Chaos in der Quantenwelt

Nicht nur Planetensysteme oder tropfende Wasserhähne zeigen »chaotisches« Verhalten: Sie reagieren unabsehbar auf winzige Änderungen der Anfangsbedingungen. Auch in der Quantenwelt tritt Chaos auf – mit wichtigen Konsequenzen für nanotechnische Anwendungen.

Von Mason A. Porter und Richard L. Liboff

Im Laufe des 20. Jahrhunderts entstanden zwei Theorien, die den Forschern die Hoffnung raubten, sie würden eines Tages das Verhalten der Natur vollständig vorhersagen können. Zum einen enthüllte die Quantentheorie eine prinzipielle Unbestimmtheit bei Vorgängen winzigster Größenordnung: Beispielsweise lassen sich Ort und Impuls eines Elektrons nicht gleichzeitig präzise feststellen. Zum anderen analysiert die so genannte Chaostheorie dynamische Systeme, deren Verhalten extrem stark von den Anfangsbedingungen abhängt: Eine unmerkliche Änderung des Anfangswerts einer Variablen kann zu einem völlig unvorhersagbaren Systemverhalten führen. Für diese Art von Chaos gibt es die unterschiedlichsten Beispiele – von der Tropfenfolge eines undichten Wasserhahns bis zu Planetenbahnen.

Angesichts der für Chaos wie für Quanten typischen Unvorhersagbarkeit stellt sich die Frage, was geschieht, wenn beides zusammenkommt – am Ende totales Chaos? Vermutlich nicht; seit kurzem verfügen wir über Methoden, uns dem Quantenchaos – dem chaotischen Verhalten von Quantensystemen – modellhaft zu nähern. Denn seit die Physiker auf Chaos jeder Größenordnung stoßen, können sie die Möglichkeit nicht ausschließen, es auch in den winzigsten Gebilden zu finden, die sie heute zu konstruieren vermögen. In solchen nur einige Nanometer – millionstel Millimeter – großen Geräten macht sich jedenfalls zusätzlich die Unbestimmtheit der Quantenwelt bemerkbar. Erste Versuche, dieses exotische Gebiet zu verstehen, haben mathematisch und physikalisch bedeutsame Resultate erbracht.

Erste Indizien für chaotisches Verhalten tauchten gegen Ende des 19. Jahrhunderts auf, als der französische Mathematiker, Physiker und Philosoph Henri Poincaré mit mathematischen Gleichungen die Positionen mehrerer Planeten beim Umlauf um die Sonne vorhersagen wollte. Auf den ersten Blick eine überschaubare Aufgabe: Man stellt die anfänglichen Orte und Geschwindigkeiten fest, setzt sie in ein Gleichungssystem ein, das auf den Newton'schen Bewegungsgesetzen beruht, und als Resultat kommen die künftigen Planetenpositionen heraus. Doch Poincaré erlebte eine böse Überraschung. Selbst wenn er nur zwei Planeten betrachtete, führten schon winzigste Unterschiede in den Anfangswerten für Ort und Geschwindigkeit zu unabsehbaren Veränderungen der zukünftigen Positionen. Ohne dass Poincaré seinerzeit den heute gängigen Ausdruck gebrauchte, hatte er ein »chaotisches« System entdeckt.

Die ganze Bedeutung von Poincarés Arbeit wurde erst viel später offenbar. In den 1960er Jahren entdeckte der amerika-

MIT FREUNDLICHER GENEHMIGUNG DER AUSTRALIA'S COMMONWEALTH SCIENTIFIC AND INDUSTRIAL RESEARCH ORGANIZATION

Das pelzige Gebilde in dieser mikroskopischen Aufnahme besteht aus unzähligen Nanoröhren. Jeder einzelne der feinen Fäden ist ein Rohr aus regelmäßig angeordneten Kohlenstoffatomen; es hat nur rund einen Nanometer (millionstel Millimeter) Durchmesser, kann aber bis zu einigen Millimetern lang werden. In Nanoröhren – und anderen nanotechnischen Artefakten – sind komplizierte Kombinationen von chaotischen und quantenphysikalischen Phänomenen möglich. Dieses Quantenchaos lässt sich gegenwärtig nur mit stark vereinfachten Modellrechnungen erforschen.

nische Meteorologe Edward Lorenz chaotisches Verhalten in einem einfachen Gleichungssystem, das er zur Untersuchung atmosphärischer Vorgänge aufgestellt hatte. Bald schienen den Forschern überall Beispiele für Chaos zu begegnen – in den Spiralarmen von Galaxien und in praktisch jeder Art Oszillator, von elastischen Federn bis zu elektrischen Stromkreisen.

