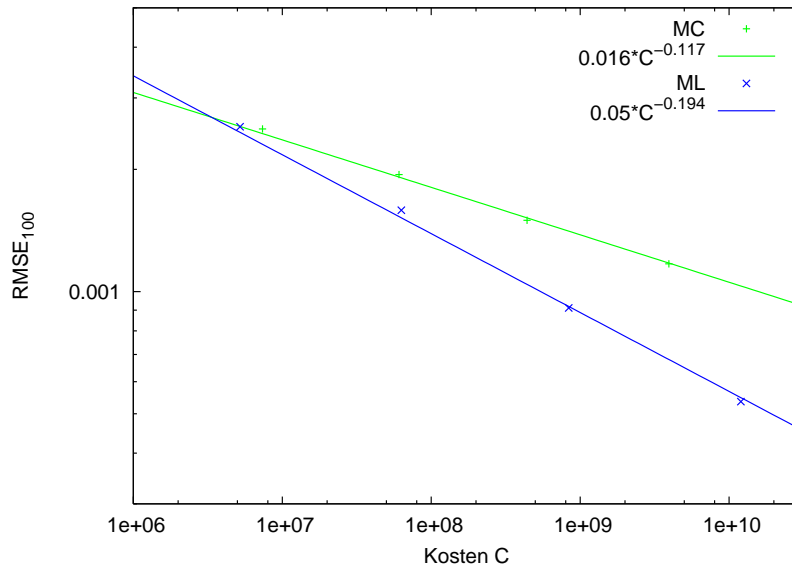


Abbildung 5.14: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_3(u)]$ für Wärmeleitungsgleichung mit implizitem Eulerverfahren

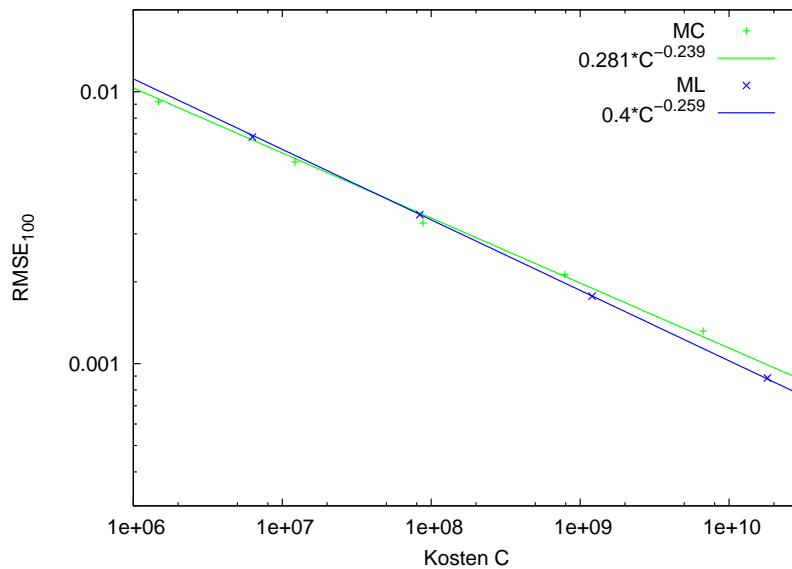


Abbildung 5.15: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_4(u)]$ für Wärmeleitungsgleichung mit implizitem Euler

Wie schon in Kapitel 3.1.1 erwähnt, sind die Kosten für das implizite Eulerverfahren größer als für das explizite Eulerverfahren. Die Definition der Kosten, über die Anzahl der Aufrufe des Zufallszahlengenerators können wir für das Differenzenverfahren mit im-

plizitem Eulerverfahren nicht mehr verwenden. Um trotzdem das explizite Verfahren mit dem impliziten Verfahren vergleichen zu können, fügen wir den Kosten einen Korrekturfaktor hinzu. Wir wissen, dass der Parameter n zu einem gewissen Anteil quadratisch in die Kosten des impliziten Verfahrens eingeht. Für die hier verwendete Implementierung kann man für die Kosten C das Modell $C = mn(1 + c(n - 1))$ mit einer Konstante c aufstellen. Experimentell wurde c bestimmt und man erhält als Kosten für die Berechnung einer Realisierung des Differenzenverfahrens mit implizitem Eulerverfahren $mn(1 + 0.065(n - 1))$, falls die Kosten für das Verfahren mit explizitem Eulerverfahren mn sind. Daraus lässt sich folgern, dass die mindestens erwarteten Konvergenzraten für die Monte-Carlo Methoden mit implizitem Eulerverfahren kleiner sind als mit explizitem Eulerverfahren. Unter der Berücksichtigung, dass n quadratisch in die Kosten eingeht, kann analog wie in 4.1.3 gezeigt werden, dass die MC-Methoden mit implizitem Eulerverfahren Konvergenzordnung $\frac{1}{10}$ besitzen. Die Voraussetzung (iii) aus Satz 2.2 ist für das implizite Eulerverfahren nicht mehr mit $\gamma = \frac{1}{2}$ erfüllt, sondern nur noch mit $\gamma = 1$. Man erhält als Konvergenzordnung $\frac{1}{8}$ für die ML-Methoden.

Leider müssen wir aber auch feststellen, dass in den Abbildungen 5.12–5.15 keine große Verbesserung durch die ML-Methode zu sehen ist. Auch nach Bemerkung 4.3 erwartet man für das implizite Verfahren eine weniger große Verbesserung der Konvergenzrate durch die ML-Methode als für das explizite Verfahren.

Aus diesen Gründen werden für die weiteren Beispiele für das Differenzenverfahren nur noch Methoden untersucht, die das explizite Eulerverfahren verwenden.

Quasi-lineare parabolische SPDE

Es soll nun noch ein weiteres Beispiel einer quasi-linearen parabolischen stochastische Differentialgleichung betrachtet werden. Dazu wird in (3.5)–(3.7)

$$f(t, x, u(t, x)) = -u(t, x), \quad \sigma(t, x, u(t, x)) \equiv 1, \quad u_0(x) = \sin(\pi x)$$

gesetzt. Die erste Abbildung zeigt pfadweise Approximationen zu verschiedenen Parametern, aber jeweils zum selben Pfad des Brownschen Blattes.

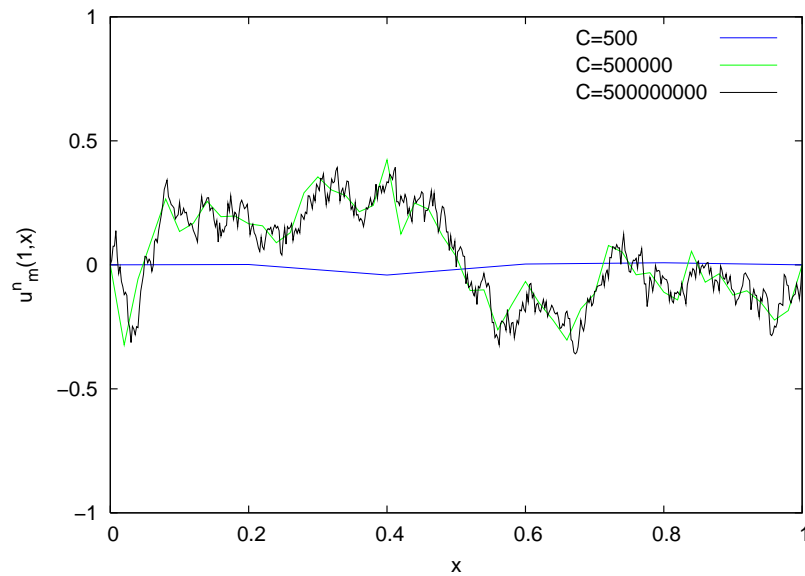


Abbildung 5.16: Simulationen von $u_m^n(1)$

Die für die schwache Approximation verwendeten Funktionale sind dieselben, wie für die Wärmeleitungsgleichung im Abschnitt vorher. Leider können hier Vergleichswerte, die als exakte Lösungen angesehen werden, nicht mehr wie bei der stochastischen Wärmeleitungsgleichung berechnet werden. Wir haben hier nur die Möglichkeit die klassische Monte-Carlo Methode mit dem Differenzenverfahren für sehr große Parameter zu verwenden. Die Parameter und die daraus resultierenden Vergleichswerte sind in Kapitel 5.4 tabellarisch dargestellt. Die Fehlerabschätzungen und damit auch die Wahl der Parameter sind für diese quasi-lineare parabolische SPDE dieselben wie bei der stochastische Wärmeleitungsgleichung im Abschnitt vorher.

