南开大学硕士研究生毕业论文

多资产期权定价与纯风险管理

姓　　名：金含清

单　　位：南开大学数学系

年　　级：98级

专　　业：应用数学

研究方向：金融数学

导　　师：史树中教授

完成时间：2001年4月

摘　　要

本文以一种来自保险领域的金融风险 — 纯风险为管理目标，讨论了在该目标下的最优风险管理问题。纯风险考虑的是投资的损失，本文将它与投资策略的卖出期权联系起来。

为了求解最优风险管理问题，首先需要得到投资策略的卖出期权的定价。在所讨论的连续时间市场中，本文论证了任何一个投资组合的卖出期权无套利价格的存在性和唯一性，进而在一个等价鞅测度下得到了期望形式的定价公式，但是这个定价公式难以进行实际计算。本文用随机分析的方法，通过测度变换将投资组合的期权定价公式用概率的形式给出，然后用 Monte-Carlo方法实现了投资组合卖出期权的定价计算。

由于问题本身的复杂性，风险最小化问题最优解的解析形式难以计算，本文采用了近似的最速下降法方搜索问题的最优解。为此，本文先验证了目标函数的凸性和最优解的存在性，从而保证了用搜索的方法可以找到足够精确的近似最优解。然后用 Matlab实现了求解最优风险管理问题的模拟实验。

关键词：纯风险　卖出期权　套利　鞅测度　Monte-Carlo方法　最速下降法　凸函数

目　　录

引　言

随着金融市场的发展，金融风险给人们带来灾难性损失的案例不断增加，人们对金融风险越来越重视。在追求投资回报的同时，最小化投资风险已经成为绝大多数投资者的共识。投资的风险管理一般有两种方式，一种是在控制风险不超过一定水平的条件下，最大化投资的期望收益；另一种是在保证投资期望收益足够大的条件下，最小化投资的风险。无论是哪一种，首先必须有一个风险度量的规则。

金融风险一般被认为是由于金融资产价格的不确定性导致这些资产在未来的价值的不确定性。在保险领域中，金融风险分为两类：一类叫做投机风险 ($speculative\ risk$)，指的是资产可能的收益和损失的不确定性 ($uncertainty\ of\ possible\ financial\ gains\ and\ losses$)；另一类叫做纯风险 ($pure\ risk$)，指的是损失的不确定性 ($uncertainty\ of\ loss$)(参见文献 [3])。纯风险的概念来自保险单所承受的风险：只有当持有者的相关项目遭受损失，保险单才有价值，损失越大，保险的价值就越大，而持有者相关项目的纯风险在持有者购买了保险单以后，就刚好转移到保险单上了。

把纯风险引入到金融市场，考虑一个投资组合的纯风险，并且建立一种度量纯风险的方法，就可以研究如何管理投资组合的纯风险。

一　问题的提出

在本文所讨论的市场中，只有一种无风险证券，它在 t 时刻的价格为 B_t。$B_0 > 0$，B_t 满足微分方程 $dB_t = rB_t dt$。

市场中还有 n 种风险证券，它们的价格 S_t^i 分别满足 $S_0^i > 0$ 和如下随机微分方程

$$dS_t^i dt = u_i S_t^i dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} S_t^i dW_t^j \qquad\qquad i = 1, \cdots, n$$

这里，$\{W_t = (W_t^1, \cdots, W_t^n), \mathcal{F}_t^W\}$ 是概率空间 $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ 上的 n 维标准布朗运动；r 是大于 0 的常数，表示无风险证券的收益率；u_i, σ_{ij} 分别是描述风险证券价格平均增长率和波动率性质的常数。记 $U = (u_1, \cdots, u_n)^T, \Sigma = (\sigma_{ij})_{n\times n}$，$\mathbb{R}$ 表示全体实数。则有 $r \in \mathbb{R}_+, U \in \mathbb{R}^n, \Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$。

所有的证券都可以在任何时候以当时的价格进行交易，市场没有交易量的限制，不考虑交易费用。为了方便，我们只在时间区域 $t \in [0, T]$ 上讨论。

我们记这个市场为 $\mathcal{M}(\{\Omega, \mathcal{F}_t^W, P\}, W, \{B_0, S_0, r, U, \Sigma\}, T)$，简记为 $\mathcal{M}$。

§1.1　基本概念

在市场 $\mathcal{M}$ 中，我们先约定一些名词的含义，这些约定和大多数相关文献是一致的。

定义 1 在一个固定的时间 t_0 上，一个投资组合 $A = (a_0; a_1, \cdots, a_n)$ 指的是一个表示持有各种资产数量的向量。其中 $a_0 \in \mathbb{R}$ 表示持有无风险证券份数的数量，$a_i \in \mathbb{R}$ 表示持有第 i 种风险资产份数的数量。投资组合 A 在时间 $t > t_0$ 时的价值是 $V(A,t) = a_0 B_t + \sum_{i=1}^{n} a_i S_t^i$。

定义 2 一个投资策略 $\phi=(\phi_t^0;\phi_t^1,\cdots,\phi_t^n)$ 是一个表示在一定时期内持有各种资产数量的向量过程。其中 ϕ_t^0 是一个 $\mathcal{F}_t^W-$ 适应可积过程，表示时刻 t 持有无风险证券份数的数量； ϕ_t^0 也是一个 $\mathcal{F}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{W}}-$ 适应的可积过程，表示时刻 t 持有第 i 种风险资产份数的数量。投资策略 ϕ 在时刻 t 的价值记为 $V(\phi,t)=\phi_t^0B_t+\sum_{i=1}^n\phi_t^iS_t^i$ 。

定义 3 如果对于任意 $t\le T$ ，投资策略 ϕ 满足

$$(\phi_t^0B_t+\sum_{i=1}^n\phi_t^iS_t^i)-(\phi_0^0B_0+\sum_{i=1}^n\phi_t^iS_0^i)=\int_0^t\phi_s^0dB_s+\sum_{i=1}^n\int_0^t\phi_s^idS_s^i$$

我们称这个投资策略是自融资的。

定义 4 称一个自融资投资策略 ϕ 是一个套利策略，如果存在 $0\le T_1<T_2\le T$ ，满足

$$V(\phi,T_1)\le 0,V(\phi,T_2)>0\quad \text{或者}\quad V(\phi,T_1)<0,V(\phi,T_2)\ge 0$$

根据纯风险的含义，在市场 $\mathcal{M}$ 中，一个投资组合 A 的纯风险指的是该投资组合未来损失的不确定性，确切地说，在时间 $t=0$ 上，给定一个收益基准 K ，以 T 为时间尺度，一个投资组合 A 的纯风险指的是 $(K-V(A,T))^+$ 的不确定性。

在金融市场中，资产的纯风险和以该资产为原生资产的卖出期权的内涵十分接近。“风险和保险几乎是等价物”[1] 。一个投资组合的纯风险可以通过购买一个“保险单”来抵消，这个“保险单”就是该投资组合的欧式卖出期权。因此，我们可以用欧式卖出期权的价格作为投资组合纯风险的一种度量。

以下我们定义：

定义 5 如果 $C(K,T,A)$ 是以投资组合 A 的价格为标的资产，敲定价格为 K ，到期期限为 T 的欧式卖出期权的价格，那么我们称它同时也是投资组合 A 在时间水平 T 上、收益基准 K 下的纯风险度量。

§1.2 问题的提出

要进行投资组合的纯风险管理，首先需要能够度量投资组合的纯风险。在市场 $\mathcal{M}$ 中，前面定义的投资组合 A 的纯风险度量 $C(K,T,A)$ 能不能确定？也就是说，在市场 $\mathcal{M}$ 中，任何一个投资组合的欧式卖出期权是否可以唯一定价？答案是肯定的，在本文的第二部分，我们将给出 $C(K,T,A)$ 的两中形式。

有了 $C(K,T,A)$ ，我们就可以进行纯风险的管理。考虑如下投资问题：

记初始时间为 $t=0$ 。给定初始资产为 1 ，在限制投资的期望收益不低于某个水平 L 的条件下，如何选择投资组合，使得投资关于收益基准 K 和时间水平 T 的纯风险最小？

用数学语言表示就是：对于给定的期望收益水平 L 、收益基准 K 和时间水平 T ，求解最优化问题：

$$\begin{array}{ll}\min_{A\in\mathbb{R}^{n+1}}C(K,T,A) & \\ s.t. & \begin{cases} a_0B_0+\sum_{i=1}^n a_iS_0^i=1\\ E(a_0B_T+\sum_{i=1}^n a_iS_T^i)\ge L\end{cases}\end{array}$$