Nachdem die Wissenschaftler überall chaotisches Verhalten gefunden hatten, lag die Frage nahe: Zeigen auch Vorgänge in Atomen und Molekülen manchmal chaotische Eigenschaften – und wenn ja, wie können wir solche Phänomene der Quantenwelt untersuchen? Als Antwort schrumpfen wir mit Hilfe mathematischer Simulationen das Konzept des makroskopischen Chaos, bis es in die Quantenbezirke von Atomen und Elektronen passt. Wie sich zeigt, taucht dort manchmal gar kein Chaos auf, doch in anderen Fällen wimmelt es nur so davon; und gelegentlich herrscht unter bestimmten Bedingungen größeres Chaos als unter anderen. Aus diesen Arbeiten gehen neue mathematisch-physikalische Theorien hervor, die auf zahlreiche exotische Apparate angewandt werden können – auf Quantenpunkte, Nanoröhrchen und supraleitende Quanteninterferenz-Detektoren.

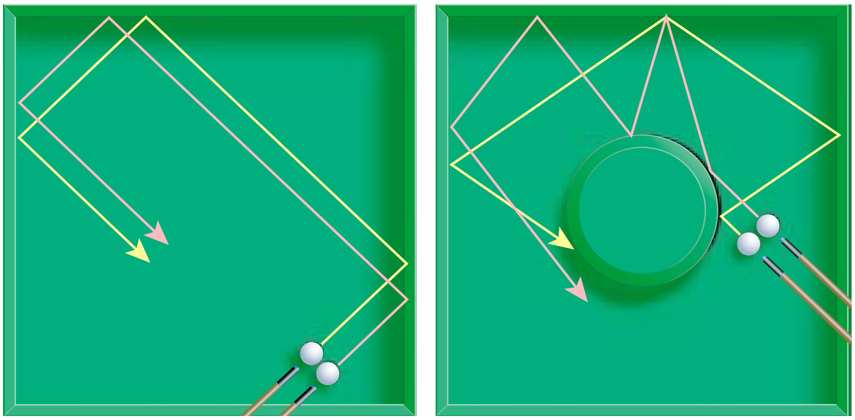
Das Verhalten chaotischer Systeme ist oft nur schwer zu durchschauen. Darum beginnen wir mit einem sehr einfachen Beispiel, einem Teilchen in einer Schachtel. Eine zweidimensionale Version dieses Systems entspricht einer Kugel auf einem Billardtisch, wobei der Einfachheit halber die Reibung vernachlässigt wird. Schon dieses simple Modell wird uns einen Weg in die Welt des Quantenchaos weisen.

Billard mit Kreisbande

Auf dem idealen rechteckigen Billardtisch stoßen wir eine Kugel gegen die nächstliegende Bande. Die Kugel trifft die Bande, prallt unter einem Reflexionswinkel ab, der gleich dem Einfallswinkel ist, rollt über den Tisch, bis sie eine andere Bande trifft, und prallt dort wiederum gemäß dem Reflexionsgesetz ab. Wenn weder Reibung noch andere Kräfte die Kugel bremsen, rollt sie für immer auf dem Tisch umher.

Um die Kugelbahn unter geringfügig veränderten Anfangsbedingungen zu beobachten, unterbricht der Experimentator den simulierten Stoß und legt die Kugel fast – aber nicht ganz – exakt auf den Ausgangspunkt zurück. Wird sie genau wie vorher angestoßen – unter demselben Winkel und mit derselben Kraft –, so folgt sie zunächst fast derselben Trajektorie wie zuvor. Doch allmählich unterscheiden sich die Bahnen mehr und mehr. Bei dieser so genannten linearen Divergenz nimmt der Abstand der Bahnen proportional zur verstrichenen Zeit zu. Auf diesem Tisch verhält sich kein Billardstoß chaotisch.

Nun kleben wir zusätzlich in die Mitte des Tisches eine dicke Kreisscheibe, legen die Kugel in deren Nähe und stoßen zu. Die Kugel prallt von der kreisförmigen Bande ab, trifft eine Außenbande, rollt zu einer anderen Außenbande, trifft wieder die Kreisbande und so weiter. Wie zuvor stoppen wir die Kugel, legen sie fast – aber nicht genau – auf ihren Ausgangspunkt zurück und versetzen ihr denselben Stoß. Diesmal wird die Kugel bald einer völlig anderen Bahn folgen als beim ersten Mal. Wir beobachten exponentielle Divergenz: Mit der Zeit wächst der Abstand der beiden Trajektorien ▷



ALLE GRAFIKEN: AMERICAN SCIENTIST

Eine einzelne Kugel auf einem rechteckigen Billardtisch zeigt kein chaotisches Verhalten: Leicht veränderte Startpositionen führen zu kaum veränderten Trajektorien (links). Doch schon ein kreisförmiges Hindernis in der Tischmitte sorgt für Chaos: Geringfügig verschobene Ausgangspositionen ergeben völlig unterschiedliche Bahnen (rechts).

exponentiell. Ein solches Billardspiel nannte der Mathematiker Yakov Sinai von der Princeton University chaotisch.