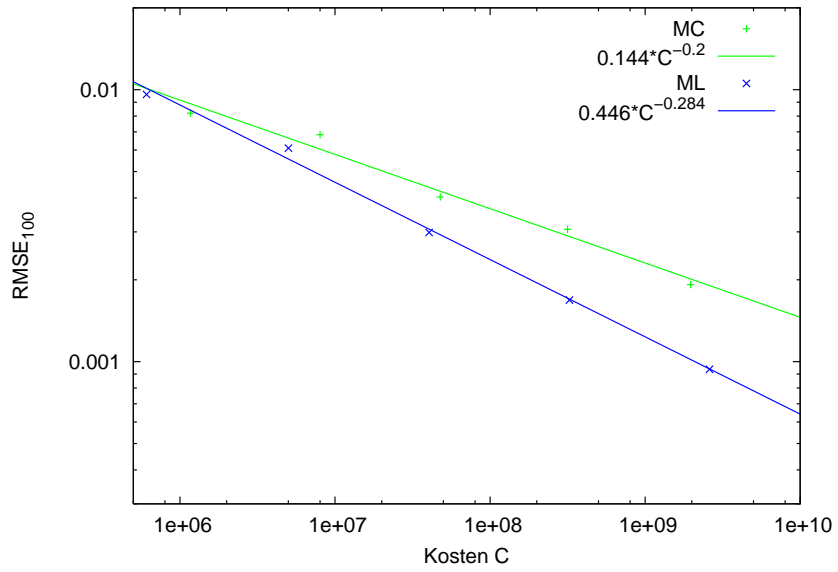


Abbildung 5.17: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_1(u)]$ für Quasi-lineare parabolische SPDE

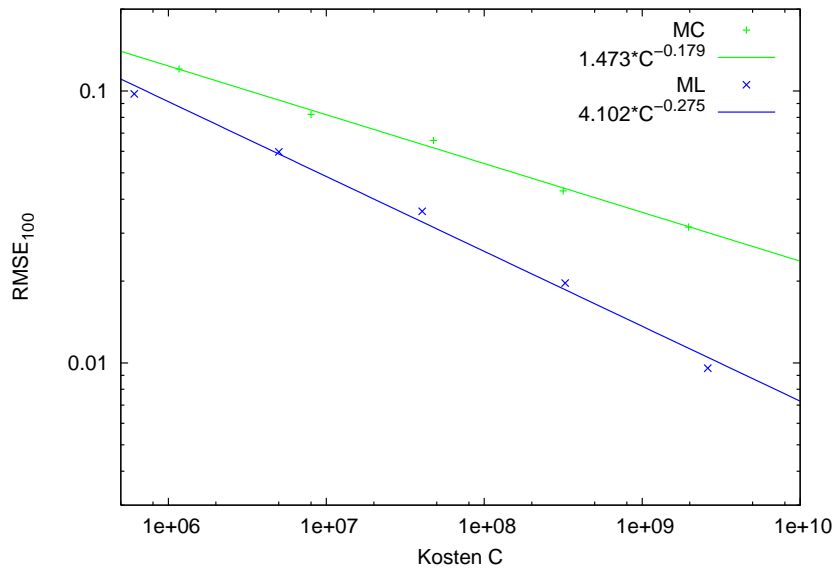


Abbildung 5.18: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_2(u)]$ für Quasi-lineare parabolische SPDE

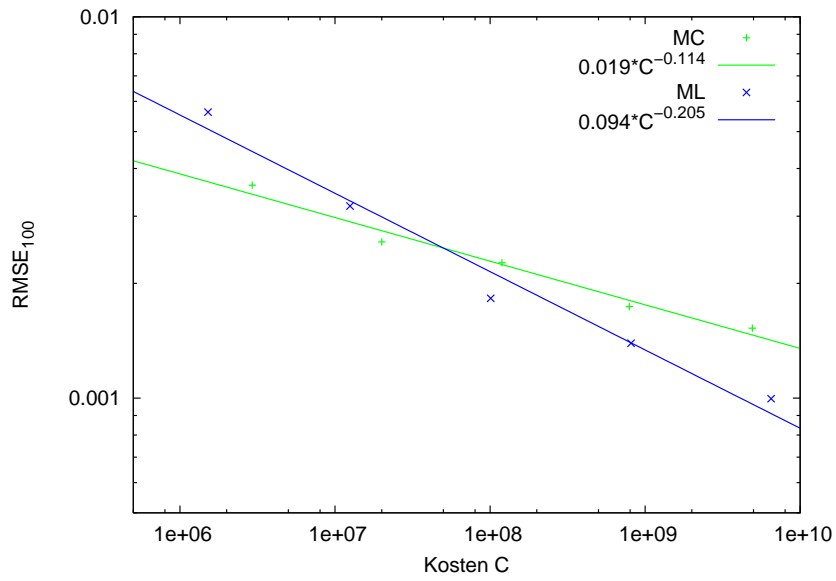


Abbildung 5.19: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_3(u)]$ für Quasi-lineare parabolische SPDE

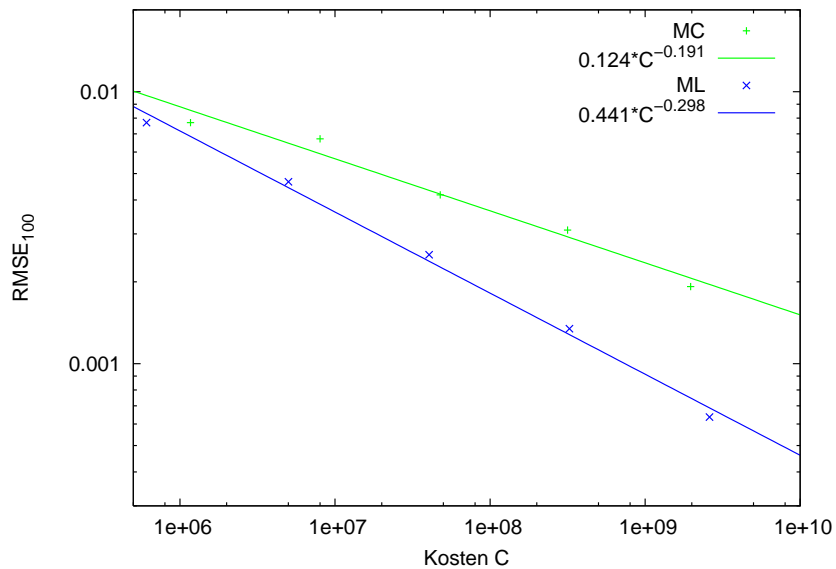


Abbildung 5.20: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_4(u)]$ für Quasi-lineare parabolische SPDE

Betrachtet man die Konvergenzraten in den Abbildungen 5.17–5.20, so stellt man fest, dass auch hier wie erwartet die Konvergenzraten der MC-Methoden mindestens $\frac{1}{8}$ und die der ML-Methoden mindestens $\frac{1}{6}$ sind. Außerdem ist auch hier jeweils die Rate der

ML-Methoden mindestens um den Faktor 1.3 größer als die der MC-Methoden.