本文的第三部分将讨论寻找这个纯风险的管理问题最优解的算法。

[1] 《风险规则》第 77 页

二　纯风险的度量——投资组合期权定价

对于市场 $\mathcal{M}$，在 $n=1$ 的情况下，如果风险资产价格的波动率不等于 0，那么一个投资组合的欧式卖出期权 (实际上相当于一种风险资产的欧式期权) 已经被证明是存在唯一的无套利价格的，无套利价格公式就是著名的 $Black-Scholes$ 公式。在 $n>1$ 的情况下，我们同样可以证明，任何一个投资组合的欧式期权都存在唯一的无套利价格 (无套利价格稍后有严格的定义)，而且它的无套利价格也可以由类似 $Black-Scholes$ 公式的定价公式确定。

在市场 $\mathcal{M}$ 中，根据各资产价格所满足的微分方程可以容易地推出：

$$B_t = B_0 e^{rt}$$

$$S_t^i = S_0^i \exp\left\{(u_i - \sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^2/2)t + \sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}W_t^j\right\}$$

为了表述方便，记 $\bar{S}_t^i = S_t^i/B_t$，表示第 i 种风险资产的折扣价格过程。

在 §2.1 中，我们将证明，任何一个投资组合的欧式卖出期权存在唯一的无套利价格。在 §2.2 中，我们将给出这个卖出期权无套利价格的便于计算的形式。

§2.1　相关的资产定价理论

为了说明一个投资组合的欧式卖出期权存在唯一的无套利价格,并且推导它的价格公式,需要一些相关的资产定价理论。

定义 6 称测度 P^* 是市场 $\mathcal{M}$ 在 $[0,T]$ 上的一个等价鞅测度，如果它和市场 $\mathcal{M}$ 的原测度 P 等价，而且在测度 P^* 下，各风险资产的折扣价格过程 $\bar{S}_t^i$ 在 $[0,T]$ 上都是鞅过程。

定理 2.1.1 如果 Σ 非奇异，那么对于任何 $0 \le T < \infty$，市场 $\mathcal{M}$ 存在等价鞅测度。

我们用 $Girsanov$ 引理来寻找当前市场的等价鞅测度。

由定义知：　$d\bar{S}_t^i = (u_i - r)\bar{S}_t^i dt + \sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\bar{S}_t^i dW_t^j$。
记 $H = -\Sigma^{-1}(U-r) = (h_1,\cdots,h_n)^T, \hat{W}_t = W_t - Ht$。
定义 P 的一个等价测度 P^*

$$\frac{dP^*}{dP} = \exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\int_0^T h_j dW_t^j - \sum_{j=1}^{n} h_j^2 T/2\right\}$$

因为 h_j 都是常数,所以 $\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\int_0^T h_j dW_t^j - \sum_{j=1}^{n} h_j^2 T/2\right\}$ 是鞅,那么根据 $Girsanov$ 引理，我们知道，$\hat{W}$ 是 P^* 下的 n 维标准布朗运动。此时

$$\begin{aligned} d\bar{S}_t^i &= (u_i - r)\bar{S}_t^i dt + \sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\bar{S}_t^i dW_t^j \\ &= (u_i - r)\bar{S}_t^i dt + \sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\bar{S}_t^i d\hat{W}_t^j + \sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\bar{S}_t^i h_j dt \end{aligned}$$

因为 $H=-\Sigma^{-1}(U-r)$ ，所以 $\Sigma H=-(U-r)$ ，即 $\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}h_j=-(u_i-r)$ 。将这些等式代入上式，得：

$$\begin{aligned} d\bar{S}_t^i &= (u_i-r)\bar{S}_t^i dt+\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\bar{S}_t^i dW_t^j \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\bar{S}_t^i d\hat{W}_t^j \\ \bar{S}_t^i &= \bar{S}_0^i \exp\left\{\sum_{j=1}^{n}(\sigma_{ij}\hat{W}_t^j-\sigma_{ij}^2 t/2)\right\} \end{aligned}$$

由于 σ_{ij} 都是常数， $\bar{S}_t=\{\bar{S}_t^1,\cdots,\bar{S}_t^n\}$ 是 P^* 下的 n 维鞅过程。所以 P^* 是一个等价鞅测度。定理得证。

在后面， P^* 将作为一个重要的概率测度参与计算。

定义 7 称一个自融资投资策略 $\phi=(\phi_t^0;\phi_t^1,\cdots,\phi_t^n)$ 为一个 P^*- 容许的投资策略，如果它的折扣价值过程

$$\bar{V}_t(\phi)=B_t^{-1}V(\phi,t) \qquad \forall t\in[0,T]$$

在 P^* 下是一个鞅过程。

因为在 P^* 下，所有证券的折扣价格过程都是鞅，所以投资策略是 P^* 容许的条件是比较弱的。比如说，如果一个投资策略 $\phi=(\phi_t^0;\phi_t^1,\cdots,\phi_t^n)$ 满足对任意 $i=1,\cdots,n,0\le t<\infty$ ， $E^*(\int_0^t(\phi_{t'}^i S_{t'}^i)^2dt')<\infty$ ，也就是说投资在每一种证券上的价值的过程在 P^* 下是平方可积的，那么它就是 P^*- 容许的。

定理 2.1.2 市场 $\mathcal{M}$ 不存在 P^*- 容许的套利策略。

这个结论是显然的，但是它保证了下面定义的合理性。

定义 8 如果一个衍生证券的定价保持了市场不存在 P^*- 容许的自融资套利策略的性质，称这个定价是该证券的无套利价格。

这里的无套利价格的定义和文献中的定义完全相同。实际上，本文关于期权定价的基本思想，均来自文献 [2] 关于一种风险资产期权的定价。

有了不存在 P^*- 容许的自融资套利策略的前提，对于那些可以被 P^*- 容许的自融资套利策略复制的证券，它的无套利价格就是唯一的。

定理 2.1.3 在市场 $\mathcal{M}$ 中, 如果一个欧式证券在 T 时的收益为 X ， $X\in\mathcal{F}_T^W$ ， X 二次可积，那么这个证券可以被 P^*- 容许的自融资策略复制，而且它的无套利价格就是 $E^*(X)B_0/B_T$ 。

证明:

由条件知： $X\in\mathcal{F}_T^W, E^*(X^2)<\infty$ 。根据鞅表示定理的推论 (见附录一)，存在关于 $\mathcal{F}_T^{\hat{W}}=\mathcal{F}_T^W$ 循序可测的过程 $Y=\{Y_t^1,\cdots,Y_t^n\}$ ，满足

$E^*\int_0^T(Y_t^j)^2dt<\infty$ 和 $\bar{X}=X/B_T=E^*(\bar{X})+\int_0^T Y_t d\hat{W}_t$ 。

Y_t 是循序可测的，所以是适应的。

因为 $d\bar{S}_t^i=\sum_{j=1}^n\sigma_{ij}\bar{S}_t^i d\hat{W}_t^j$ ，所以

$$\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}d\hat{W}_t^j=\frac{d\bar{S}_t^i}{\bar{S}_t^i}, \qquad d\hat{W}_t=\Sigma^{-1}\mathrm{diag}(\bar{S}_t)^{-1}d\bar{S}_t$$

这里 $\text{diag}(\bar{S}_t)$ 表示以 $\{\bar{S}_t^1, \cdots, \bar{S}_t^n\}$ 中元素为对角线元素的对角矩阵。

记 $Z_t = Y_t\Sigma^{-1} = (Z_t^1, \cdots, Z_t^n)$, 则 Z_t^i 也是 $\mathcal{F}_t^W-$ 适应的, 而且 $E^*(\int_0^T (Z_t^i)^2 dt) < \infty$ 。

$$\begin{aligned}
\bar{X} &= E^*(\bar{X}) + \int_0^T Y_t d\hat{W}_t \\
&= E^*(\bar{X}) + \int_0^T Y_t\Sigma^{-1}\text{diag}(\bar{S}_t)^{-1} d\bar{S}_t \\
&= E^*(\bar{X}) + \sum_{i=1}^n \int_0^T Z_t^i/\bar{S}_t^i d\bar{S}_t
\end{aligned}$$