Der Tisch mit der kreisförmigen Bande in der Mitte illustriert eine grundlegende Eigenschaft des Chaos: die empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Selbst infinitesimal verschobene Startpunkte der Kugel ergeben völlig unterschiedliche Resultate. Dieses Phänomen entspricht dem, das Poincaré entdeckte, als er die Gleichungen für Planetenbewegungen analysierte. Auch bei anderen Billardtypen entsteht chaotisches Verhalten – zum Beispiel, wenn die Bande wie die Laufstrecke in einem Stadion geformt ist.

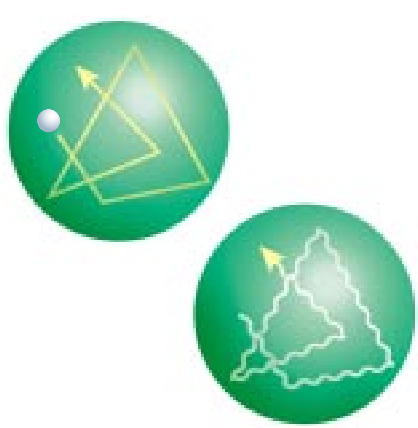
Newtons Pendel als Vorbild

Wenn die Kugel nur ein paar Mal von den Banden abprallt, vermag ein Beobachter ohne weiteres ihrer Bahn zu folgen. Um eine Trajektorie aufzuzeichnen, legt man einfach ein zweidimensionales Netz über den Billardtisch und trägt darauf in regelmäßigen Zeitintervallen die momentanen Orte als Punkte ein. Doch nach zahlreichen Bandenkollisionen wird die Kugel ihre frühere Bahn mehrfach kreuzen oder manchmal sogar zurücklaufen, und mit der Zeit ergeben die notierten Punkte ein unübersichtliches Durcheinander. Darum bevorzugen Mathematiker und Physiker eine andere Darstellung, die bis auf Isaac Newton zurückgeht.

Im 17. Jahrhundert wählten die Physiker oft ein Pendel, um die Naturkräfte zu studieren. Wie Newton herausfand, konnte er den Zustand eines Pendels mit zwei Variablen vollständig beschreiben: Ort und Impuls. Auch heute verwenden Mathematiker und Physiker diese Variablen zur Beschreibung subatomarer Teilchen. Der Zustand eines Teilchens lässt sich – genau wie ein Newton'sches Pendel – durch seinen Ort im Raum und seinen Impuls charakterisieren. Die Forscher tragen nun diese Variablen gegeneinander auf – etwa Impuls gegen Ort – und erzeugen auf diese Weise den so genannten Phasenraum.

Leider sind Phasenräume abstrakt und – außer für geübte Mathematiker – eher unanschaulich. Selbst wenn ein Forscher nur ein einziges Teilchen im realen dreidimensionalen Raum untersuchen will, hat der zugehörige Phasenraum schon sechs Dimensionen – je drei für Ort und Impuls. Jeder von uns kann ein Diagramm in zwei Dimensionen zeichnen, und sogar drei lassen sich recht einfach darstellen und verstehen; aber wie stellt man sich eine Kurve in vier oder mehr Dimensionen vor?

Da hilft auch Vereinfachung nicht viel. Zum Beispiel beschränkt sich das Billardbeispiel auf eine einzelne Kugel, die nur zweidimensionale Bewegungen ausführt. Das sorgt für einen Phasenraum von »nur« vier Dimensionen. Dennoch ist es nicht einfach, ein vierdimensionales Phänomen auf ein Blatt Papier zu zeichnen. Zum Glück vermag ein Computer ohne weiteres mit vier – oder noch viel mehr – Dimensionen umzugehen. Ein Forscher kann, um die Bewegung eines Systems aus mehreren Teilchen zu untersuchen, deren Anfangsdaten für Ort und Impuls eintippen; der Computer setzt nun diese Daten in Gleichungen ein, die den Mehrteilchenzustand als einen Punkt darstellen, der durch einen Raum mit zahlreichen Dimensionen wandert. Die Software kann dann »Schnitte« durch diese vieldimensionale Trajektorie im Phasenraum anfertigen. Solche Poincaré-Schnitte lassen sich ihrerseits auf eine zweidimensionale Fläche projizieren; so entsteht eine Punktmenge, die man auf einem Bildschirm oder als Papierausdruck betrachten kann. Das Punktmuster stellt eine Folge von Momentaufnahmen des untersuchten Systems dar; daraus kann der Forscher ein gewisses Verständnis für den Zusammenhang zwischen Bedingungen und Ergebnissen entwickeln – etwa indem er jedes Mal, wenn eine bestimmte Bedingung eintritt, gleichsam einen mathematischen Schnappschuss aufnimmt, um eine erwünschte Eigenschaft des Systems zu erforschen.