5.2.2 Stochastische Burgers-Gleichung

Als letztes Beispiel für das Differenzenverfahren betrachten wir die stochastische Burgers-Gleichung aus (3.22)–(3.24). Zuerst ist auch hier wieder eine Abbildung mit pfadweisen Approximationen zu verschiedenen Parametern zu sehen.

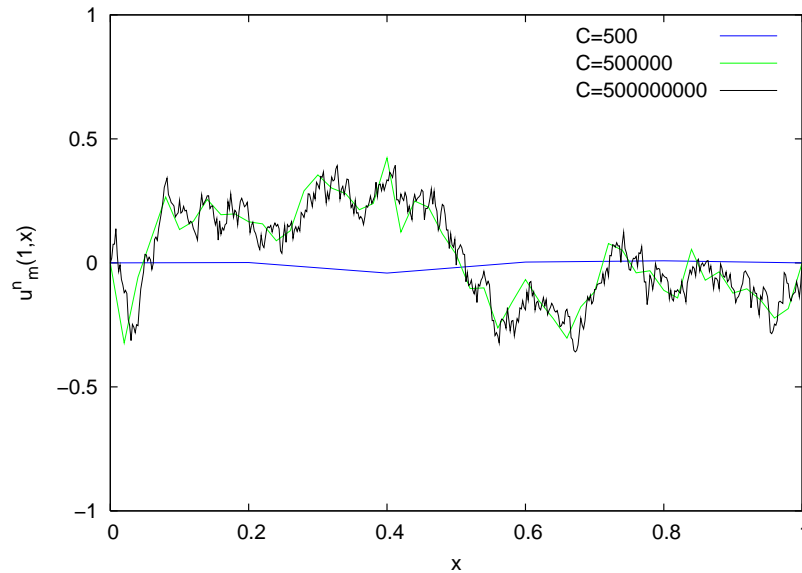


Abbildung 5.21: Simulationen von $u_m^n(1)$

Für die schwache Approximation verwenden wir wieder dieselben Funktionale wie für die quasi-linearen SPDEs. Die Vergleichswerte können hier leider wieder nur mit dem Differenzenverfahren und der klassische Monte-Carlo Methode mit sehr großen Parametern berechnet werden. Fehlerabschätzungen für die Approximation mit Differenzenverfahren sind für die Burgers-Gleichung leider nicht bekannt. Wir können lediglich die Hypothese aufstellen, dass sich Fehler und Kosten wie bei den quasi-linearen SPDEs verhalten und demnach auch die Parameter wie bei den quasi-linearen SPDEs wählen. Die Resultate sind in den Abbildungen 5.22–5.25 zu sehen.

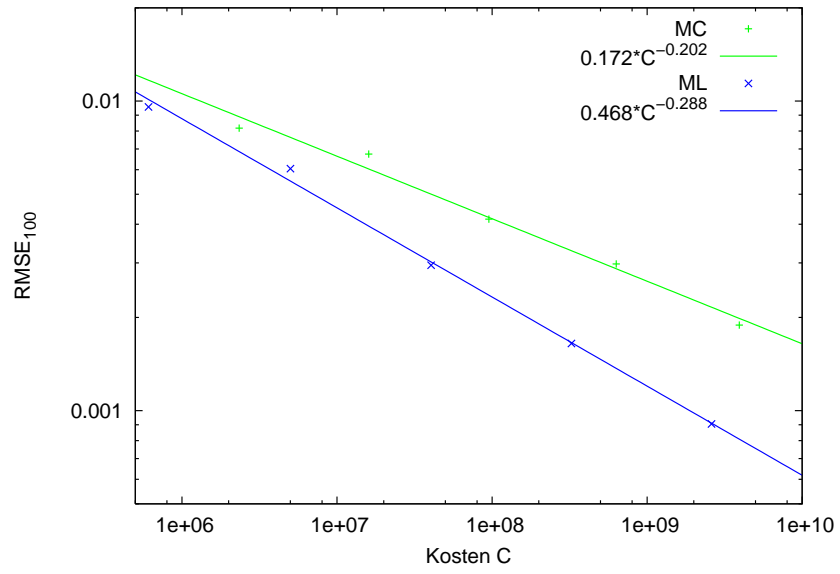


Abbildung 5.22: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_1(u)]$ für Burgers-Gleichung

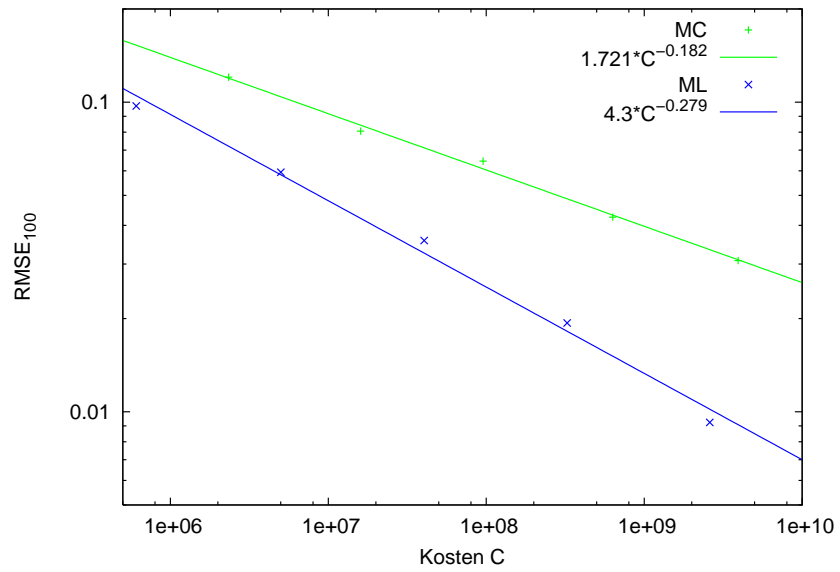


Abbildung 5.23: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_2(u)]$ für Burgers-Gleichung

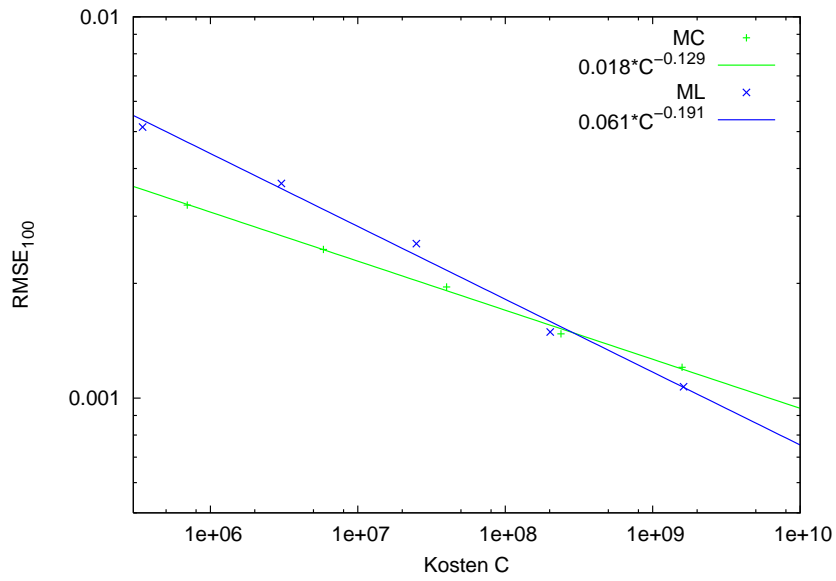


Abbildung 5.24: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_3(u)]$ für Burgers-Gleichung