记 $\bar{V}(t) = E^*(\bar{X}) + \sum_{i=1}^n \int_0^t Z_{t'}^i/\bar{S}_{t'}^i d\bar{S}_{t'}, \quad V(t) = \bar{V}(t)B_t$ 。

构造策略 $\phi_t^i = Z_t^i/\bar{S}_t^i, \quad \phi_t^0 = (V(t) - \sum_{i=1}^n \phi_t^i S_t^i)/B_t$ 。

显然 $V(t) = \phi_t^0 B_t + \sum_{i=1}^n \phi_t^i S_t^i$ 就是策略 ϕ 的价值过程 $V(\phi, t)$ ， $\bar{V}(T) = \bar{X}$ ，即 $\phi = (\phi_t^0; \phi_t^1, \cdots, \phi_t^n)$ 复制了 X 。

$$\begin{aligned}
dV(t) &= dB_t\bar{V}(t) \\
&= B_t d\bar{V}(t) + rB_t\bar{V}(t)dt \\
&= B_t \sum_{i=1}^n \phi_t^i d\bar{S}_t^i + rV(t)dt \\
&= B_t \sum_{i=1}^n \phi_t^i d(S_t^i B_t^{-1}) + rV(t)dt \\
&= B_t \sum_{i=1}^n \phi_t^i (B_t^{-1} dS_t^i - rB_t^{-1} S_t^i dt) + rV(t)dt \\
&= \sum_{i=1}^n \phi_t^i dS_t^i + r(V(t) - \sum_{i=1}^n \phi_t^i S_t^i)dt \\
&= \sum_{i=1}^n \phi_t^i dS_t^i + \phi_t^0 dB_t
\end{aligned}$$

所以 $\phi = (\phi_t^0; \phi_t^1, \cdots, \phi_t^n)$ 是一个自融资策略。

ϕ 的折扣价格过程为 $V(\phi, t)/B_t = \bar{V}(t)$,

$$\begin{aligned}
\bar{V}(t) &= E^*(\bar{X}) + \sum_{i=1}^n \int_0^t Z_{t'}^i/\bar{S}_{t'}^i d\bar{S}_{t'} \\
&= E^*(\bar{X}) + \sum_{i=1}^n \int_0^t Y_{t'}^i d\hat{W}_t'
\end{aligned}$$

易见 $\bar{V}(t)$ 是 P^* 鞅，所以 $\phi = (\phi_t^0; \phi_t^1, \cdots, \phi_t^n)$ 是 P^*- 容许的投资策略。

根据无套利价格定义， X 的无套利价格就是 $V(0) = B_0 E^*(\bar{V}(T)) = E^*(X)B_0/B_T$

推论：任何投资组合 A 的欧式卖出期权 $(K - V(A, T))^+$ 是可以被 P^*- 容许的自融资策略复制的，它的无套利价格是 $E^*((K - V(A, T))^+)B_0/B_T$ 。

本文下面的部分称这个结论为投资策略纯风险度量的期望形式。因为 B_0 表示的是 $t = 0$ 时无风险证券的价格，在这里并没有本质的作用，所以我们以后都取它为 1 。这样，投资组合卖出期权无套利价格公式变为 $E^*((K - V(A, T))^+)/B_T$ 。

§2.2 纯风险的计算

在 §2.1 中，我们得到了投资组合的欧式卖出期权的无套利价格，同时也是我们定义的投资组合的纯风险度量 $C(K,A,T)=E^*((K-V(A,T))^+)/B_T$ ，但是用它计算很不方便，这一节我们要找到一个类似 $Black-Scholes$ 公式的便于计算的公式。

记 $D=\{\omega: K-V(A,T)>0\}=\{\omega: a_0B_T+\sum_{i=1}^n a_iS_T^i<K\}$ ，则

$$\begin{aligned} C(K,A,T) &= E^*((K-V(A,T))^+)/B_T \\ &= E^*((K-a_0B_T-\sum_{i=1}^n a_iS_T^i)^+)/B_T \\ &= (K/B_T-a_0)P^*(D)-\sum_{i=1}^n a_iE^*(\bar S_T^i\mathbf{1}_D) \end{aligned}$$

这里， $\mathbf{1}_D\{\omega\}=\begin{cases} 1 & 当\omega\in D \\ 0 & 当\omega\notin D \end{cases}$ 是集合 D 的示性函数。为计算 $C(K,A,T)$ ，我们先分别计算 $P^*(D)$ 和 $E^*(\bar S_T^i\mathbf{1}_D)$ 。

(I) $P^*(D)$ 的计算

$$\begin{aligned} P^*(D) &= P^*(a_0B_T+\sum_{i=1}^n a_iS_T^i<K) \\ &= P^*(\sum_{i=1}^n a_i\bar S_T^i<K/B_T-a_0) \\ &= P^*(\sum_{i=1}^n a_i\bar S_0^i\exp\{\sum_{k=1}^n(\sigma_{ik}\hat W_T^k-\sigma_{ij}^2T/2)\}<K/B_T-a_0) \\ &= P(\sum_{i=1}^n a_iS_0^i\exp\{\sum_{k=1}^n(\sigma_{ik}W_T^k-\sigma_{ij}^2T/2)\}<K/B_T-a_0) \\ &= P(\sum_{i=1}^n a_iS_T^i\exp\{-u_iT\}<K/B_T-a_0) \end{aligned}$$

记 $D^0=\{\omega:\sum_{i=1}^n a_iS_T^i\exp\{-u_iT\}/<K/B_T-a_0\}$ ，则

$$P^*(D)=P(D^0)$$

(II) $E^*(\bar S_T^i\mathbf{1}_D)$ 的计算

对任意的 i ，为了计算 $E^*(\bar S_T^i\mathbf{1}_D)$ ，作测度变换 $\frac{dP^i}{dP^*}=\bar S_T^i/\bar S_0^i$ ，根据 $Girsanov$ 引理，在 P^i 下，

$$^iW_t^j=\hat W_t^j-\sigma_{ij}t \qquad\qquad j=1,2,\cdots,n$$

是一个 n 维标准布朗运动。此时

$$\begin{aligned} \bar S_t^j &= \bar S_0^j\exp\{\sum_{k=1}^n(\sigma_{jk}\hat W_t^k-\sigma_{jk}^2t/2)\} \\ &= \bar S_0^j\exp\{\sum_{k=1}^n(\sigma_{jk}{}^iW_t^k-\sigma_{jk}^2t/2+\sigma_{jk}\sigma_{ik}t)\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E^*(\bar{S}_T^i \mathbf{1}_D) &= \bar{S}_0^i E^*(\mathbf{1}_D \bar{S}_T^i / \bar{S}_0^i) \\
&= \bar{S}_0^i P^i(D) \\
&= \bar{S}_0^i P^i(\sum_{j=1}^n a_j \bar{S}_T^i < K/B_T - a_0) \\
&= \bar{S}_0^i P^i(\sum_{j=1}^n a_j \bar{S}_0^i \exp\{\sum_{k=1}^n (\sigma_{jk}{}^i W_T^k - \sigma_{jk}^2 T/2 + \sigma_{jk}\sigma_{ik} T)\} < K/B_T - a_0) \\
&= \bar{S}_0^i P(\sum_{j=1}^n a_j S_0^i \exp\{\sum_{k=1}^n (\sigma_{jk} W_T^k - \sigma_{jk}^2 T/2 + \sigma_{jk}\sigma_{ik} T)\} < K/B_T - a_0) \\
&= \bar{S}_0^i P(\sum_{j=1}^n a_j S_T^i \exp\{-u_i T + \sum_{k=1}^n \sigma_{jk}\sigma_{ik} T\} < K/B_T - a_0)
\end{aligned}
$$

记 $D^i = \left\{\omega : \sum_{j=1}^n a_j S_T^i \exp\{-u_i T + \sum_{k=1}^n \sigma_{jk}\sigma_{ik} T\} < K/B_T - a_0\right\}$，则

$$
E^*(\bar{S}_T^i \mathbf{1}_D) = \bar{S}_0^i P(D^i)
$$

综合 (I)(II) 我们得到：

$$
C(K, A, T) = (K/B_T - a_0) P(D^0) - \sum_{i=1}^n a_i \bar{S}_0^i P(D^i)
$$

上式虽然仍然包含复杂的表达式，难以进行分析，但是其中的概率可以用 Monte-Carlo 方法模拟计算，给投资组合的纯风险度量带来了很大的方便。

三　纯风险的最小化

这一部分我们利用第二部分得到的 $C(K, A, T)$ 的两种形式来求解投资组合的最优纯风险管理模型：

$$
\begin{array}{ll}
\min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}} C(K, T, A) & \\
s.t. & \left\{ \begin{array}{l} a_0 + \sum_{i=1}^n a_i S_0^i = 1 \\ E(a_0 B_T + \sum_{i=1}^n a_i S_T^i) \geq L \end{array} \right.
\end{array}
\tag{1}
$$