Ein in einer Hohlkugel gefangenes Teilchen dient als einfaches Modell zur Erforschung chaotischer Phänomene (oben). Um Quantenchaos zu simulieren, beschreibt man das Teilchen mit der quantenphysikalischen Schrödinger-Gleichung und verleiht ihm dadurch Welleneigenschaften (unten).

Sofern eine Poincaré-Abbildung aus einer kontinuierlichen Kurve besteht, wie verwickelt sie auch sein mag, ist das System nicht chaotisch. Erst wenn stattdessen eine zufällig verstreute Folge von Punkten entsteht, gibt sich das System als chaotisch zu erkennen. Wenn wir ein System – beispielsweise eines der oben beschriebenen Billardmodelle – mittels mathematischer Gleichungen beschreiben, Daten zu Ort und Impuls im Laufe der Zeit sammeln und daraus eine Poincaré-Abbildung erzeugen, können wir anhand der Resultate meist zuverlässig chaotisches von nichtchaotischem Verhalten unterscheiden.

Mit diesem Werkzeug wollen wir nun versuchen, zum Quantenchaos vorzudringen. Zunächst wenden wir uns einer etwas komplizierteren Version des Teilchens in einer Schachtel zu. Stellen wir uns einen dreidimensionalen »Billardtisch« in Form einer Hohlkugel vor und nehmen an, statt einer klassischen Billardkugel sei darin ein Elektron eingeschlossen. Dieses System ist ein Beispiel für Quantenbillard. Wir können es rechnerisch simulieren, um die Bewegung des Elektrons zu untersuchen, während es wiederholt gegen die Wand seines kugelförmigen Gefängnisses prallt.

Da es sich um ein Quantensystem handelt, beschreiben wir das Teilchen mit der so genannten Schrödinger-Gleichung, aus der die bizarren Eigenschaften der Quantenmechanik folgen – zum Beispiel das Heisenberg'sche Unbestimmtheitsprinzip. Es besagt, dass man nicht gleichzeitig Ort und Impuls eines Teilchens zu bestimmen vermag: Je genauer man den Ort eines Teilchens kennt, desto weniger genau kann man den Impuls messen.

Außerdem gilt der so genannte Welle-Teilchen-Dualismus: Quantenobjekte haben sowohl Wellen- als auch Teilcheneigenschaften. Darum heißt eine Lösung der Schrödinger-Gleichung Wellenfunktion, auch wenn sie ein Teilchen beschreibt. Somit können wir uns das innerhalb der Kugel umherschwirrende Teilchen als Welle vorstellen, die im kugelförmigen Hohlraum hin und her reflektiert wird. Wir brauchen keine zusätzliche Gleichung, um die Hohlkugel darzustellen, sondern definieren die Schrödinger-Gleichung so, dass die Welle dort, wo sie die Kugelfläche erreicht, verschwindet. Wir können also das gesamte System – Teilchen oder Welle in einer Hohlkugel – mit nur einer Schrödinger-Gleichung beschreiben.

Mit dem Wellenbild lassen sich die Vorgänge in dieser Kugel gut veranschaulichen. Viele gewöhnliche Wellen – Meereswellen oder Schwingungen einer Gitarrensaite – bestehen aus einer Überlagerung von Teilwellen unterschiedlicher Frequenz. Eine Welle kann auch aus nur einer einzigen Frequenz bestehen; eine solche einfache Welle nennen wir eine Normalmode. Wir können eine Einzelwelle passender Frequenz auswählen und in die Schrödinger-Gleichung einsetzen; die Resultate zeigen, wie diese Welle innerhalb der Kugel hin und her reflektiert wird. Dann können wir untersuchen, was bei Anwesenheit mehrerer Normalmoden geschieht.

