Lecture lautmanienne de *La Clé des songes* d'A. Grothendieck

Damian RÖSSLER [*]

5 novembre 2022

Résumé

Le présent texte reproduit dans ses grandes lignes l'exposé éponyme prononcé pendant la conférence [3].

1 Prologue

Le but du présent exposé est de comparer les points de vue d'A. Lautman et A. Grothendieck sur la connaissance mathématique. Nous verrons que notre conclusion est qu'ils sont largement divergents. Il me semble cependant que l'analyse de cette divergence a la vertu de clarifier certaines conceptions de ces deux penseurs et de soulever des questions qui seraient peut-être restées informulées en dehors d'une confrontation de leurs points de vue.

Le plan de l'exposé est le suivant. Je commencerai par donner un aperçu de ce qui me semble constituer la philosophie des mathématiques de Lautman puis je ferai de même pour la philosophie des mathématiques de Grothendieck, en m'appuyant sur son texte *La Clé des songes* [1]. Je comparerai ensuite leurs thèses sur quelques exemples et je conclurai avec quelques réflexions sur les rapports que les deux philosophies entretiennent avec l'analyse et l'algèbre.

*Mathematical Institute, University of Oxford, Woodstock Road, Oxford OX2 6GG, United Kingdom

1. À la suite de Fernando Zalamea, d'autres aspects de l'œuvre de Grothendieck, notamment sur l'usage de la théorie des faisceaux en géométrie algébrique, ont été rapportés ces dernières années à la pensée de Lautman : [18], [19], [20], [21], [22], [23].

C'est un exposé de Laurent Lafforgue sur *La Clé des songes* dans le séminaire *Lectures grothendieckiennes* (voir [8, La notion de vérité chez Grothendieck, 47–68]) qui m'a donné l'idée d'essayer de comprendre la différence entre les points de vue de Lautman et Grothendieck sur les mathématiques. Je lui suis reconnaissant pour son travail de défrichage (et de déchiffrage !), qui m'a beaucoup éclairé pendant la préparation de mon intervention.

2 La connaissance mathématique selon Lautman. Quelques éléments.

La philosophie de Lautman consiste en une nouvelle réflexion sur le platonisme, dans laquelle les mathématiques forment un moyen terme entre les idées et le monde physique. Si l'on conçoit le platonisme naïf comme une théorie de la connaissance où le sujet connaissant remonte de la réalité physique vers des idées qu'il y entrevoit, le platonisme lautmanien admet bien l'existence des idées, mais il stipule que la connaissance passe d'abord par un stade où la réalité physique donne naissance, dans le sujet connaissant, à une sorte de forme — ceci un peu à la façon dont, chez Aristote, l'intellect agent met en acte dans l'âme la forme d'une substance (cf. *De Anima*) ; les idées se manifestent ensuite en venant s'incarner dans cette forme et c'est cette forme porteuse d'idées qui constitue l'authentique savoir mathématique.

Exemple (dû à moi). Le calcul infinitésimal est une tentative de formalisation de la notion de longueur et d'aire et dans un premier mouvement cognitif on est mené à la formulation d'un ensemble de règles et d'axiomes permettant de définir ces notions (ceci est « la forme »). Cet ensemble de règles ne constitue cependant pas toute notre connaissance mathématique de la longueur et de l'aire. En effet, le calcul infinitésimal porte en lui une certaine idée de l'espace et de la géométrie, qui est très importante, car c'est à cause d'elle que l'on s'intéressera à certains énoncés mathématiques plutôt qu'à d'autres. Pour que les règles du calcul infinitésimal prennent tout leur sens, il faut les associer à cette idée de l'espace, qui reste pourtant informulée, pour qu'elles constituent un véritable savoir mathématique.