§3.1　模型的简化

首先将问题 (1) 中的等式约束解出：

$$
a_0 = 1 - \sum_{i=1}^n a_i S_0^i
$$

将上式和 $C(K, A, T) = E^*((K/B_T - a_0 - \sum_{i=1}^n a_i \bar{S}_T^i)^+)$ 代入另外两式，原问题等价于：

$$
\begin{aligned}
& \min_{(a_1, \cdots, a_n)} E^*(((K/B_T - 1) - \sum_{i=1}^n a_i(\bar{S}_T^i - \bar{S}_0^i))^+) \\
& s.t. \qquad E(\sum_{i=1}^n a_i(\bar{S}_T^i - \bar{S}_0^i)) \geq L/B_T - 1
\end{aligned}
$$

记 $\hat{K}=K/B_T-1, \hat{L}=L/B_T-1$ ，那么问题变为

$$\begin{array}{ll} \min_{(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n} & E^*((\hat{K}-\sum_{i=1}^n a_i(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i))^+) \\ s.t. & E(\sum_{i=1}^n a_i(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i)) \geq \hat{L} \end{array} \tag{2}$$

命题 3.1.1 (I) $E^*((\hat{K}-\sum_{i=1}^n a_i(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i))^+) \geq \hat{K}$ 。

(II) 如果 $\hat{K}<0$ ，则 $E^*((\hat{K}-\sum_{i=1}^n a_i(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i))^+) > \hat{K}$ 。

证明:

$$E^*((\hat{K}-\sum_{i=1}^n a_i(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i))^+) \geq E^*(\hat{K}-\sum_{i=1}^n a_i(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i))$$

因为在 P^* 下， $\bar{S}_t^i$ 是鞅，所以 $E^*(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i)=0$ ，代入上式即得:

$$E^*((\hat{K}-\sum_{i=1}^n a_i(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i))^+) \geq \hat{K}$$

当 $\hat{K}<0$ 时， $E^*((\hat{K}-\sum_{i=1}^n a_i(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i))^+) \geq 0 > \hat{K}$ 。

命题 3.1.2 记 $\Gamma=\left\{(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n : \sup_{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n}\{\hat{K}-\sum_{i=1}^n a_i(x_i-\bar{S}_0^i)\}>0\right\}$ 。在区域 Γ 中， $E^*((\hat{K}-\sum_{i=1}^n a_i(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i))^+)$ 是 $(a_1,\cdots,a_n)$ 的严格凸函数。

证明:

在区域 Γ 中，对于任意 $(a_1,\cdots,a_n)\neq(b_1,\cdots,b_n)$ ，

$$\Pi=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n : (\hat{K}-\sum_{i=1}^n a_i(x_i-\bar{S}_0^i))(\hat{K}-\sum_{i=1}^n b_i(x_i-\bar{S}_0^i))<0\right\}$$

的 $Lebesgue$ 测度大于 0 ，而 $\bar{S}_T$ 在 $\mathbb{R}_+^n$ 中的任意 $Lebesgue$ 测度大于 0 的集合的概率都大于 0 ，因此

$$P^*(\bar{S}_T\in\Pi)=P^*\{\omega : (\hat{K}-\sum_{i=1}^n a_i(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i))(\hat{K}-\sum_{i=1}^n b_i(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i))<0\}>0$$

所以对于任意 $1>\lambda>0$ ，

$$\begin{aligned} & E^*((\hat{K}-\sum_{i=1}^n(\lambda a_i+(1-\lambda)b_i)(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i))^+) \\ = \;& E^*([\lambda(\hat{K}-\sum_{i=1}^n a_i(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i))+(1-\lambda)(\hat{K}-\sum_{i=1}^n b_i(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i))]^+) \\ < \;& E^*(\lambda(\hat{K}-\sum_{i=1}^n a_i(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i))^+)+E^*((1-\lambda)(\hat{K}-\sum_{i=1}^n b_i(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i))^+) \\ = \;& \lambda E^*((\hat{K}-\sum_{i=1}^n a_i(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i))^+)+(1-\lambda)E^*((\hat{K}-\sum_{i=1}^n b_i(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i))^+) \end{aligned}$$

命题得证。

在区域 Γ 之外，显然有 $E^*((\hat{K}-\sum_{i=1}^n a_i(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i))^+)=0$ 。实际上，因为 $\bar{S}_t$ 服从对数正态分布， $(a_1,\cdots,a_n)\in\Gamma$ 和 $E^*((\hat{K}-\sum_{i=1}^n a_i(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i))^+)=0$ 是等价的，这一结论在下面的推导中是有用的。

命题 3.1.3 如果 $\hat{L} > 0$ ，即 $L > e^{rT}$ ，那么问题 (2) 和下面的问题 (3) 等价。

$$\begin{array}{ll} \min_{(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n} & E^*((\hat{K} - \sum_{i=1}^n a_i(\bar{S}_T^i - \bar{S}_0^i))^+) \\ s.t. & E(\sum_{i=1}^n a_i(\bar{S}_T^i - \bar{S}_0^i)) = \hat{L} \end{array} \tag{3}$$

证明:

为了方便，记 $f(a_1,\cdots,a_n) = E^*((\hat{K} - \sum_{i=1}^n a_i(\bar{S}_T^i - \bar{S}_0^i))^+)$ 。

假设在问题 (2) 中， $f(a_1,\cdots,a_n)$ 在 $(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n)$ 上达到最小值。在 $(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n)$ 上，$E(\sum_{i=1}^n \bar{a}_i(\bar{S}_T^i - \bar{S}_0^i)) = \hat{L}'$ 。

沿用上一命题中 Γ 的定义, 如果 $(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n) \notin \Gamma$, 根据前面的分析，$f(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n) = 0$ 。此时，我们只需取

$$\bar{a}_i' = \bar{a}_i\hat{L}/\hat{L}' \qquad i = 1,\cdots,n$$

则容易推出

$$\sup_{x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}_+^n}\{\hat{K} - \sum_{i=1}^n \bar{a}_i'(x_i - \bar{S}_0^i)\} \le 0, \qquad E(\sum_{i=1}^n \bar{a}_i'(\bar{S}_T^i - \bar{S}_0^i)) = \hat{L}$$

因此， $f(\bar{a}_1',\cdots,\bar{a}_n') = 0$ ，即问题 (3) 的最优解也是 0 。

如果 $(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n) \in \Gamma$ ，我们来证明 $\hat{L}' = \hat{L}$

假如 $\hat{L}' \ne \hat{L}$ ，记 $\lambda = \hat{L}/\hat{L}'$ ，则 $0 < \lambda < 1$ 。此时 $E(\sum_{i=1}^n \lambda\bar{a}_i(\bar{S}_T^i - \bar{S}_0^i)) = \lambda\hat{L}' = \hat{L}$ ，因为 $E(\sum_{i=1}^n \bar{a}_i(\bar{S}_T^i - \bar{S}_0^i)) = \hat{L}' \ne 0$ ，所以 $(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n) \ne 0$ ，所以

$$\begin{aligned} & f(\lambda(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n)) \\ = \; & f(\lambda(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n) + (1-\lambda)(0,\cdots,0)) \\ \le \; & \lambda f(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n) + (1-\lambda)f(0,\cdots,0) \\ = \; & \lambda f(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n) + (1-\lambda)f(0,\cdots,0) \\ = \; & f(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n) + (1-\lambda)f(0,\cdots,0) - (1-\lambda)f(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n) \\ = \; & f(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n) + (1-\lambda)(f(0,\cdots,0) - f(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n)) \\ \le \; & f(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n) \end{aligned}$$