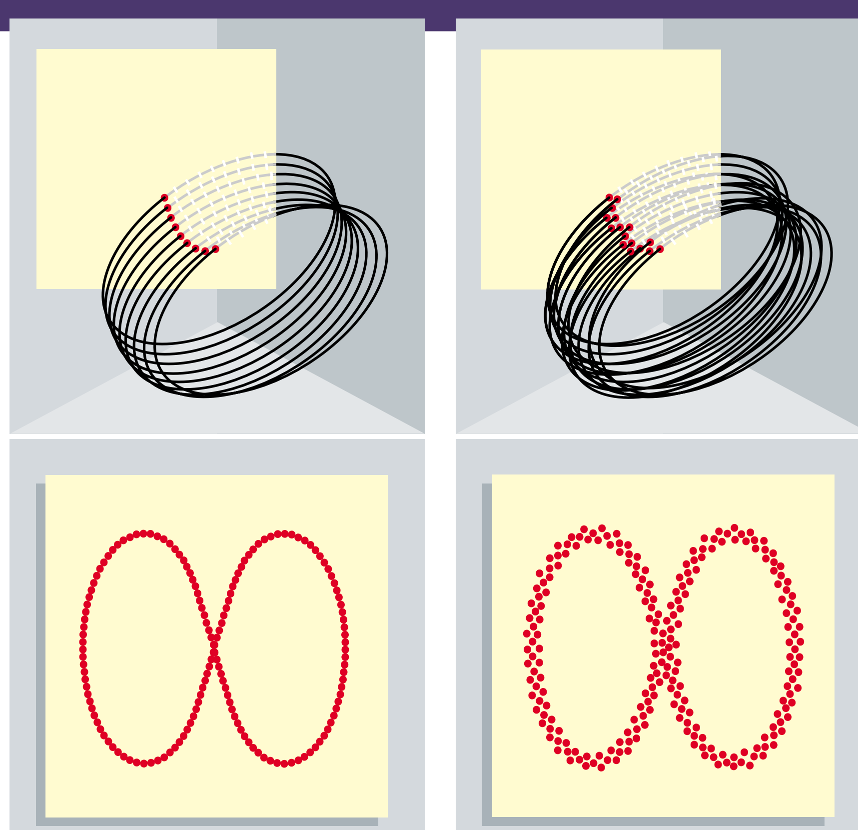
In den obigen Beispielen suchten wir nach Chaos, indem wir die Ausgangsposition einer Billardkugel leicht variierten und dann ihre Bahn verfolgten. Jetzt verändern wir nicht die Startposition, sondern fügen eine zweite Normalmode hinzu, deren Frequenz sich von der ersten unterscheidet. Um die komplette Lösung der Schrödinger-Gleichung zu erhalten, müssten wir eine unendliche Folge von Normalmoden ansetzen, jede mit eigener Energie und geometrischer Form. Damit die Simulation möglichst einfach bleibt, benutzen wir aber in unserer Wellenfunktion nur zwei Moden.

Quantenbillard in der Hohlkugel

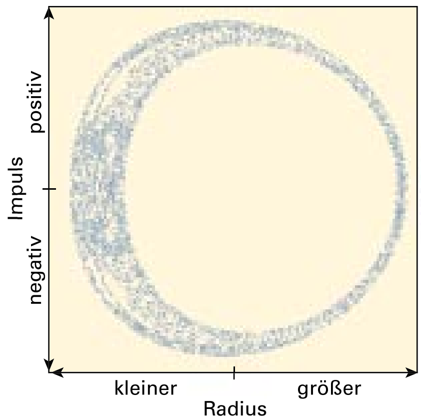
Daraus ergibt sich allerdings eine Gleichung, bei der niemals Chaos entstehen kann. Das heißt, ein Teilchen, das sich innerhalb einer stationären Kugel bewegt, entwickelt niemals chaotisches Verhalten. Wenn wir dieses System mit den oben erwähnten Billardtischen vergleichen, so entspricht das regelmäßige Verhalten der Wellenfunktionen einer linearen Divergenz, wie sie bei einem klassischen Billard zwischen eng benachbarten Trajektorien zu beobachten ist. Wir haben also auf diese Weise noch kein quantenchaotisches System modelliert.

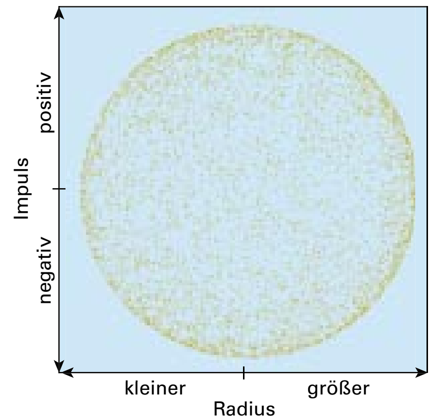
Darum erweitern wir das bisherige Quantenbillard ein wenig: Die Grenze der Hohlkugel soll radial nach innen und außen vibrieren. Wenn nun ein Teilchen die pulsierende Kugelwand trifft, hängt sein ▷

Wie sich Chaos verrät



Im mehrdimensionalen Phasenraum, der durch die Orts- und Impulskoordinaten des betrachteten Systems aufgespannt wird, durchläuft der Systemzustand im Laufe der Zeit eine komplizierte Kurve (oben in drei Dimensionen veranschaulicht). Um diese Kurve zu analysieren, reduziert man die Dimensionen durch einen so genannten Poincaré-Schnitt (das gelbe Quadrat) und erhält ein anschauliches zweidimensionales Bild der Zustandsentwicklung (unten). Falls die Punkte der Poincaré-Abbildung eine kontinuierliche Kurve ergeben, verhält sich das System nicht chaotisch (links oben und unten). Eine verschmierte Punktmenge zeigt hingegen Chaos an (rechts).