Lautman dit aussi que les idées sont animées, lorsqu'elles s'incarnent dans la forme qui naît de la connaissance, d'un mouvement dialectique. Ce mouvement dialectique traverse toute l'activité cognitive du sujet et est responsable, en pratique, du questionnement qui mènera d'un théorème vers un autre dans la recherche mathématique. Dans la plupart des exemples de Lautman ce questionnement prend sa source dans une dualité, i.e. dans la tension toujours irrésolue entre les deux membres d'un couple de notions complémentaires.

Un exemple fondamental d'une dualité lautmanienne est le couple intrinsèque/extrinsèque. Lautman mentionne aussi les dualités local/global, continu/discontinu, fini/infini (voir [10, *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques*, 1re partie, Les schémas de structure]). On peut historiquement voir la tension entre l'intrinsèque et l'extrinsèque à l'œuvre dans le développement des résultats mathématiques suivants (encore une fois, l'exemple vient de moi).

Une première tentative de formalisation des notions de courbe et de surface lisse donne lieu à la définition d'une sous-variété différentiable de $\mathbf{R}^n$. Ensuite, le souci de savoir si cette notion est intrinsèque ou extrinsèque (i.e. de savoir si elle est indépendante ou dépendante de l'espace $\mathbf{R}^n$ ambiant) mène à la définition d'une variété différentiable abstraite (pour la définition d'une variété différentiable abstraite, voir p. ex. [1]). Une fois cette notion en main, on peut ensuite poser la question, purement mathématique mais motivée par la dualité entre l'intrinsèque et l'extrinsèque, de savoir quelle est la dimension minimale de l'espace $\mathbf{R}^n$ dans lequel on peut plonger une variété différentiable abstraite. Le théorème de H. Whitney (voir [16]) répond à cette question. On peut encore affiner la question et demander quelle est la dimension minimale de l'espace $\mathbf{R}^n$ dans lequel on peut immerger une variété différentiable abstraite tout en préservant les distances (i.e. dans la situation où la variété différentiable est munie d'une « métrique riemannienne »). Le théorème (très difficile) de J. Nash (voir [11]) répond à cette dernière question.

On voit dans le dernier exemple que le mouvement dialectique des idées est à l'origine de questions mathématiques concrètes et nouvelles. Les idées qui sont en œuvre derrière ces questions ne sont en revanche pas visibles dans les mathématiques elles-mêmes. Le monde idéal est ainsi transcendant par rapport aux mathématiques, tout comme les mathématiques sont transcendantes par rapport à la réalité. La connaissance mathématique ne peut en revanche exister qu'en conjonction avec une idéalité incarnée en elle, qui est ainsi « immanente » au contenu mathématique. En ce sens, l'idéalité immanente se comporte dans l'épistémologie de Lautman un peu comme le temps et l'espace dans la *Critique de la raison pure*, qui sont un cadre *a priori* dans lequel a lieu toute connaissance. Il est intéressant que chez Lautman comme chez Kant, ce soit la présence de ce cadre qui donne vie aux mathématiques — chez Lautman en leur donnant leur dimension dialectique et chez Kant en leur donnant la possibilité d'être synthétiques, i.e. non tautologiques. On voit ainsi que l'épistémologie de Lautman s'inspire à la fois d'Aristote, de Platon et de Kant.

Je cite Lautman :

> C'est en ce sens que la réalité intrinsèque des mathématiques nous a paru résider dans leur participation aux Idées de cette Dialectique qui les domine. Nous n'entendons pas par idées des modèles dont les êtres mathématiques ne seraient que des copies, mais au véritable sens platonicien du terme, des schémas de structure selon lesquels s'organisent les théories effectives. (tiré de [10, *Nouvelles recherches sur la structure dialectique des mathématiques*, 1re partie, pp. 37-38])

et aussi

> En tant que problèmes posés, relatifs aux liaisons que sont susceptibles de soutenir entre elles certaines notions dialectiques, les Idées de cette Dialectique sont certainement transcendantes (au sens habituel) par rapport aux mathématiques. Par contre, comme tout effort pour apporter une réponse au problème de ces liaisons est, par la nature même des choses, constitution de théories mathématiques effectives, il est justifié d'interpréter la structure d'ensemble de ces théories en termes d'immanence pour le schéma logique de la solution cherchée. (tiré de [10, *Nouvelles recherches sur la structure dialectique des mathématiques*, I. La genèse de l'existant à partir de l'idée, p. 244], cité dans [13])