如果 $(0,\cdots,0) \in \Gamma$, 此时上面推导的第一个不等号中小于号成立; 如果 $(0,\cdots,0) \notin \Gamma$, 那么 $f(0,\cdots,0) = 0$ ，我们知道，此时 $f(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n) > 0$ ，故上面推导的第二个不等号中小于号成立。

总之， $f(\lambda(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n)) < f(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n)$ 。因此 $(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n)$ 不是问题 (2) 的最小点，这与假设矛盾。故 $\hat{L}' = \hat{L}$ ，命题得证。

当 $L \le e^{rT}$ 时，期望收益率低于无风险收益率，此时问题本身没有什么价值。在本文中我们只考虑 $L > e^{rT}$ 的情况。

将问题 (3) 中的等式约束代入目标函数，问题变为无约束优化问题:

$$\min_{(a_1,\cdots,a_{n-1})} E^*((\hat{K} - \sum_{i=1}^n a_i(\bar{S}_T^i - \bar{S}_0^i))^+) \tag{4}$$

其中 $a_n = (\hat{L} - E(\sum_{i=1}^{n-1} a_i(\bar{S}_T^i - \bar{S}_0^i)))/E(\bar{S}_T^n - \bar{S}_0^n)$ 是 $(a_1,\cdots,a_{n-1})$ 的一次函数。

记问题 (4) 中的目标函数为 $F(a_1,\cdots,a_{n-1})$ ，则根据第二部分的结果知：

$$\begin{aligned}F(a_1,\cdots,a_{n-1}) &= (\hat{K}-\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{S}_0^i)P(D^0)-\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{S}_0^iP(D^i)\\ &= \hat{K}P(D^0)-\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{S}_0^i(P(D^i)-P(D^0))\end{aligned}$$

其中 $\begin{array}{l}D^0=\left\{\omega:\sum_{i=1}^{n}a_iS_T^i\exp\{-u_iT\}<\hat{K}+\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{S}_0^i\right\}\\ D^i=\left\{\omega:\sum_{i=1}^{n}a_iS_T^i\exp\{-u_iT+\sum_{k=1}^{n}\sigma_{jk}\sigma_{ik}T\}<\hat{K}+\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{S}_0^i\right\}\end{array}$

§3.2 模型的求解

在 §3.1 中, 我们得到问题 (4) 中目标函数 $F(a_1,\ldots,a_{n-1})$ 的概率形式, 其中包含了 $n-1$ 个变量和与它们有关的 $n+1$ 个集合，在求解最小值时很难处理。但是通过 $F(a_1,\cdots,a_{n-1})$ 的期望形式，可以发现它具有良好的计算性质，从而可以用一些简单的搜索算法去寻找近似最优解。

定理 3.2.1 在区域 $\left\{(a_1,\cdots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}:\sup_{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n}\{\hat{K}-\sum_{i=1}^{n}a_i(x_i-\bar{S}_0^i)\}>0\right\}$ 中, 目标函数 $F(a_1,\cdots,a_{n-1})$ 是 $(a_1,\cdots,a_{n-1})$ 的严格凸函数。

证明:

在区域 $\left\{(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n:\sup_{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n}\{\hat{K}-\sum_{i=1}^{n}a_i(x_i-\bar{S}_0^i)\}>0\right\}$ 中, 命题 3.1.2 证明了 $f(a_1,\cdots,a_n)$ 是严格凸的。而 $F(a_1,\cdots,a_{n-1})=f(a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)$ ，且 a_n 是 $(a_1,\cdots,a_{n-1})$ 的一次函数，所以 $F(a_1,\cdots,a_{n-1})$ 是 $(a_1,\cdots,a_{n-1})$ 的严格凸函数。

在区域 $\left\{(a_1,\cdots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}:\sup_{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n}\{\hat{K}-\sum_{i=1}^{n}a_i(x_i-\bar{S}_0^i)\}>0\right\}$ 之外, 我们已经知道 $F(a_1,\cdots,a_{n-1})=0$ 。

定理 3.2.2 存在 $\varepsilon>0,\delta>0$ ，满足 $F(a_1,\cdots,a_{n-1})\geq\varepsilon\delta\sum_{i=1}^{n-1}|a_i|-\hat{K}$ 。

证明:

记 $I_1=\{i:a_i\leq 0\},\quad I_2=\{i:a_i>0\}$ 。

由定义知， $F(a_1,\cdots,a_{n-1})=E^*((\hat{K}-\sum_{i=1}^{n}a_i(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i))^+)$.

已知在等价鞅测度 P^* 下， $\bar{S}_t^i=\bar{S}_0^i\exp\{\sum_{j=1}^{n}(\sigma_{ij}\hat{W}_t^j-\sigma_{ij}^2t/2)\}$ ， $\hat{W}_t$ 在 P^* 下服从 n 维标准正态分布。根据正态分布的性质，很容易推导 $P^*(\bar{S}_T^i\in(a\bar{S}_0^i,b\bar{S}_0^i)\ |\bar{S}_T^{-i})>0$ 。这里 $\bar{S}_T^{-i}$ 表示 $(\bar{S}_T^1,\cdots,\bar{S}_T^n)$ 中除 $\bar{S}_T^i$ 之外的分量， $0<a<b$ 。

取 $\varepsilon=\min\{\bar{S}_0^i/2;i=1,\cdots,n\}$ ，则

$$\begin{aligned}P^*(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i<-\varepsilon) &= P^*(\bar{S}_T^i<\bar{S}_0^i-\varepsilon)\\ &\geq P^*(\bar{S}_T^i<\varepsilon)\\ &> 0\\ P^*(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i>\varepsilon) &> 0\end{aligned}$$

所以 $P^*\left\{\begin{array}{lll}\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i<-\varepsilon & for & i\in I_2\\ \bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i>\varepsilon & for & i\in I_1\end{array}\right\}>0$

取 $\delta=\min\left\{P^*\left(\begin{array}{lll}\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i<-\varepsilon & for & i\in I_2\\ \bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i>\varepsilon & for & i\in I_1\end{array}\right):\begin{array}{c}I_1\cap I_2=\emptyset\\ I_1\cup I_2=(1,\cdots,n)\end{array}\right\}$

因为 (I_1,I_2) 只有有限多种可能的取值方式，所以 $\delta>0$ 。此时

$$
\begin{aligned}
F(a_1,\cdots,a_{n-1}) &= E^*((\hat{K}-\sum_{i=1}^n a_i(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i))^+)\\
&\geq E^*(-\sum_{i=1}^n a_i(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i))^+-\hat{K})\\
&\geq E^*\left((-\sum_{i=1}^n a_i(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i))^+\middle|\begin{array}{lll}\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i<-\varepsilon & for & i\in I_2\\ \bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i>\varepsilon & for & i\in I_1\end{array}\right)-\hat{K}\\
&\geq n\delta\varepsilon\sum_{i=1}^n|a_i|-\hat{K}\\
&\geq \delta\varepsilon\sum_{i=1}^n|a_i|-\hat{K}
\end{aligned}
$$

定理得证。

推论一：目标函数 $F(a_1,\cdots,a_{n-1})$ 在有限区域内达到最小值。

根据定理 3.2.1 和推论一，我们有

推论二：目标函数 $F(a_1,\cdots,a_{n-1})$ 的最小值为 0 ，或者有唯一的最小点，而且它在有限区域内达到最小值。

在求解最优化问题中，如果目标函数是严格凸函数，而且能在有限区域内达到最小值，最速下降法是一种比较有效的最优化搜索方法，此时它的收敛性可以得到保证。下面我们来计算函数的梯度方向，用于最速下降法的搜索。

用目标函数的概率形式来计算梯度方向几乎是不可行的，因为函数的自变量出现在一系列复杂的集合中。这里我们用期望的形式进行推导，再用概率形式进行计算。

记 $b_i=E(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i), i=1,\cdots,n$ ，则 $a_n=(\hat{L}-\sum_{i=1}^{n-1}a_ib_i)/b_n$

$$F(a_1,\cdots,a_{n-1})=f(a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)$$

对于 $i=1,\cdots,n-1$ ，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a_i}F(a_1,\cdots,a_{n-1}) &= \frac{\partial}{\partial a_i}f(a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)+\frac{\partial}{\partial a_n}f(a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)\frac{\partial a_n}{\partial a_i}\\
&= \frac{\partial}{\partial a_i}f(a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)-\frac{b_i}{b_n}\frac{\partial}{\partial a_n}f(a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)
\end{aligned}
$$