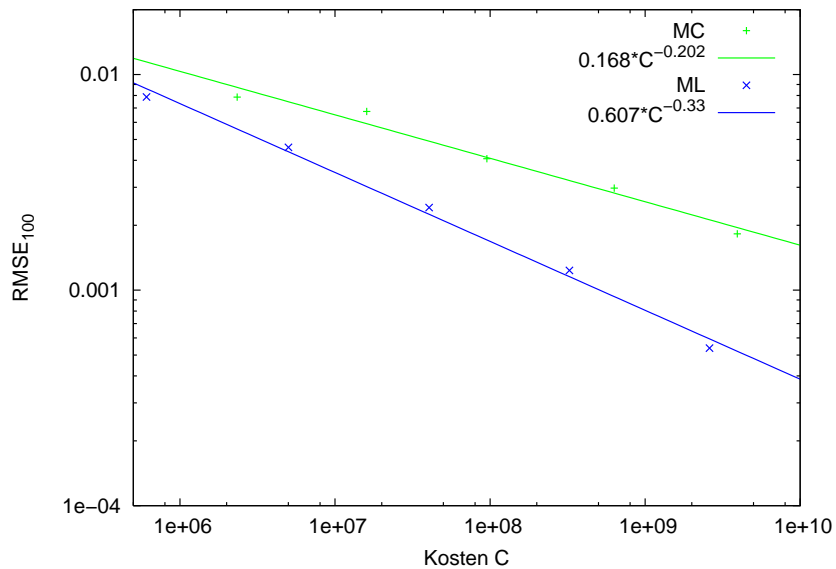


Abbildung 5.25: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_4(u)]$ für Burgers-Gleichung

Die experimentellen Resultate für die Burgers-Gleichung sind sehr ähnlich wie die der quasi-linearen SPDEs. Die Vermutungen über Konvergenzordnungen der Verfahren für die Burgers-Gleichung werden also durch die Experimente unterstützt. Die Konvergenzraten der Multi-level Methode sind auch hier mindestens um den Faktor 1,3 größer als die der einfache Monte-Carlo Methode. Da nicht bekannt ist, wie die stochastische

Burgers-Gleichung explizit gelöst werden kann, ist man auf numerische Verfahren angewiesen. Es ist deshalb besonders erfreulich zu sehen, dass die Multi-level Methode auch für diese komplizierte Gleichung eine deutliche Verbesserung im Vergleich zur klassischen Monte-Carlo Methode ist, auch wenn dies theoretisch noch nicht bewiesen ist. In Abbildung (5.25) beispielsweise erreicht die ML-Methode für Kosten $C = 10^{10}$ einen Fehler, der etwa 0.0003 ist. Um mit der MC-Methode eine Approximation zu erhalten, deren Fehler ebenso klein ist, benötigte man Kosten $C > 10^{13}$. Das bedeutet man hätte bei der MC-Methode einen mindestens um den Faktor 1000 größeren Zeitaufwand als bei der ML-Methode, um Approximationen mit dem Fehler 0.0003 zu bekommen. Die Laufzeiten der Programme liegen für Kosten $C = 10^{10}$ etwa in der Größenordnung eines Tages, das bedeutet die Laufzeiten für die Programme mit $C = 10^{13}$ liegen in der Größenordnung von etwa 1000 Tagen, was etwa 3 Jahren entspricht. An diesem Rechenbeispiel ist zu sehen wie groß die Verbesserung durch die Multi-level Methode ist.

5.3 Spektral-Galerkin Verfahren

5.3.1 Wärmeleitungsgleichung mit Raum-Zeit Weißem Rauschen

Für die Spektral-Galerkin Verfahren betrachten wir zuerst die Wärmeleitungsgleichung aus (3.30) mit Raum-Zeit Weißem Rauschen, Anfangsbedingung $u(0) = 0$ und $d = 1$.

Pfadweise Approximation

Abbildung 5.26 zeigt Realisierungen von $u_n(1)$ aus 3.2.1 zu verschiedenen Parametern n , die aber zum selben Pfad der (zylindrischen) Brownschen Bewegung W gehören.

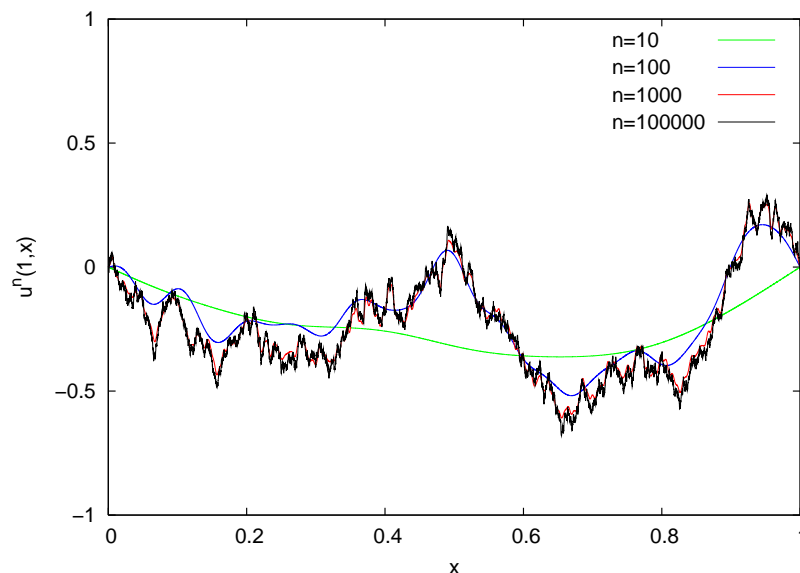


Abbildung 5.26: Realisierung von $u_n(1)$ für $d = 1$, $\gamma = 0$

Schwache Approximation

Für die schwache Approximation wurden die Vergleichswerte wie in 4.2.4 berechnet. In den folgenden Abbildungen ist der Fehler der MC-Methoden aus 4.2.1 und der ML-Methoden aus 4.2.2 zu sehen. Es wurden die Funktionale F_1 , F_2 und F_3 wie bei den Differenzenverfahren verwendet. Die Fehlerabschätzungen aus Kapitel 4.2 sind allerdings nicht für alle Funktionale gültig. Das Funktional F_3 erfüllt die Voraussetzung (I). Für die anderen Funktionale kann nur vermutet werden, dass die Konvergenzraten ähnlich sind. Die Parameter wurden für die MC-Methoden so gewählt, dass $N \asymp n$ ist (siehe 4.2.1) und für die ML-Methoden folgt aus Satz 2.2, dass $N_l \asymp \frac{M^L}{M^l}$ optimal in Bezug auf die oberen Fehlerschranken ist. Es wurden auch hier wieder Experimente mit unterschiedlichen Proportionalitätskonstanten durchgeführt und die besten Ergebnisse ausgewählt, das heißt diejenigen mit der größten Konvergenzrate und einem möglichst kleinen Fehler. Die in den Abbildungen verwendeten Parameter sind wieder in Kapitel 5.4 zu finden. In den Abbildungen 5.27–5.29 haben die MC-Methoden jeweils etwa die Konvergenzrate $\frac{1}{4}$ und die ML-Methoden fast $\frac{1}{2}$. Genau das wurde aufgrund der theoretischen Ergebnisse (4.26) und (4.30) mindestens erwartet. Die ML-Methode hat für große Kosten C in allen Fällen auch absolut gesehen einen deutlich kleineren Fehler als die MC-Methode.