Caveat. Lautman est assez évasif en ce qui concerne les fondements de son épistémologie. En particulier, il ne parle jamais explicitement de la première étape de la connaissance — celle que j'appelle la constitution de la forme. Dans ses écrits, il ne s'intéresse vraiment qu'à l'interaction du monde idéal avec les théories mathématiques. Cependant, il me semble que la description que j'en ai donnée fait justice à son point de vue.

3 La connaissance (mathématique) dans *La Clé des songes* d'A. Grothendieck.

Dans *La Clé des songes* [5], Grothendieck propose une conception bien différente de la connaissance en général, et de la connaissance mathématique en particulier. *La Clé des songes* est un texte touffu, qui fait des références à des courants de pensée très divers, p. ex. au bouddhisme, à Lao-Tseu, à C. G. Jung et au Nouveau Testament. Par ailleurs, il utilise souvent des termes venant de la psychologie freudienne (p. ex. « la psyché », « l'inconscient », « l'instinct »). Malgré l'éclectisme de ses sources, il propose une vision très originale de la connaissance, qui ne me semble pas avoir d'ancêtre évident dans l'histoire des idées. Pour établir la filiation des idées philosophiques de *La Clé des songes*, il faudrait cependant procéder à des recherches philologiques et historiques plus poussées que celles que j'ai pu faire.

Selon Grothendieck, la connaissance consiste essentiellement en un effort pour retrouver un état originel, « enfantin », dans lequel la vérité est immédiatement visible et ne requiert plus de justification. Dans *La Clé des songes*, cette vérité première et évidente est amenée par les rêves, auxquels on doit porter la plus grande attention. Les rêves sont tous porteurs d'un message, qui est évident mais reste caché si on ne les approche pas avec l'humilité requise. Les rêves eux-mêmes viennent d'une entité supérieure, que Grothendieck appelle Dieu dans le chapitre 2 du texte, et constituent ainsi une révélation et non un processus cognitif du rêveur. Même si les rêves considérés par Grothendieck sont les rêves ordinaires, il transpose souvent ses considérations sur les rêves à la connaissance en général, qui est conçue comme un « rêve éveillé » à l'issue duquel on se trouve « en état de vérité ». Selon Grothendieck, la connaissance ne consiste ainsi pas en la formation d'une certaine objectivité où le sujet et l'objet se rencontrent, mais plutôt en une sorte de transfiguration du sujet au bout de laquelle le problème de l'objectivité ne se pose plus car le sujet se trouve alors dans un contact immédiat avec la réalité et il accède ainsi à une évidence première. Cette transfiguration ne devrait pas être nécessaire, mais le sujet doit travailler pour qu'elle ait lieu, car il a perdu l'accès immédiat à cette évidence première comme à la suite d'un péché originel qui aurait obscurci sa vision. Pour que la transfiguration, et ainsi la connaissance, puisse avoir lieu, il faut sans aucune réserve « ajouter foi » au rêve. Le sujet « a faim » de l'évidence que lui propose le rêve et c'est dans le dénuement de cette faim qu'il trouve « instinctivement » la foi.