附录二计算了对任意 $i=1,\cdots,n,\quad \frac{\partial}{\partial a_i}f(a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)=-E^*((\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i)\mathbf{1}_D)$ 。在第二部分利我们证明了 $E^*(\bar{S}_T^i\mathbf{1}_D)=\bar{S}_0^iP(D^i), E^*(\mathbf{1}_D)=P(D^0)$ ，所以

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a_i}f(a_1,\cdots,a_n) &= -\bar{S}_0^i(P(D^i)-P(D^0))\\
\frac{\partial}{\partial a_i}F(a_1,\cdots,a_{n-1}) &= -\bar{S}_0^i(P(D^i)-P(D^0))-b_i\bar{S}_0^n(P(D^n)-P(D^0))/b_n\\
&= -\bar{S}_0^iP(D^i)-b_i\bar{S}_0^nP(D^n)+(\bar{S}_0^i-b_i\bar{S}_0^n/b_n)P(D^0))
\end{aligned}
$$

在第四部分，我们就利用这个公式实现最速下降法的搜索计算。

四　算法的实现及实验结果

前面我们已经计算出原问题的无约束形式，其目标函数为：

$$F(a_1,\cdots,a_{n-1}) = (\hat{K} - \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{S}_0^i) P(D^0) - \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{S}_0^i P(D^i)$$

其中

$$\begin{aligned}
\hat{K} &= K/B_T - 1, \qquad \hat{L} = L/B_t - 1 \\
b_i &= E(\bar{S}_T^i - \bar{S}_0^i) = (\hat{L} - \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i)/b_n \\
D^i &= \{\omega : \sum_{i=1}^{n} a_i S_T^i \exp\{-u_i T + \sum_{k=1}^{n} \sigma_{jk}\sigma_{ik} T\} < \hat{K} + \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{S}_0^i\} \\
D^0 &= \{\omega : \sum_{i=1}^{n} a_i S_T^i \exp\{-u_i T\} < \hat{K} + \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{S}_0^i\}
\end{aligned}$$

对于概率 $P(D^i)$，我们采用 Monte-Carlo方法进行模拟。在下面的实验中，我们对每一个随机变量都用 1000000 个样本进行模拟。有了 $P(D^i)$ 的值，最速下降法的搜索和目标函数值的计算就很容易进行了。

下面我们用修改后的最速下降法来搜索最小点，其思路是这样的：从初始点出发，按照事先给定的步长，沿着目标函数的梯度反方向前进一步。如果在新的地方的梯度变大或者函数值变大，说明搜索步长太大，需要将步长缩小，因此，先返回，将步长缩小 2 倍，再继续往前搜索。

算法如下：

(1) 给定一个初始点 $A=(a_1,\cdots,a_{n-1})$，一个梯度终止水平 $delta$ 和初始步长 $length$；
(2) 计算 a_n 和函数 F 的值以及它的梯度 $pgrad$；
(3) $A = A - length * pgrad$；
(4) 计算新的 a_n、函数 F 的值和梯度 $grad$；
(5) 如果函数 F 的值为 0，转到 (9) 输出结果；
(6) 如果 $grad$ 的模小于 $delta$，转到 (9) 输出结果；
(7) 如果 $grad$ 的模比 $pgrad$ 的值高，或者新的函数值比原来的函数值大，做运算
　　$A = A + length * pgrad$，　$length = length/2$；
(8) $A = A - length * grad$，　$pgrad = grad$，返回 (4)；
(9) 输出结果 A，　$grad$ 以及目标函数 F 的值。

在这个算法中，给定的初始步长可以适当地大一些，这样可以加快算法的收敛速度，而且不会影响算法的精确度。

附录中列出了用 $Matlab$ 实现的程序。在程序中，我们用了 1000000 个随机数来作为一个随机变量的样本，因此必须考虑计算速度的问题。为了加快计算速度，程序尽可能用向量和矩阵的计算代替循环计算。因此，它的可读性较差；算法上也略有改动，以适合解释执行的 $Matlab$ 语言。

程序需要设定的参数的意义如下：

s0:　　风险资产在 0 时刻的价格
sigma:　风险资产价格过程的对数关于布朗运动的系数矩阵，即前文中的 Σ
U:　　风险资产的对数期望收益率
r:　　无风险资产的对数收益率

这四组参数是描述证券市场的必须参数

K:　　投资所要求的收益率基准
L:　　投资要求的期望收益率
T:　　到期时间

这三个参数是投资则的要求

delta:　决定算法终止的梯度下限
length:　算法搜索的初始步长

这两个参数决定算法的精确度和收敛速度

下面我们列举两次用不同参数试验得到的结果。

第一组实验

证券市场有三种风险资产，参数设定如下：

$s0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}'$;

$sigma = \begin{bmatrix} -.4326 & .2877 & 1.1892 \\ -1.6656 & -1.1465 & -.0376 \\ .1253 & 1.1909 & .3273 \end{bmatrix}$

$U = [0.20.3, 0.17]'$;

$r = 0.15$;

$K = 1.15$;

$L = 2$;

$T = 1$;

$delta = 0.0001$;

$length = 10$;

其中 $sigma$ 是随机产生的非奇异矩阵。运行结果如下：

试验顺序	期权价格	最优组合	梯度	模拟用时（秒）	搜索用时（秒）	搜索步数
1	0.8725	(0.4061,0.8328,0.8773)	(0.0075,-0.0043)	5.22	32.74	11
2	0.8606	(0.4156,0.8145,0.8604)	(0.0081,-0.0047)	5.27	32.08	11
3	0.8740	(0.4191,0.8051,0.9093)	(0.0084,-0.0047)	5.27	31.96	11
4	0.8687	(0.4138,0.8055,0.9086)	(0.0084,-0.0047)	5.22	32.03	11
5	0.8792	(0.4317,0.8052,0.9166)	(0.0116,-0.0067)	5.22	37.85	13
6	0.8623	(0.4172,0.8141,0.8794)	(0.0080,-0.0047)	5.21	31.96	11
7	0.8702	(0.4520,0.7875,0.8951)	(0.0075,-0.0042)	5.22	34.94	12
8	0.8700	(0.4255,0.8100,0.8887)	(0.0086,-0.0049)	5.22	31.97	11
9	0.8520	(0.4016,0.8363,0.8221)	(0.0069,-0.0039)	5.22	32.02	11
10	0.8520	(0.3964,0.8195,0.8448)	(0.0068,-0.0039)	5.21	32.02	11

从这一组参数的试验来看，计算所得的最优期权价格表现出了相当稳定的值，误差最大不超过 0.025 。最优组合误差也比较小。有效搜索步数一般在 7 次左右。

程序搜索过程示意图见附录四，那里列举了这组实验的第 1 、第 9 次产生的示意图。

第二组实验

证券市场有三种风险资产，参数设定如下：

$$s0=\left[\begin{array}{ccccc}1&1&1&1&1\end{array}\right]';$$

$$sigma=\left[\begin{array}{ccccc}-0.4326&1.1909&-0.1867&0.1139&0.2944;\\-1.6656&1.1892&0.7258&1.0668&-1.3362;\\0.1253&-0.0376&-0.5883&0.0593&0.7143;\\0.2877&0.3273&2.1832&-0.0956&1.6236;\\-1.1465&0.1746&-0.1364&-0.8323&-0.6918;\end{array}\right]$$

$$U=\left[\begin{array}{ccccc}0.13&0.15&0.2&0.18&0.21\end{array}\right]';$$

$r=0.11;$

$K=1;$

$L=1.5;$

$T=1;$

$delta=0.01;$

$length=10;$

这里的 $sigma$ 也是随机产生的非奇异矩阵，计算结果如下：

试验顺序	期权价格	最优组合	梯度	模拟用时 (秒)	搜索用时 (秒)	搜索步数
1	.2994	(.09,.00,.65,.03,.40)	(-.0114, .0007,.0942,-.0265)	8.85	175.21	38
2	.2967	(.08,.10,.65,.02,.30)	(-.0291,-.0193,.0788, .0044)	8.95	62.61	14
3	.3036	(.10,.00,.66,.04,.38)	(-.0124,-.0016,.0919,-.0353)	8.90	355.15	79
4	.3002	(.09,.00,.66,.04,.38)	(-.0113,-.0414,.0852,-.0294)	8.89	215.58	48
5	.2996	(.10,.00,.69,.02,.38)	(-.0161,-.0040,.0774,-.0075)	8.90	139.89	31
6	.3041	(.12,.00,.68,.02,.38)	(-.0181, .0009,.0954,-.0160)	8.95	180.16	39
7	.3031	(.11,.00,.67,.03,.39)	(-0.172, .0009,.0954,-.0241)	8.89	246.68	46
8	.3005	(.10,.00,.70,.02,.36)	(-.0195,-.0780,.0691,-.0049)	9.56	190.59	36
9	.3035	(.11,.00,.66,.04,.39)	(-.0127, .0004,.0924,-.0346)	9.56	387.28	77
10	.3014	(.12,.00,.65,.01,.40)	(-.0194,-.0063,.0957,-.0035)	9.83	98.15	21
11	.3045	(.12,.00,.65,.06,.36)	(-.0233, .0007,.0914,-.0285)	8.95	121.83	27
12	.3015	(.12,.00,.65,.01,.40)	(-.0261, .0004,.0958,-.0050)	8.96	144.24	32