Wird ein Quantenteilchen in eine Hohlkugel gesperrt, die nach den Regeln der klassischen Mechanik vibriert, entsteht so genanntes Semi-Quantenchaos. Der linke Poincaré-Schnitt zeigt, dass Radius und Impuls der vibrierenden Kugel keiner kontinuierlichen Kurve folgen, sondern einen verschmierten Ring bilden: Die Hohlkugel verhält sich chaotisch. Das gilt erst recht für das eingesperrte Quantenteilchen, wie ein entsprechender Poincaré-Schnitt zeigt (rechts).

Schicksal nicht nur vom eigenen Zustand, sondern auch von dem der Wand ab. Dieses Modell ist etwas umständlicher, aber die Komplikation ist nötig, damit Quantenchaos simuliert werden kann.

Die Simulation beginnt – genau wie bei dem Teilchen in einer ruhenden Hohlkugel – mit der Schrödinger-Gleichung für das Teilchen. Doch jetzt brauchen wir auch eine Gleichung für die vibrierende Grenze. Die Wand führt eine klassisch-mechanische Bewegung aus, und dies wird durch eine nicht-quantenmechanische Gleichung dargestellt. Somit geraten wir durch das Beispiel des Teilchens in einer vibrierenden Kugel in den Grenzbereich zwischen Quantenwelt und klassischer Mechanik. Zum Glück lässt sich das dynamische Verhalten des Systems durch die so genannte Hamilton-Funktion formulieren; sie kombiniert die Schrödinger-Gleichung für das Teilchen mit der mechanischen Gleichung für die Wand. Die Hamilton-Funktion drückt die Erhaltung der Gesamtenergie des Systems aus und liefert die gewöhnlichen Differenzialgleichungen, die für die Simulation nötig sind.

Wie zuvor überprüften wir dieses Modell, indem wir zwei Normalmoden einsetzten. Dann führten wir Computersimulationen der von der Hamilton-Funktion abgeleiteten Differenzialgleichungen durch, um das Verhalten des Billard-Systems zu untersuchen. Nach jedem Durchlauf veränderten wir die Startbedingungen ein wenig; zum Beispiel verwendeten wir einen anderen Anfangswert für den zeitlich veränderlichen Kugelradius. Aus solchen Modellrechnungen, die das Verhalten sowohl der Kugelwand als auch des eingeschlossenen Teilchens beschreiben, gewannen wir Poincaré-Abbildungen für jede dieser beiden Komponenten des Systems.

Die mathematischen Simulationen enthüllten Chaos unterschiedlicher Form. Beispielsweise bestanden manche Poincaré-Abbildungen der klassischen Variablen – Radius und Impuls der Wand – aus einem verschmierten Ring von Punkten; das Fehlen einer kontinuierlichen Kurve zeigte somit chaotische Phänomene an. Andere Poincaré-Abbildungen ließen eine geordnetere Form von Chaos in den klassischen Variablen erkennen. Das heißt, manche Abbildungen enthielten besser strukturierte Gebiete – Kurven, die zwar nicht ganz kontinuierlich waren, aber weniger verschmiert aussahen als andere. Auch die Quantenvariablen, die das Teilchen beschreiben, erzeugten in den Poincaré-Abbildungen chaotische Spuren.

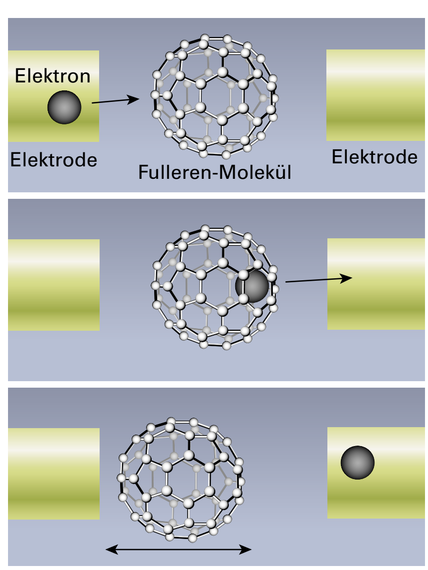
Dieses System zeigt somit ein Verhalten, das man Semi-Quantenchaos nennen könnte: Sowohl die klassischen als auch die quantenmechanischen Komponenten haben chaotische Eigenschaften. Die klassisch-chaotische Bewegung des Kugelrandes erzeugt bei den Normalmoden in der radial vibrierenden Hohlkugel so genanntes Wellenchaos. Es entsteht, weil die Form der Wellen vom Kugelradius abhängt. Schwingt der Radius chaotisch, werden auch die zugehörigen Wellen chaotisch.