Je cite un passage de *La Clé des songes* :

> Ainsi l'acte de connaissance complet, incluant l'acte de foi, apparaît comme un acte commun auquel participent, indissolublement, deux partenaires : l'initiative revient à Dieu (pour lui donner cette fois le nom qui lui revient), et l'âme y fait figure d'interlocuteur de Dieu, tour à tour recevant le don de sa Parole, et se donnant par l'acte de foi. Tel, du moins, m'apparaît l'acte de connaissance qui a lieu au niveau qui m'intéresse ici, celui de la réalité spirituelle (...). C'était le cas, notamment, en cette première fois où j'ai sondé un rêve. Au niveau conscient tout au moins (et comme je le soulignais hier), ce qui donnait le ton alors et dominait « la main haute », c'étaient les résistances

au changement, alias « le petit diable », se présentant sous les apparences les plus convaincantes de la « voix de la raison » ! Pourtant, l'acte de foi avait eu lieu bel et bien et ladite foi, bien accrochée dans l'Inconscient (et sans se soucier, certes, de se nommer au grand jour...), tenait bon tout en se faisant humble et quasiment soumise : juste encore cinq petites minutes, pour terminer... Et elle n'a pas lâché, jusqu'à ce que le pêne enfin se désenclenche et que la porte verrouillée soit soudain grande ouverte.

et

> Mais c'est sur le travail pour entrer dans un rêve messager que je m'apprêtais à dire quelques mots. Tu t'étonneras peut-être qu'il soit encore question de « travail ». N'avais-je pas prétendu que ce qui distingue justement le rêve messager des autres, c'est que son sens est « évident », exprimé à notre intention avec une clarté fulgurante ? ! Et tel est bien le cas en effet. Mais cette « évidence » n'apparaît qu'une fois arrivé au terme du travail. C'est même ce sentiment d'évidence, que ce sur quoi tu viens soudain de déboucher, c'est ce que tu aurais dû voir dès le début comme la chose évidente — c'est ce sentiment-là qui est un des signes (sinon le premier, ni celui qui touche le plus) que « ça y est », que tu as touché au fond du rêve... L'apparition soudaine d'un tel sentiment n'est d'ailleurs pas chose spéciale à la compréhension du grand rêve. Celui-ci représente simplement un des cas où elle est la plus flagrante. Je crois même qu'elle est plus ou moins commune à tout travail de découverte, aux moments où celui-ci soudain débouche sur une compréhension nouvelle, grande ou petite. J'en ai fait l'expérience encore et encore tout au cours de ma vie de mathématicien. Et ce sont les choses les plus cruciales, les plus fondamentales, au moment où elles sont enfin saisies, qui sont celles aussi qui frappent le plus par leur caractère d'évidence ; celles dont on se dit après-coup qu'elles « crevaient les yeux » — au point qu'on se trouve stupéfait que soi-même ni personne n'y ait songé avant et depuis longtemps.

Tout ceci fera peut-être penser aux exercices de méditation des mystiques de la fin du moyen-âge (voir p. ex. *La Montée du Carmel* de saint Jean de la Croix ou *Le Château intérieur* de sainte Thérèse d'Avila), mais ce que propose Grothendieck me semble différer d'un exercice de méditation chrétien dans la mesure où pour lui, il ne s'agit pas de trouver Dieu mais bien la réalité elle-même — même s'il voit Dieu comme un guide. On ne retrouve pas chez lui le problème de la relation entre Dieu et le monde créé. Peut-être que ce sont les néo-platonistes renaissants (par ex. Marsile Ficin ou Nicolas de Cuse) qui sont les plus proches de sa pensée. En effet, ces derniers essaient de repousser l'être du monde créé entièrement sur Dieu et de priver ainsi la création de toute autonomie ontologique (voir à ce sujet l'ouvrage d'A. Koyré [9]). Dans leur théologie, la connaissance ne peut ainsi être que totale et divine, et elle ne souffre pas d'étapes intermédiaires. Ceci est en accord avec la vision de Grothendieck, où la connaissance ne consiste qu'en la révélation d'une évidence définitive. Il serait intéressant d'approfondir cette analogie (si vraiment il y en a une).