这一组试验所计算出来的最优期权价格也很稳定，误差不超过 2.5% 。最优组合波动也不是很大，但是有效搜索步数波动比较大。

附录四中列举出了这一组实验第 2 、第 10 、第 11 次搜索过程示意图。 [2]

[2]以上运行结果所用的计算机配置是　　内存： 128 M　 CPU ： Pentium II 350MHZ

附　　录

附录一　有关鞅过程的两个定理

定理 5.1.1 （鞅表示引理）$\{W_t=(W_t^1,\cdots,W_t^d),\mathcal{F}_t;0\le t<\infty\}$ 是一个 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的 n 维标准布朗运动， $\mathcal{F}\supseteq\mathcal{F}_t$ ，对于任何 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的平方可积鞅 $M=\{M_t:0\le t\le\infty\}$ ，如果 $M_0=0$ 且 M 是路径左连右极的，则存在循序可测过程 $Y^j=\{Y_t^j,\mathcal{F}_t:0\le t\le\infty\}$ ，满足对任意 $0<T<\infty$ ，

$$E(\int_0^T(Y_t^j)^2dt<\infty\qquad j=1,\cdots,n \tag{1}$$

$$M_t=\sum_{j=1}^n\int_0^tY_s^jdW_s^j\qquad 0\le t<\infty \tag{2}$$

如果存在另一个循序可测过程 $\hat{Y}^j$ 满足 (1) 和 (2) ，那么

$$\sum_{j=1}^n\int_0^T\left|Y_t^j-\hat{Y}_t^j\right|^2dt=0$$

这个定理引自文献 [6] 。从这个定理我们很容易可以证明如下推论。

推论：$\{W,\mathcal{F},P\}$ 定义如上， $0<T<\infty$ ，如果 X 是一个 $\mathcal{F}_T-$ 可测的随机变量，满足 $EX^2<\infty$ ，那么存在循序可测过程 $Y^j=\{Y_t^j,\mathcal{F}_t:0\le t<\infty\}$ ，满足 (1) 和

$$X=E(X)+\sum_{j=1}^n\int_0^TY_t^jdW_t^j$$

定理 5.1.2 ($Girsanov$ 引理）$\{W_t=(W_t^1,\cdots,W_t^d),\mathcal{F}_t;0\le t<\infty\}$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的 $d-$ 维标准布朗运动， r 是一个 $\mathcal{F}_t-$ 适应的实过程，在 $(\Omega,\mathcal{F}_t)$ 上定义 P 的等价概率测度 P_t^* ：对任意 $A\in\mathcal{F}_t,P_t^*(A)=E(\exp\{\int_0^tr_udW_u-\int_0^t\|r_u\|^2du/2\}\mathbf{1}_A)$ 。如果 $\exp\{\int_0^tr_udW_u-\int_0^t\|r_u\|^2du/2\}$ 是鞅，那么对于任意 $0\le T<\infty$ ， $\{\tilde{W}_t=W_t-\int_0^tr_udu,\mathcal{F}_t;0\le t<T\}$ 就是 $(\Omega,\mathcal{F}_t,P_T^*)$ 上的 $d-$ 维标准布朗运动。

这个定理也是引自文献 [6] 。

附录二　目标函数梯度计算的相关公式

命题 5.2.1 当 $n>1$ 时， $\frac{\partial}{\partial a_i}E^*((\hat{K}-\sum_{i=1}^na_i(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i))^+)=-E^*((\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i)\mathbf{1}_D)$ ，这里 $D=\left\{\omega:\sum_{i=1}^na_i(\bar{S}_T^i-\bar{S}_0^i)<\hat{K}\right\}$

证明：

记 $X_i=\bar{S}_t^i-\bar{S}_0^i,X=(X_1,\cdots,X_n),X_{-i}=(X_1,\cdots,X_{i-1},X_{i+1},\cdots,X_n)$

很容易验证，在 X_{-i} 取任何值的条件下， X_i 是绝对可积的随机变量，而且它的条件分布是连续的。

(1) 首先我们计算 $n=1$ 的情形。

当 $a>0$ 时

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a}E^*((\hat{K}-aX)^+) &= \frac{\partial}{\partial a}\int_{-\infty}^{\hat{K}/a}(\hat{K}-ax)P^*(dx) \\
&= \frac{\partial}{\partial a}(\hat{K}/a)(\hat{K}-ax)|_{x=\hat{K}/a}+\int_{-\infty}^{\hat{K}/a}\frac{\partial}{\partial a}(\hat{K}-ax)P^*(dx) \\
&= -\int_{-\infty}^{\hat{K}/a}xP^*(dx) \\
&= -E^*(X\mathbf{1}_{(\hat{K}-aX>0)})
\end{aligned}
$$

当 $a<0$ 时

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a}E^*((\hat{K}-aX)^+) &= \frac{\partial}{\partial a}\int_{\hat{K}/a}^{\infty}(\hat{K}-ax)P^*(dx) \\
&= \frac{\partial}{\partial a}(\hat{K}/a)(\hat{K}-ax)|_{x=\hat{K}/a}+\int_{\hat{K}/a}^{\infty}\frac{\partial}{\partial a}(\hat{K}-ax)P^*(dx) \\
&= -\int_{\hat{K}/a}^{\infty}xP^*(dx) \\
&= -E^*(X\mathbf{1}_{(\hat{K}-aX>0)})
\end{aligned}
$$

当 $a=0$ 时

如果 $\hat{K}>0$，则

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a}E^*((\hat{K}-aX)^+) &= \lim_{a'\to 0}(E^*((\hat{K}-a'X)^+)-\hat{K})/a' \\
&= \lim_{a'\to 0}(\hat{K}P^*(\mathbf{1}_{a'X<\hat{K}})-\hat{K})/a'-\lim_{a'\to 0}E^*(X\mathbf{1}_{a'X<\hat{K}}) \\
&= -\lim_{a'\to 0}E^*(X\mathbf{1}_{a'X<\hat{K}})
\end{aligned}
$$

由控制收敛定理可知，上面的极限和期望是可以交换的。所以

$$
\lim_{a'\to 0}E^*(X\mathbf{1}_{a'X<\hat{K}})=E^*(X\lim_{a'\to 0}\mathbf{1}_{a'X<\hat{K}})=E^*(X)=E^*(X\mathbf{1}_{0\times X<\hat{K}})
$$

如果 $\hat{K}<0$，则

$$
\frac{\partial}{\partial a}E^*((\hat{K}-a'X)^+)=\lim_{a'\to 0}E^*((\hat{K}-a'X)^+)/a'
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{a'\to 0^+}E^*((\hat{K}-a'X)^+) &= \lim_{a'\to 0^+}E^*((\frac{\hat{K}-a'X}{a'})^+) \\
&= E^*(\lim_{a'\to 0^+}(\hat{K}/a'-X)^+) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{a'\to 0^-}E^*((\hat{K}-a'X)^+) &= \lim_{a'\to 0^-}(-E^*((\frac{\hat{K}-a'X}{-a'})^+)) \\
&= -E^*(\lim_{a'\to 0^-}(\hat{K}/(-a')+X)^+) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

所以 $\frac{\partial}{\partial a}E^*((\hat{K}-a'X)^+)=0=-E^*(X\mathbf{1}_{0\times X<K})$
如果 $\hat{K}=0$，那么