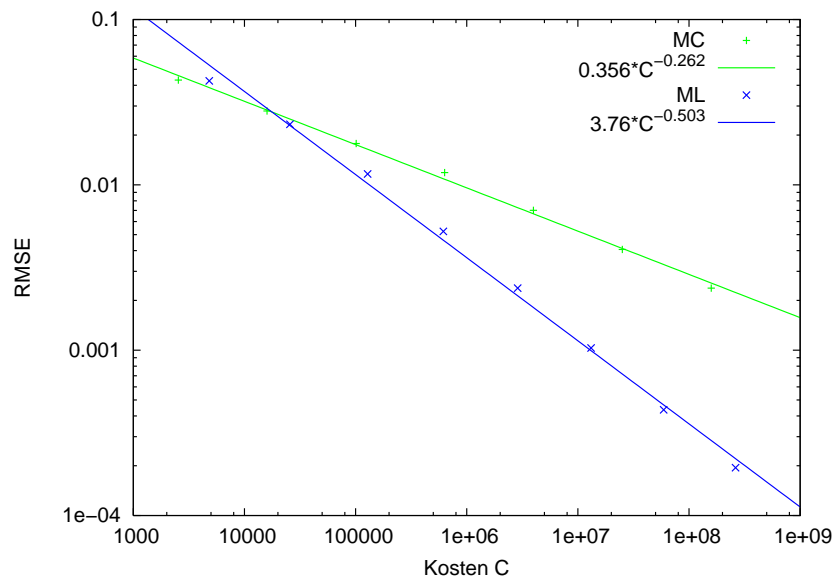


Abbildung 5.27: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_1(u)]$ für $d = 1$, $\gamma = 0$

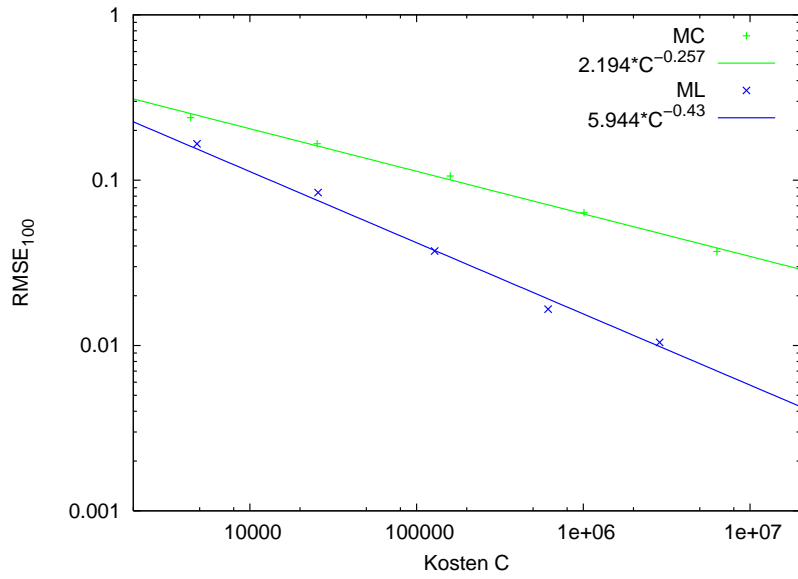


Abbildung 5.28: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_2(u)]$ für $d = 1, \gamma = 0$

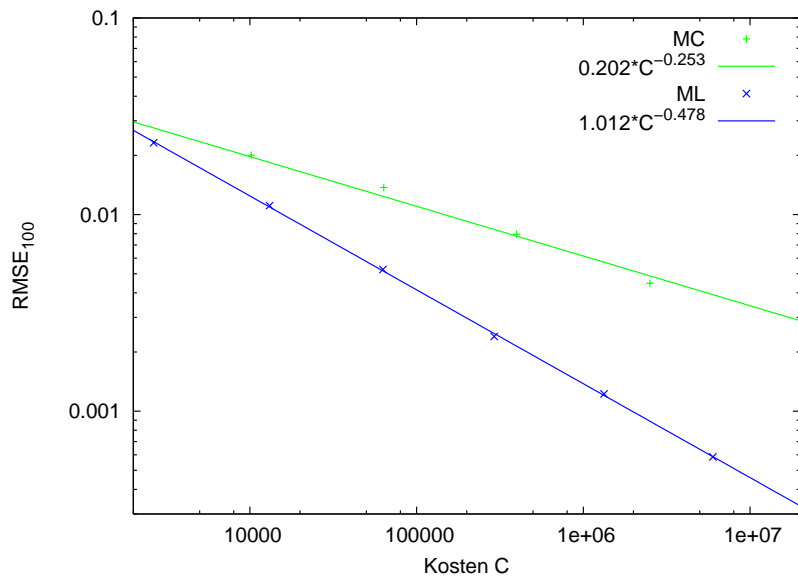


Abbildung 5.29: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_3(u)]$ für $d = 1, \gamma = 0$

Für das Funktional F_3 sind die Konvergenzraten wie erwartet und auch für die Funktionale F_1 und F_2 bestätigt sich die Vermutung.

5.3.2 Wärmeleitungsgleichung mit nuklearem Rauschen

Nun sollen auch die Ergebnisse des Spektral-Galerkin-Verfahrens für die Wärmeleitungsgleichung mit nuklearem Rauschen vorgestellt werden. Das heißt γ ist jetzt größer als Null. Die Monte-Carlo Methoden werden an Wärmeleitungsgleichungen (3.30) mit $d = 1$ und $d = 2$ und an verschiedenen Funktionalen getestet.

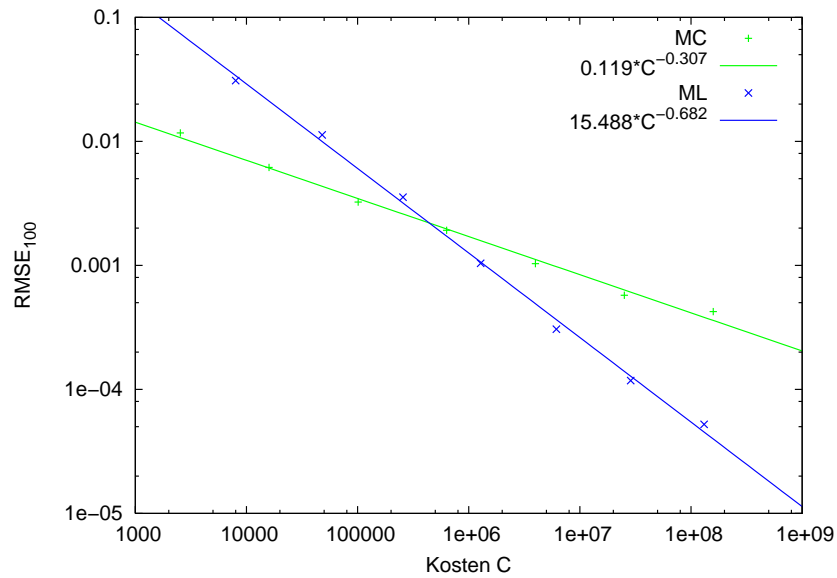


Abbildung 5.30: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_1(u)]$ für $d = 1$, $\gamma = 2$

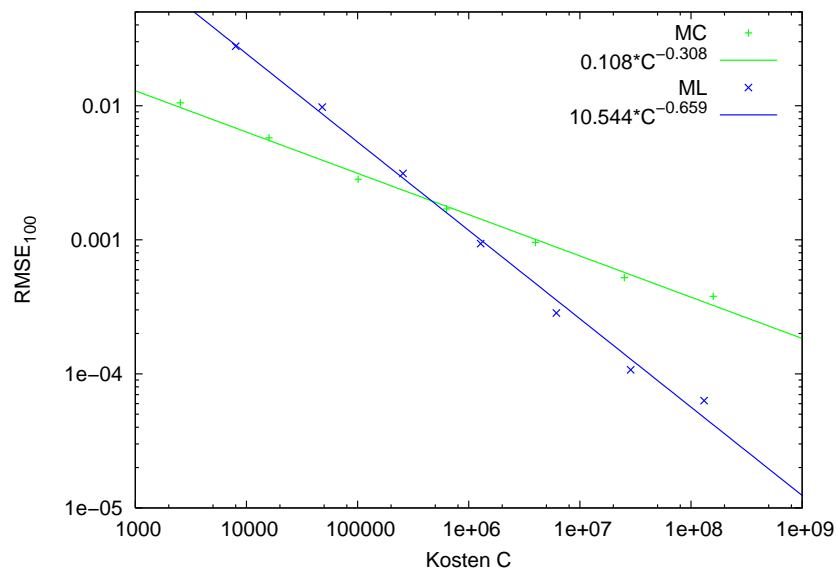


Abbildung 5.31: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_1(u)]$ für $d = 1$, $\gamma = 4$