4 Un premier exemple. La théorie de Galois.

Je cite tout de suite Lautman. L'extrait suivant décrit un processus cognitif qu'il appelle « la montée vers l'absolu » :

> La distance qui sépare la perfection de l'imperfection est donc inscrite dans la nature même de l'être imparfait ; l'esprit s'élève à l'absolu en un mouvement dont les démarches sont commandées par le but que l'on aperçoit dès le point de départ. La structure de l'être imparfait prend alors son véritable sens : sa complication ou son obscurité ne sont que des écarts par rapport à la simplicité transparente de la vision finale ; la montée vers la perfection semble parcourir en sens inverse les étapes d'une dégradation antérieure. (tiré de [10, *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques*, chap. III, p. 166])

Lautman argumente ensuite que la théorie de Galois donne un exemple de ce processus cognitif :

> (...) Ces définitions vont nous permettre de comprendre ce que l'on pourrait appeler « l'imperfection » du corps de base par rapport à un polynôme donné. Cette imperfection réside en ce qu'il est besoin d'une extension de degré n pour passer du corps k au corps K qui contient les racines du polynômes en question et elle est mesurée par l'ordre du groupe de Galois attaché à l'équation. Nous allons voir comment en « montant » de k à K, on peut considérer des corps intermédiaires k' tels que $k \subseteq k' \subseteq K$ et dont l'imperfection diminue à mesure que l'on s'approche de K. (Tiré de [10, *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques*, chap. III, p. 167])

« L'absolu » (décrit plus tard dans ibid.) sera dans le cas de la théorie de Galois la clôture séparable du corps k, qui contient toutes les racines de tous les polynômes séparables à coefficients dans k et vers la définition duquel on se trouve entraîné par la nécessité de construire des extensions K de ce corps qui rendent compte du fait que les polynômes séparables à coefficients dans k n'y ont en général pas de solutions. C'est un exemple de « mouvement dialectique », où une nouvelle notion — la clôture séparable — naît d'une situation mathématique donnée sous l'impulsion d'une certaine idée, qui est ici celle de l'imperfection que l'on voit dans les polynômes sans racines dans k.

La clôture séparable est par ailleurs munie d'un groupe d'automorphismes, le groupe de Galois absolu, qui amalgame les groupes de Galois de tous les polynômes séparables à coefficients dans k. Ce groupe a la propriété que ses sous-groupes ouverts (pour une certaine topologie) correspondent, en prenant les invariants, aux extensions K. On peut ainsi redescendre de la clôture séparable de k aux extensions K au moyen de ce groupe.

Il est intéressant que dans l'analyse de Grothendieck, la théorie de Galois prend une tout autre forme. Dans le premier tome du séminaire de géométrie algébrique du bois Marie [4], il voit la théorie de Galois comme un cas particulier de ce qu'il appelle la « descente fidèlement plate », qui s'applique à une situation beaucoup plus générale, où le corps k est remplacé par n'importe quel anneau commutatif et l'extension de corps de k à K devient une extension fidèlement plate au sens de l'algèbre commutative. La possibilité de prendre des invariants sous un sous-groupe du groupe de Galois absolu correspond alors à certaines conditions de cocycles semblables à celles que l'on trouve dans la théorie de la cohomologie de Čech.

La réaction de Grothendieck devant la théorie de Galois n'est donc pas de former un nouvel objet qui est forcé par certaines « imperfections » mais de montrer qu'il existe une théorie plus vaste, où les polynômes sont des acteurs et où le fait qu'ils peuvent ne pas avoir de racines témoigne bien au contraire de la richesse de la théorie. Ce faisant, il essaie, me semble-t-il, de voir les polynômes pour « ce qu'ils sont » plutôt que de les voir comme un tremplin pour modifier le contexte où ils sont apparus initialement. Ceci me semble tout à fait dans la ligne de la conception de la connaissance de Grothendieck, où on essaie de retrouver une évidence première — ici le fait que les polynômes ne sont « que » des cas particuliers d'extensions d'anneaux fidèlement plates. Pour lui, la particularité du corps k obscurcit la vraie nature de l'objet que l'on considère et il faut surmonter cette particularité pour parvenir à la généralité naturelle de la théorie de Galois.