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a^+}E^*((\hat{K}-a'X)^+) &= \lim_{a'\to 0^+}E^((-a'X)^+)/a' \\ &= E^*((-X)^+) \\ &= -E^*(X\mathbf{1}_{X<0})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a^-}E^*((\hat{K}-a'X)^+) &= \lim_{a'\to 0^-}E^((-a'X)^+)/a' \\ &= -E^*(X^+) \\ &= -E^*(X\mathbf{1}_{X>0})\end{aligned}$$

因此我们有当 $\hat{K}=0, a=0$ 时， $E^*((\hat{K}-aX)^+)$ 对 a 有单边导数

$$\frac{\partial}{\partial a^+}E^*((\hat{K}-aX)^+)=E^*((-X)^+)$$

$$\frac{\partial}{\partial a^-}E^*((\hat{K}-aX)^+)=-E^*(X^+)$$

在其他情况，

$$\frac{\partial}{\partial a}E^*((\hat{K}-aX)^+)=-E^*(X\mathbf{1}_{\hat{K}-aX>0})$$

(2) 当 $n>1$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a^+}E^*((\hat{K}-\sum_{j=1}^{n}a_jX_j)^+) &= \frac{\partial}{\partial a^+}E^*(E^*((\hat{K}-\sum_{j=1}^{n}a_jX_j)^+)|X_{-i}) \\ &= E^*(\frac{\partial}{\partial a^+}E^*((\hat{K}-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_jX_j-a_iX_i)^+|X_{-i}))\end{aligned}$$

对于任意 X_{-i} 的取值 $X_j=x_j(j\neq i)$，根据 $n=1$ 的结果：
当 $\hat{K}'=\hat{K}-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_jx_j\neq 0$ 或者 $a_i\neq 0$ 时，

$$\left|\frac{\partial}{\partial a}E^*((\hat{K}'-a_iX_i)^+)\right|=|-E^*(X_i\mathbf{1}_D|\leq E^*(|X_i|)$$

当 $\hat{K}'=\hat{K}-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_jx_j=0$ 而且 $a_i=0$ 时，

$$\left|\frac{\partial}{\partial a^+}E^*((\hat{K}'-a_iX_i)^+)\right|=\left|E^*((-X_i)^+)\right|\leq E^*(|X_i|)$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial a^-}E^*((\hat{K}'-a_iX_i)^+)\right|=\left|-E^*((X_i)^+)\right|\leq E^*(|X_i|)$$

而 $P(\hat{K}-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_jx_j=0)=0$，所以上面求导和期望的交换是成立的。

$$E^*(\frac{\partial}{\partial a^+}E^*((\hat{K}-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_jX_j-a_iX_i)^+|X_{-i}))=E^*(-E^*(X_i\mathbf{1}_D|X_{-i}))=-E^*(X_i\mathbf{1}_D)$$

证毕

附录三　算法实现程序

主程序

```
main.m
function main(s0,sigma,U,r,K,L,T,delta,length)

home;
c1=clock;
n=size(sigma,1);
step=2;
port=zeros(101,1);
port(1)=10000;
pgrad=zeros(n,1)+10;
if abs(det(sigma))<0.1
   'there may be arbitrage!!!'
   return;
end

B=exp(r*T);
K=K-B;
L=L-B;

S=mysimu(s0,sigma,U,T);
b=mean(S)'-s0/B;
A=zeros(n,1);
A(n)=L/b(n);
p=zeros(n,1);

S=S*diag(exp(-U*T));
sigma=exp((sigma*sigma')*T);

c2=clock;

while (step<100)
   tK=K/B+A'*s0;
   p0=sum(S*A<tK)/1000000;
   tmp=sigma*diag(A);
   p=sum(S*tmp'<tK,1)'/1000000;
   p=diag(s0)*p;
   grad=p-b*p(n)/b(n)-B*(s0-b*s0(n)/b(n))*p0;


   if (grad'*grad<delta)
      break;
```

```
   end
   port(step)=tK*p0-A'*p;


if (port(step)<10^(-12))
      break;
   end
if (port(step-1)>port(step) & port(step-1)-port(step)<0.0001)
      break;
   end


  if (grad'*grad>pgrad'*pgrad | port(step)>port(step-1))
      A=A-length*pgrad;
length=length/10;
fprintf('\n length become to %d\n', length);
      A=A+length*pgrad;
      A(n)=0;
      A(n)=(L-A'*b)/b(n);
   else
      step=step+1;
      pgrad=grad;
      A=A+length*grad;
      A(n)=0;
      A(n)=(L-A'*b)/b(n);
   end
end
c3=clock;
fprintf('\n\n\n the portfolio is \n\n');
fprintf('%8.2f\t',A);
fprintf('\n\n the grad at A is \n\n');
fprintf('%8.6f\t',grad);
port(step)=tK*p0-A'*p;
fprintf('\n\n the value of the option is\n %8.6f\n',port(step));
fprintf('\n\n\n\n time cost in creat random sample:\t');
disp(etime(c2,c1));
fprintf('\n\n\n\n time cost in search:\t');
disp(etime(c3,c2));
fprintf('\n\n\n\n time cost total:\t');
disp(etime(c3,c1));
close;
figure;
plot(port(2:step));
axis([1 step-1 port(step) port(2)]);
```

```
xlabel('step number');
ylabel('value of the option');
title('search process for minimum of option price');
set(gca,'xtick',1:step-1);
set(gca,'ytick',port(step):0.1:port(2));
```

产生模拟数据程序： mysimu.m

```
function [S]=mysimu(s0,sigma,U,T)

n=size(sigma,1);
sig=zeros(n,1);
W=randn(1000000,n);
W=W*sigma';
sig=sum(sigma(:,1:n).*sigma(:,1:n),2);
for i=1:n
   W(:,i)=W(:,i)+(U(i)-sig(i)/2)*T+log(s0(i));
end
S=exp(W);
```

附录四　两组实验的搜索图

第一组

第二组

从图形中也可以看出来，随着搜索步数增加，所选投资组合的期权价格的减小速度迅速减缓。

参考文献

[1] 罗恩 · 波顿，安德鲁 · 弗里曼，黄向阳，孙涛译， 2000 ， 风险规则，中国人民大学出版社

[2] M. Musiela & M. Rutkowski , 1997 , *Martingale Methods in Financial Modelling* , Heidelberg: Springer-Verlag

[3] A. N. Shiryaev , 1999 , *Essentials of Stochastic Finance* , Singapore: World Scientific

[4] D. Duffie , 1996 , *Dyanmic Asset Pricing Theory*, Second ed. , Princeton University Press , Princeton, N.J.

[5] F. Black & M. Scholes , 1973 , The Pricing of Options and Corporate Liabilities , *Journal of Political Economy* , **Vol.81**, No.3, 637-659

[6] I. Karatzas & S. E. Shreve , 1998 , *Brownian Motion and Stochastic Calculus* , New York: Springer-Verlag

[7] 史树中， 1990 ， 凸分析，上海科学技术出版社

[8] J. B. Hiriart-Urruty & C. Lemarechal , 1993, *Convex Analysis and Minimization Algorithms* , Heidelberg: Springer-Verlag

[9] 袁亚湘，孙文瑜， 1999 ， 最优化理论与方法，科学出版社

[10] 刘炳初， 1994 ， 测度与积分引论讲义，南开大学数学系

[11] Chi-fu Huang & R. H. Litzenberger , 1998 , *Foundations of Financial Economics* , Amsterdam: North-Holland

致　　谢

能写出这篇学位论文, 离不开导师史树中教授的悉心指导。在三年研究生的学习中，虽然史老师工作繁忙，但是他总是尽力给我创造条件, 抓紧机会指导我的学习, 介绍学术前沿动态。在论文的写作过程中，史老师广博的学识、严谨的作风和精益求精的治学态度让我大为受益。在这里我要向史老师表示衷心的感谢。

金融信息技术系张效成老师一直关心论文的写作，同时给我提供了很好的学习环境。我的第二导师陈典发老师对论文提出了许多很好的建议。谢谢他们的关心帮助。

感谢在北京大学学习工作的师兄熊德华和张圣平博士。在和他们的交流之中，我学到了很多东西。

感谢即将赴美的师兄杨杰博士。在史老师不在南开的日子里，杨师兄是我的半个导师。

同时还要感谢即将赴美的胡浩栋师弟，仍将留在南开的谢江师弟和 2000 级的师弟师妹。