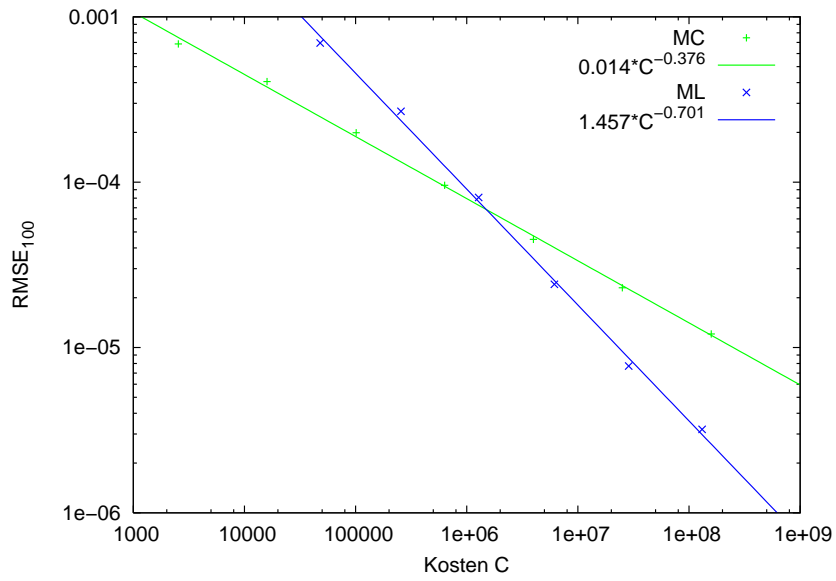


Abbildung 5.32: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_1(u)]$ für $d = 2$, $\gamma = 8$

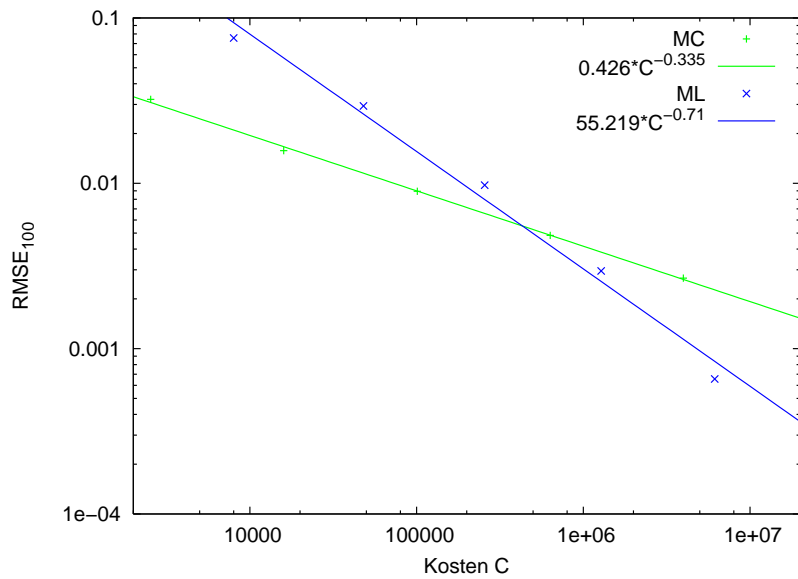


Abbildung 5.33: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_2(u)]$ für $d = 1$, $\gamma = 2$

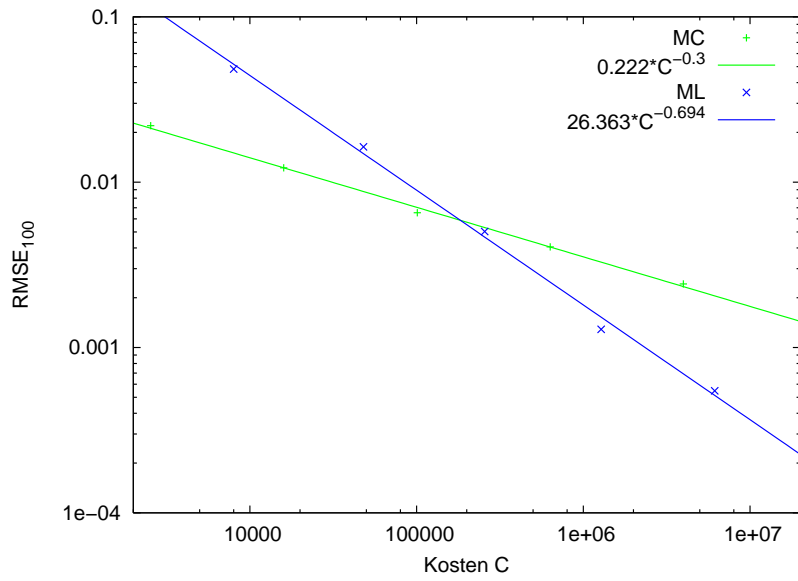


Abbildung 5.34: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_2(u)]$ für $d = 1, \gamma = 4$

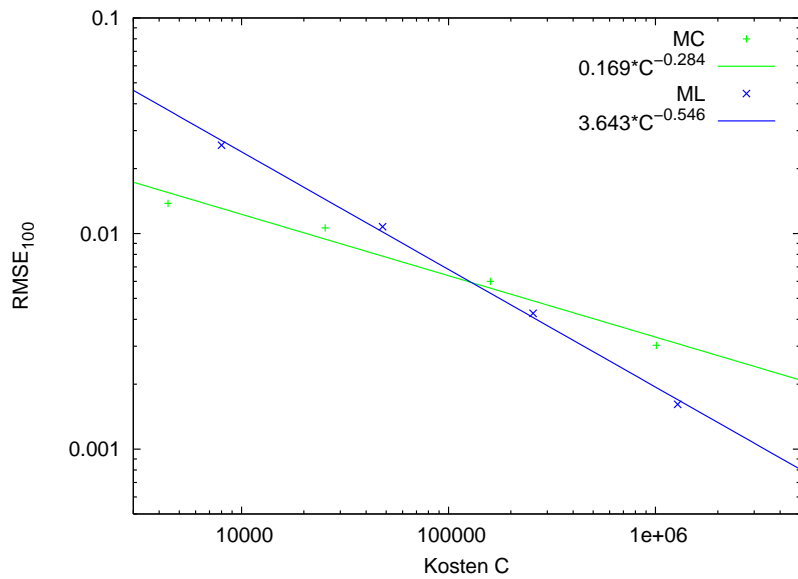


Abbildung 5.35: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_2(u)]$ für $d = 2, \gamma = 8$