5 La démonstration en mathématiques selon Lautman et Grothendieck

Lorsqu'on compare les descriptions de la connaissance que donnent Lautman et Grothendieck, on est tout d'abord frappé par le fait que là où Lautman voit un processus dynamique, Grothendieck voit une sorte de retraite vers un état immobile. Dans la vision de Lautman, les idées nous emportent dans un flux alors que pour Grothendieck, on travaille à trouver une évidence simple et définitive. Ces deux visions se traduisent par une approche différente de la démonstration mathématique.

La conception de Lautman épouse bien l'approche la plus courante de la démonstration. Dans cette approche, pour démontrer un résultat, on cherche à comprendre le « sens » (peut-être faudrait-il dire le « sens dialectique ») de l'énoncé que l'on cherche à démontrer puis on laisse les résultats historiquement déjà connus s'organiser en un « flux dialectique » que ce sens oriente, et enfin on se laisse entraîner par ce flux pour remonter vers la preuve du résultat ou de son contraire. Ce mouvement dépend donc d'un historique de résultats et il peut ainsi mener à plusieurs preuves différentes. Par ailleurs, le résultat à démontrer pointera lui-même vers les méthodes que l'on essaiera d'utiliser pour le démontrer.

Par contraste, dans la conception de Grothendieck, pour démontrer un résultat, il faut trouver un moyen de se mettre dans un état mental dans lequel la preuve devient complètement naturelle et le résultat évident. Il faudra beaucoup travailler pour se mettre dans cet état mais ce travail consistera en une accumulation de simples évidences et ne tolérera pas de démonstrations astucieuses et inattendues — celles qui seraient le résultat, chez Lautman, d'un mouvement dialectique dans lequel on se trouve entraîné un peu par force. Cette accumulation d'évidences ne sera que très indirectement orientée par le résultat à démontrer. C'est la description que D. Ruelle donne de l'approche grothendieckienne des mathématiques : « Pour résoudre des problèmes, il faut les laisser se dissoudre dans une marée montante de théories générales. » (voir [14])

Un exemple célèbre de ce dernier type de preuve est la démonstration par Grothendieck et son école de la rationalité des fonctions zêta de Hasse-Weil. On commence par introduire la topologie étale, puis le formalisme général des théories cohomologiques, et enfin la cohomologie ℓ-adique — qui naît de la topologie étale — dont on démontre un ensemble de propriétés générales. Ensuite, on en déduit de manière formelle une formule du point fixe, qui implique immédiatement la rationalité de la fonction zêta lorsqu'on l'applique à l'endomorphisme de Frobenius. Dans cette approche du problème, la démonstration du résultat recherché est sans surprise une fois établie une certaine infrastructure théorique.

La démonstration un peu antérieure du même résultat par B. Dwork (voir [2]) est en revanche pleine de surprises et s'appuie en particulier sur des techniques fines d'analyse p-adique que rien n'aurait permis de soupçonner d'emblée. C'est une preuve traditionnelle, dans la ligne lautmanienne. En particulier, la portée de la preuve de Dwork n'a été comprise qu'ultérieurement alors que la preuve de Grothendieck explicite d'une certaine façon sa propre portée *ab initio*.

Ce dernier point me semble très important. Les preuves de Grothendieck donnent cette impression, qui est difficile à décrire précisément, qu'elles sont d'une certaine manière équipollentes aux résultats démontrés, qu'elles sont « naturelles », « dans le même bain » que ces résultats. Elles ont ainsi quelque chose de définitif alors qu'historiquement les démonstrations de beaucoup de théorèmes fondamentaux sont inattendues et pleines d'astuces, et sont par la suite souvent révisées et techniquement améliorées, sans que pour autant on n'obtienne jamais une preuve qui donne l'impression d'être complètement naturelle.