Im Prinzip lässt sich das vibrierende Billardmodell in ein rein quantenmechanisches System umwandeln. Dafür muss die Billardgrenze quantenmechanisch statt klassisch formuliert werden. Auf diese Weise entsteht zwar ein vollständig quantisiertes System, aber bislang weiß niemand, ob es in der Natur ein reines Quantensystem gibt, das empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängt. Die meisten Wissenschaftler finden die wenigen Beispiele für echtes Quantenchaos, die bisher vorgeschlagen wurden, nicht überzeugend.

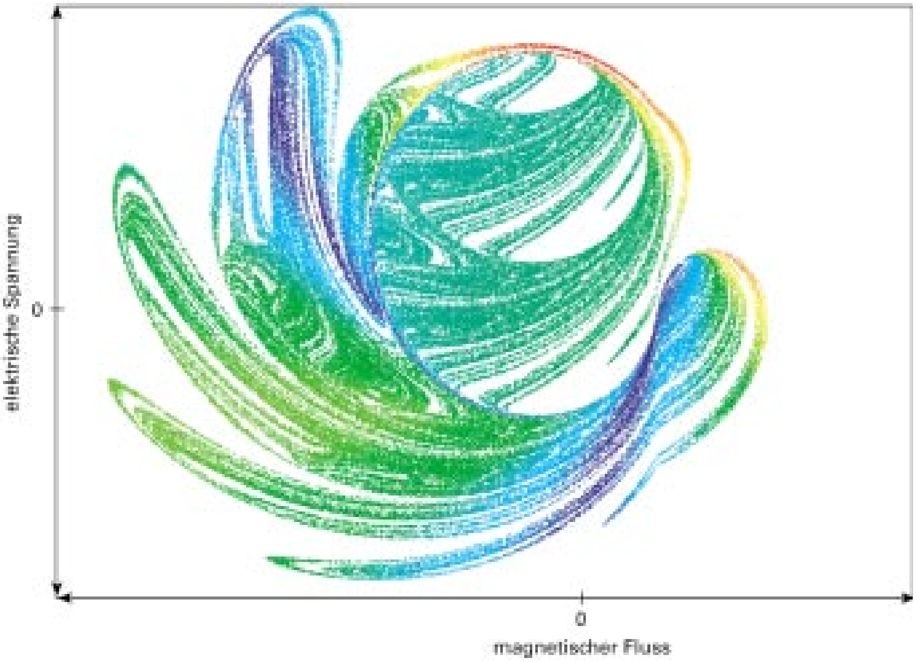
Unsere Simulationen liefern nicht nur Mathematikern und theoretischen Physikern interessante Modelle für komplexe Vorgänge in atomaren Größenordnungen. Sie helfen auch zu verstehen, wie nanotechnische Systeme funktionieren und wie wir sie besser kontrollieren können.

Auf der Suche nach mikroskopischem Chaos

Das gilt insbesondere für so genannte Quantenpunkte. Diese nanometergroßen Gebilde bestehen aus einem Halbleiter – Indiumarsenid, Galliumarsenid oder Silizium – oder einem Metall. Ein Quantenpunkt muss so klein sein, dass er nur ein paar Elektronen enthält. Darum entspricht er dem Modell mit einem oder wenigen Teilchen in einer Schachtel. Zwar ist ein vibrierendes Billard vielleicht ein nützliches



Transistoren aus einem einzigen Fulleren-Molekül zwischen zwei Goldelektroden zeigen vermutlich Semi-Quantenchaos. Wenn ein einzelnes Elektron von der linken Elektrode zum Fulleren springt (oben) und danach weiter zur rechten Elektrode (Mitte), beginnt das Fulleren hin und her zu schwingen (unten). Dieses System verhält sich ähnlich wie eine vibrierende Kugel mit darin gefangenem Quantenteilchen.



Auch supraleitende Quanteninterferenzdetektoren (Squids) zeigen Semi-Quantenchaos. Indem Forscher an der Universität Sussex einen supraleitenden Ring mit einem Wechselstrom-Resonator koppelten, konnten sie chaotisches Verhalten erzeugen. Der Poincaré-Schnitt zeigt den chaotischen Zusammenhang zwischen der Spannung des klassischen Resonators und dem magnetischen Fluss durch den supraleitenden Ring.

Modell für Quantenpunkte, doch in der Regel werden Quantenbillards mit ruhenden Grenzen verwendet. Wenn deren Form unregelmäßig ist – wie beim klassischen stadionförmigen Billard oder bei Yakov Sinais rechteckigem Billard mit Kreisscheibe –, entsteht eine spezielle Form von Systemverhalten, die quantisiertes Chaos genannt wird. Es entspricht einem klassischen Chaos, das gewisse Quanteneigenschaften aufweist.

Außerdem können mittels Quantenchaos-Modellen extrem winzige, auf ungewöhnliche Weise hergestellte Transistoren optimiert werden. Zum Beispiel hat Hongkun Park mit seinem Team am Lawrence Livermore Laboratory kürzlich einen Transistor fabriziert, indem er ein einzelnes Fulleren-Molekül – ein nanometergroßes fußballförmiges Kügelchen aus 60 Kohlenstoffatomen – mit Goldelektroden verband.