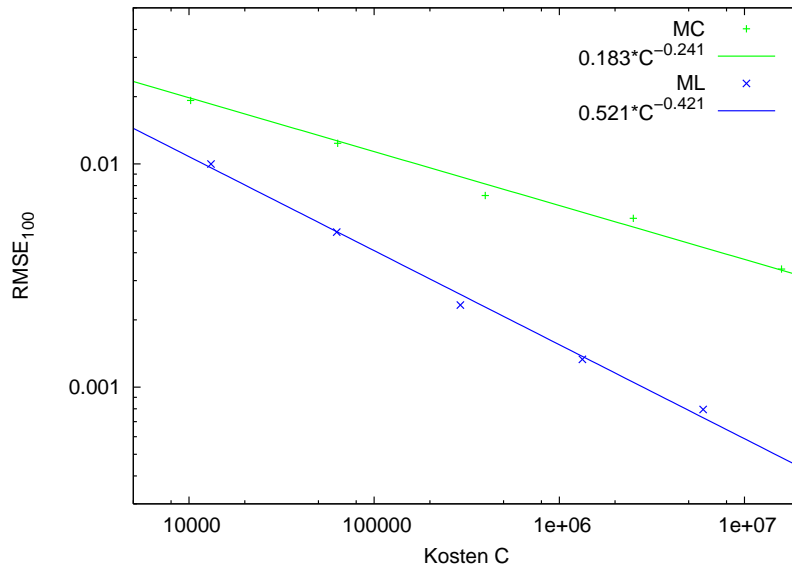


Abbildung 5.36: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_3(u)]$ für $d = 1, \gamma = 2$

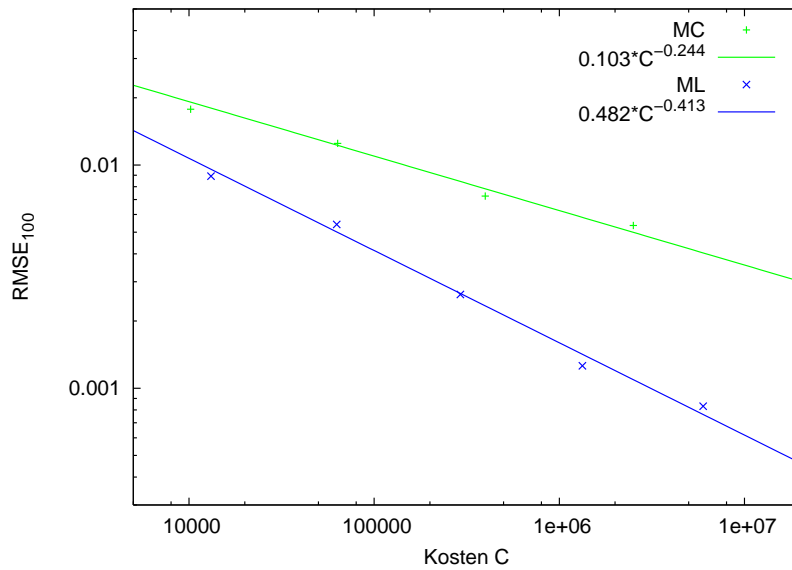


Abbildung 5.37: Fehler und Kosten der Approx. von $E[F_3(u)]$ für $d = 1, \gamma = 4$

5.4 Parameter und Vergleichswerte

Der Vergleichswert, der in den Programmen als exakte Lösung angenommen wurde, wird hier mit D bezeichnet. Dieser Wert geht für die verschiedenen Gleichungen aus unter-

schiedlichen Verfahren hervor. Mit B erhalten wir ein Konfidenzintervall

$$I = [D - B, D + B]$$

zum Niveau 0.95.

SDE

Für die Funktionale F_1 und F_2 kann $E[F_i(u)]$ für $i = 1, 2$ exakt berechnet werden (siehe Kapitel 5.1). Für das Funktional F_3 wurde der Vergleichswert D mit einer klassischen Monte-Carlo Methode und mit Hilfe der expliziten Darstellung der Lösung der SDE wie in (5.3) berechnet.

In den Abbildungen 5.2–5.4 wurden für die Multi-level Methoden $L = 1, 2, \dots$ und $M = 4$ gewählt. Diese Wahl von M ist begründet durch ([7], S. 611). Die Kosten der Multi-level Methoden \hat{Y}_{ML}^L für $L = 1, 2, \dots$ sind durch M und die Wahl der N_l , $l = 0, \dots, L$ bestimmt. Der Parameter n wurde für die klassischen Monte-Carlo Methoden so gewählt, dass man Monte-Carlo Methoden mit ähnlich großen Kosten erhält, wie die der Multi-level Methoden. Dafür wurde $n = \lfloor 4 \cdot 10^{0.4 \cdot k} \rfloor$, $k = 1, 2, \dots$ gewählt. Die restlichen Parameter sind der Tabelle entnehmbar.

Abbildung	D	B	N	n_l	N_l
5.2	1.051271	0	n^2	M^l	$\frac{n_L^2}{n_l}$
5.3	0.109864	0	n^2	M^l	$\frac{n_L^2}{n_l}$
5.4	0.06059	$1.4 \cdot 10^{-5}$	n^2	M^l	$\frac{n_L^2}{n_l}$

Differenzenverfahren für Wärmeleitungsgleichung (explizit)

Die Vergleichswerte D für die Wärmeleitungsgleichung wurden gemäß Kapitel 4.2.4 berechnet. Für die Multi-level Methode wurde $L = 1, 2, \dots$ und $M = 4$ gewählt und für die klassische Monte-Carlo Methode $n = \lfloor 10^{0.2 \cdot k} \rfloor$, $k = 1, 2, \dots$. Die Wahl von M ist dadurch begründet, dass die Parameter n_l und m_l für alle $l = 0, 1, \dots$ natürliche Zahlen sein müssen.

Abbildung	D	B	m	N	n_l	m_l	N_l
5.8	0.083333	$< 10^{-6}$	$4n^2$	$200n$	$2\sqrt{M}^l$	$4n_l^2$	$100(\frac{n_L}{n_l})^{\frac{3}{4}}$
5.9	0.43802	0.002	$4n^2$	$200n$	$2\sqrt{M}^l$	$4n_l^2$	$100(\frac{n_L}{n_l})^{\frac{3}{4}}$
5.10	0	0	$4n^2$	$1000n$	$2\sqrt{M}^l$	$4n_l^2$	$1000(\frac{n_L}{n_l})^{\frac{3}{4}}$
5.11	0.080555	$< 10^{-6}$	$4n^2$	$200n$	$2\sqrt{M}^l$	$4n_l^2$	$100(\frac{n_L}{n_l})^{\frac{3}{4}}$

Differenzenverfahren für Wärmeleitungsgleichung (implizit)

Für die Multi-level Methode wurde $L = 1, 2, \dots$ und $M = 4$ gewählt und für die klassische Monte-Carlo Methode $n = \lfloor 10^{0.2 \cdot k} \rfloor$, $k = 1, 2, \dots$.