Un exemple de ce type de développement historique est, selon moi, la démonstration du théorème des nombres premiers. Ce théorème affirme que le nombre de nombres premiers inférieurs à un nombre entier positif N est asymptotiquement égal à $N/\log(N)$. Les mathématiciens J. Hadamard et C. J. de la Vallée-Poussin ont donné une première démonstration de ce théorème en 1896, qui était longue et technique. Leur preuve a par la suite été simplifiée en plusieurs étapes, la dernière simplification étant due à D. Newman (voir [12]). Dans son article [17], D. Zagier reprend l'argument de Newman en y incorporant quelques simplifications techniques supplémentaires. La preuve qui en résulte est une suite d'astuces et elle est certainement remarquable de concision. Cependant, elle n'est certainement pas « naturelle » par rapport à l'énoncé (mais peut-être qu'un spécialiste de théorie analytique des nombres aurait ici un point de vue différent — je ne suis pas un spécialiste de ce domaine). Elle est bien animée par une idée (à savoir de faire usage de ce qu'on appelle un théorème taubérien, qui est le théorème V dans [17]), cette idée apparaissant aussi dans les preuves antérieures, mais elle n'est pas entièrement transparente.

6 L'opposition entre l'analyse et l'algèbre. Quelques remarques en guise de conclusion.

Il me semble que l'opposition traditionnelle entre l'analyse et l'algèbre est un bon point de départ pour mesurer la différence entre l'approche dialectique et discursive par Lautman des mathématiques et l'approche immobiliste de Grothendieck, qui cherche à dissoudre les problèmes dans une marée de généralités plutôt que de les soumettre au siège d'une pensée en mouvement.

Il est frappant que Grothendieck ne se soit pas, à ma connaissance, intéressé à des problèmes analytiques. L'ensemble de son travail concerne le versant algébrique de l'analyse fonctionnelle, la géométrie algébrique, l'algèbre homologique et l'algèbre commutative. En particulier, il n'a jamais cherché à résoudre des problèmes arithmétiques au moyen de techniques analytiques. Cependant, l'histoire suggère (tout du moins jusqu'à maintenant) que beaucoup de problèmes arithmétiques ne peuvent être résolus qu'en utilisant des méthodes analytiques.

Voici un exemple. On peut associer à toute variété algébrique projective et lisse sur les nombres rationnels une fonction zêta, qui est un produit infini de termes provenant des fonctions zêta de Hasse-Weil des réductions modulo des nombres premiers de la variété (à un nombre fini de termes près). On conjecture que ces fonctions zêta se prolongent à tout le plan et satisfont une équation fonctionnelle. En pratique, dans tous les exemples où on peut démontrer que cette équation fonctionnelle est vérifiée, la fonction zêta est une transformée de Mellin (qui est une variante multiplicative de la transformée de Fourier) d'une forme modulaire (une forme modulaire est une fonction méromorphe qui a des propriétés de symétrie par rapport à un groupe arithmétique). Lorsqu'on se trouve, assez arbitrairement, dans cette situation, la variété (ou un « morceau » de celle-ci) admet une description purement analytique, qui ne semble pas avoir de lien avec la variété d'origine (dont la description est algébrique). Dans un esprit grothendieckien, cette situation n'est pas satisfaisante et on voudrait bien plutôt trouver une démonstration du fait que les fonctions zêta ont les propriétés requises, qui ne quitte pas, en ses points essentiels, le domaine de la géométrie algébrique ou les structures différentielles et analytiques qui en sont immédiatement issues. Une pareille démonstration semble cependant complètement hors de portée à l'heure actuelle et on peut même douter qu'il en existe une. De fait, le programme de Langlands suggère, mais sans vraiment proposer de justification, que toutes les fonctions zêta du type décrit plus haut sont associées à des formes modulaires (cependant cette affirmation est à un prendre avec un grain de sel, vu ma connaissance très partielle du sujet). Il est donc possible qu'il existe certains problèmes fondamentaux de l'arithmétique pour lesquels il n'existe que des solutions partielles et que ces solutions requièrent des techniques analytiques. L'approche de Grothendieck échouerait devant ces problèmes et il me semble que le fait que l'analyse y joue un rôle n'est pas un hasard.