Parks Team untersuchte die Vibrationen dieser Nanotransistoren, durch die immer nur ein einzelnes Elektron zu fließen vermag. Stellen wir uns zunächst ein Fulleren vor, das zwischen zwei Elektroden ruht. Wenn ein Elektron von links auf das Fulleren auf- und gleich wieder rechts abspringt, wackelt das Molekül hin und her. Der Einfachheit halber nehmen wir an, das Fulleren sei eine Kugel; dann ähnelt es dem System, das wir oben diskutiert haben. Allerdings wackelt die Kugel jetzt, statt wie früher zu pulsieren. Dieser Unterschied macht sich in einer veränderten Gestalt der Hamilton-Funktion bemerkbar, aber sie enthält wieder sowohl klassische als auch quantenmechanische Komponenten. Berücksichtigt man die tatsächliche Geometrie des Fullerens, wird das Modell komplizierter.

Quantenchaos-Modelle lassen sich auch auf Nanoröhrchen anwenden. Diese Gebilde sind wie Fullerene aus regelmäßig angeordneten Kohlenstoffatomen aufgebaut, die aber nun anstelle einer Kugel eine Röhre von rund einem Nanometer Durchmesser bilden. Solche Strukturen werden mehrere Mikrometer lang, manchmal sogar bis zu Millimetern. Nanoröhren können sowohl in der Länge als auch im Durchmesser vibrieren, ähnlich wie die pulsierende Kugel in unseren Simulationen. Außerdem können sie wie eine gezupfte Gitarrensaite schwingen: Die ganze Röhre oszilliert hin und her, ohne ihre lokale Form zu ändern.

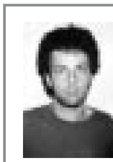
Unsere Art von Modellen erfasst zwar keineswegs alle Eigenschaften von Nanoröhren; aber immerhin wissen wir, dass ein Elektron, das in einer zylindrischen Röhre mit halbkugelförmig verschlossenen Enden gefangen ist, sich chaotisch verhält. Außerdem erwarten wir, dass Quantenbillard-Modelle auch mit Erfolg auf gekrümmte »Nanohörnchen« aus Kohlenstoff anwendbar sein werden.

Eine völlig andere Klasse von Quantensystemen, deren Verhalten durch Semi-Quantenchaos beschrieben werden kann, sind so genannte supraleitende Quanteninterferenzdetektoren, kurz Squids. Sie erlauben genaueste Messungen von Magnetfeldern. Solche Geräte brauchen wenig Platz, normalerweise nicht mehr als einen Millimeter, doch dieser Millimeter hat es in sich. Für einen Squid braucht man zunächst einen Supraleiter – ein Material, das bei genügend tiefer Temperatur keinen elektrischen Widerstand besitzt und darum Strom ohne Energieverlust transportiert.

Der Squid selbst besteht aus einem kreisförmigen oder quadratischen Supraleiter, den ein elektrischer Oszillator mit Energie versorgt. Der Oszillator erzeugt im Squid Strom und Spannung. Wird der Squid nun einem Magnetfeld ausgesetzt, so ändert sich die Spannung, und das Ausmaß der Spannungsänderung ist ein Maß für die magnetische Feldstärke. Als Joseph Diggins von der University of Sussex in Brighton (England) die quantenmechanische Bewegung der Elektronen im supraleitenden Ring simulierte, entdeckte er auch hier chaotische Phänomene.

Vermutlich werden die Forscher auf ihrer Suche in der Mikrowelt noch auf weitere Formen des Chaos stoßen. Das muss keineswegs immer störende Unordnung bedeuten, sondern kann oft ein besseres Verständnis der Vorgänge im Nanometerbereich ermöglichen – und somit auch bessere Geräte. Wie sich zeigt, können Theoretiker und Praktiker vom Chaos in der Quantenwelt eine ganze Menge lernen. ◁

AUTOREN UND LITERATURHINWEISE



Mason A. Porter (links) ist Doktorand am Center for Applied Mathematics der Cornell University in Ithaca (US-Bundesstaat New York). **Richard L. Liboff** ist dort seit mehr als dreißig Jahren Professor für Elektrotechnik, Angewandte Physik und Angewandte Mathematik.

Quantum Chaos for the Radially Vibrating Spherical Billiard. Von R. L. Liboff und M. A. Porter in: Chaos, Bd. 10, S. 366 (2000).

Quantenchaos. Von Martin C. Gutzwiller in: Spektrum der Wissenschaft 3/1992, S. 56.

Weblinks zu diesem Thema finden Sie bei www.spektrum.de unter »Inhaltsverzeichnis«.