Abbildung	D	B	m	N	n_l	m_l	N_l
5.12	0.083333	$< 10^{-6}$	$4n^2$	$200n$	$4\sqrt{M}^l$	$0.5n_l^2$	$100\left(\frac{nL}{n_l}\right)^{\frac{3}{4}}$
5.13	0.43802	0.002	$4n^2$	$200n$	$4\sqrt{M}^l$	$0.5n_l^2$	$100\left(\frac{nL}{n_l}\right)^{\frac{3}{4}}$
5.14	0	0	$4n^2$	$1000n$	$4\sqrt{M}^l$	$0.5n_l^2$	$1000\left(\frac{nL}{n_l}\right)^{\frac{3}{4}}$
5.15	0.080555	$< 10^{-6}$	$4n^2$	$200n$	$4\sqrt{M}^l$	$0.5n_l^2$	$100\left(\frac{nL}{n_l}\right)^{\frac{3}{4}}$

Differenzenverfahren für quasi-linear parabolische SPDE

Für die quasi-lineare SPDE wurden die Vergleichswerte mit dem Differenzenverfahren und der klassischen Monte-Carlo Methode berechnet. Dafür wurden die Parameter

$$\begin{aligned} n &= 10^{2.5}, \\ m &= 4 \cdot 10^5, \\ N &= 12500 \end{aligned}$$

gewählt. Für die Multi-level Methode wurde $L = 1, 2, \dots$ und $M = 4$ gewählt und für die klassische Monte-Carlo Methode $n = \lfloor 10^{0.2 \cdot k} \rfloor$, $k = 1, 2, \dots$

Abbildung	D	B	m	N	n_l	m_l	N_l
5.17	0.07902	0.0011	$4n^2$	$200n$	$2\sqrt{M}^l$	$4n_l^2$	$200\left(\frac{nL}{n_l}\right)^{\frac{3}{4}}$
5.18	0.42204	0.0037	$4n^2$	$200n$	$2\sqrt{M}^l$	$4n_l^2$	$200\left(\frac{nL}{n_l}\right)^{\frac{3}{4}}$
5.19	-0.00265	0.0032	$4n^2$	$1000n$	$2\sqrt{M}^l$	$4n_l^2$	$1000\left(\frac{nL}{n_l}\right)^{\frac{3}{4}}$
5.20	0.09916	0.0003	$4n^2$	$200n$	$2\sqrt{M}^l$	$4n_l^2$	$200\left(\frac{nL}{n_l}\right)^{\frac{3}{4}}$

Differenzenverfahren für Burgers-Gleichung

Auch für die Burgers-Gleichung wurden die Vergleichswerte mit dem Differenzenverfahren und der klassischen Monte-Carlo Methode berechnet. Dafür wurden

$$\begin{aligned} n &= 10^{2.5}, \\ m &= 4 \cdot 10^5, \\ N &= 25000. \end{aligned}$$

gewählt. Für die Multi-level Methode wurde $L = 1, 2, \dots$ und $M = 4$ gewählt und für die klassische Monte-Carlo Methode $n = \lfloor 10^{0.2 \cdot k} \rfloor$, $k = 1, 2, \dots$

Abbildung	D	B	m	N	n_l	m_l	N_l
5.22	0.07869	0.0008	$4n^2$	$400n$	$2\sqrt{M}^l$	$4n_l^2$	$200\left(\frac{nL}{n_l}\right)^{\frac{3}{4}}$
5.23	0.42186	0.0026	$4n^2$	$400n$	$2\sqrt{M}^l$	$4n_l^2$	$200\left(\frac{nL}{n_l}\right)^{\frac{3}{4}}$
5.24	-0.00018	0.0005	$4n^2$	$1000n$	$2\sqrt{M}^l$	$4n_l^2$	$1000\left(\frac{nL}{n_l}\right)^{\frac{3}{4}}$
5.25	0.07617	0.0002	$4n^2$	$400n$	$2\sqrt{M}^l$	$4n_l^2$	$200\left(\frac{nL}{n_l}\right)^{\frac{3}{4}}$

Spektral-Galerkin-Verfahren

Für die Multi-level Methode wurde $L = 1, 2, \dots$ und $M = 4$ gewählt und für die klassische Monte-Carlo Methode $n = \lfloor 10^{0.4 \cdot k} \rfloor$, $k = 1, 2, \dots$

Abbildung	D	B	N	n_l	N_l
5.27	0.083333	$< 10^{-6}$	$10n$	M^l	$100 \frac{n_L}{n_l}$
5.28	0.43802	0.002	n	M^l	$10 \frac{n_L}{n_l}$
5.29	0	$< 10^{-6}$	$100n$	M^l	$1000 \frac{n_L}{n_l}$
5.30	0.054831	$< 10^{-6}$	$10n$	M^l	$1000 \frac{n_L}{n_l}$
5.31	0.051539	$< 10^{-6}$	$10n$	M^l	$1000 \frac{n_L}{n_l}$
5.32	0.001619	$< 10^{-6}$	$10n$	M^l	$1000 \frac{n_L}{n_l}$
5.33	0.16556	0.0018	$10n$	M^l	$1000 \frac{n_L}{n_l}$
5.34	0.13598	0.0017	$10n$	M^l	$1000 \frac{n_L}{n_l}$
5.35	0.03527	0.0008	$10n$	M^l	$100 \frac{n_L}{n_l}$
5.36	-0.00046	0.0019	$10n$	M^l	$1000 \frac{n_L}{n_l}$
5.37	-0.00048	0.0019	$10n$	M^l	$1000 \frac{n_L}{n_l}$

Literaturverzeichnis

- [1] Alabert, A. and Gyöngy, I. (2006), On Numerical Approximation of Stochastic Burgers' Equations, From Stochastic Calculus to Mathematical Finance, The Shiryaev Festschrift, 1-15, Springer, Berlin.
- [2] Creutzig, J., Dereich, S., Müller-Gronbach, T., Ritter, K. (2008), Infinite-Dimensional Quadrature and Approximation of Distributions, to appear in Foundations of Computational Mathematics.
- [3] Da Prato, G., Debussche, A., Temam, R. (1994), Stochastic Burgers' Equation, Nonlinear Differential Equations and Applications **4**, 389-402.
- [4] Da Prato, G., Zabczyk, J. (1992), Stochastic Equations in Infinite Dimensions, Cambridge University Press, Cambridge.
- [5] Foias, C. (2001), Navier-Stokes Equations and Turbulence, Cambridge University Press, Cambridge.
- [6] Gentle, J.E. (2003), Random Number Generation and Monte Carlo Methods, Springer, New York.
- [7] Giles, M.B. (2008), Multi-level Monte Carlo Path Simulation, Operations Research **56**, 607-617.
- [8] Glasserman, P. (2004), Monte Carlo Methods in Financial Engineering, Springer, New York.
- [9] Gyöngy, I. (1998), Existence and Uniqueness Results for Semilinear Stochastic Partial Differential Equations, Stochastic Processes and their Applications **73**, 271-299.
- [10] Gyöngy, I. (1998), Lattice Approximations for Stochastic Quasi-linear Parabolic Differential Equations Driven by Space-Time White Noise I, Potential Analysis **9**, 1-25.
- [11] Gyöngy, I. (1999), Lattice Approximations for Stochastic Quasi-linear Parabolic Differential Equations Driven by Space-Time White Noise II, Potential Analysis **11**, 1-37.
- [12] Hutter, K. (2003), Fluid- und Thermodynamik, Springer, Berlin.
- [13] Kallianpur, G., Xiong, J. (1995), Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensional Spaces, Inst. Math. Statist., Hayward.

- [14] Karatzas, I. und Shreve, S.E. (2000), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, New York.
- [15] Klar, H.(2005), *Partielle Differentialgleichungen der Physik*, Der Andere Verlag.
- [16] Kloeden, P.E. und Platen, E. (1999), *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer, Berlin.
- [17] Müller-Gronbach, T., Ritter, K. und Wagner, T. (2008), *Optimal Pointwise Approximation of a Linear Stochastic Heat Equation with Additive Space-Time White Noise*, *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2006*, 577-589, Springer, Berlin.
- [18] Müller-Gronbach, T., Ritter, K. und Wagner, T. (2008), *Optimal Pointwise Approximation of Infinite-Dimensional Ornstein-Uhlenbeck Processes*, to appear in *Stochastics and Dynamics*.
- [19] Papageorgiou, A. und Wasilkowski, G. W. (1990), *On the Average Complexity of Multivariate Problems*, *Journal of Complexity* **6**, 1-23.
- [20] Temam, R. (1997), *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer, New York.
- [21] Walsh, J.B.(1986), *An Introduction to Stochastic Partial Differential Equations*, *École d'été de probabilités de Saint-Flour XIV - 1984*, *Lecture Notes Mathematics* **1180**, 265-437.