Dans ce contexte, voici un extrait de la dernière lettre de Serre à Grothendieck, datée du 31 décembre 1985 (voir [6]) :

« D'où la question : ne serais-tu pas arrivé, vers 1968-1970, à te rendre compte que la méthode "marée montante" était impuissante contre ce genre de problèmes [ceux de la théorie des nombres et de la théorie des formes modulaires], et qu'il fallait changer de style — ce qui te déplaisait. »

Cependant, y a-t-il vraiment une opposition fondamentale entre l'analyse et l'algèbre ? L'exemple que je viens de décrire suggère que cette question est cruciale dans une réflexion sur les limites de l'approche grothendieckienne des mathématiques. Dès le début du XX^e^ siècle, avec les premiers travaux en analyse fonctionnelle, on a nourri l'espoir (voir p. ex. Hilbert [7, p. 60]) d'intégrer l'analyse à l'algèbre. On voit par exemple cette idée à l'œuvre dans la présentation classique de l'équation de Schrödinger de la théorie des quanta comme d'une part une équation aux dérivées partielles — donc un objet très analytique — et comme d'autre part une équation linéaire sur un espace de Hilbert — donc un objet de nature linéaire, en particulier algébrique. Cette deuxième description de l'équation de Schrödinger permet effectivement, via la théorie spectrale, de dire beaucoup de choses sur cette équation. Cependant, l'analyse fonctionnelle ne permet pas, tant s'en faut, de réduire l'étude des équations différentielles à une étude purement algébrique. De manière plus générale, on a très peu d'espoir de parvenir à une compréhension algébrique de la droite réelle et de sa structure différentielle. Dans ce contexte, je voudrais cependant attirer l'attention du lecteur sur des travaux très récents de P. Scholze et D. Clausen (voir [15]), dans lesquels ils introduisent la notion de « mathématique condensée » qui est une forme de pont entre l'analyse et l'algèbre (voir aussi à ce sujet la préface par P. Scholze de l'ouvrage [8]). L'analyse est un sujet touffu et multiforme, qui est rétif à toute tentative de « linéarisation » et où beaucoup de théorèmes évoluent dans un milieu instable, qui ne propose pas de démonstration « naturelle » (cf. la démonstration du théorème des nombres premiers mentionnée plus haut).

Cette dernière affirmation est en désaccord avec Lautman, qui dit dans une discussion des travaux de Hilbert et Weyl :

« Nous nous proposons dans les pages qui suivent de faire voir comment la mathématique moderne est engagée dans la voie de cette unification de l'algèbre et de l'analyse, et cela par la pénétration de plus en plus poussée des méthodes structurales et finitistes de l'algèbre dans le domaine de l'analyse et du continu. ≫ (tiré de [10, *Essai sur l'unité des mathématiques dans leur développement actuel*, p. 87])

Il me semble bien au contraire que l'analyse est irréductible à l'algèbre et à ses ≪ méthodes structurales et finitistes ≫. Par ailleurs, je pense que l'algèbre est un domaine où l'approche de Grothendieck mènera *in fine* aux meilleures mathématiques alors que l'analyse est un domaine où la vision de Lautman est plus adéquate. Il est paradoxal à mon sens que Lautman vît plutôt l'algèbre comme un champ d'application naturel pour son épistémologie. . .

Références

[1] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXVI. Variétés différentielles et analytiques. Fascicule de résultats (Paragraphes 8 à 15)*, Actualités Scientifiques et Industrielles No. 1347, Hermann, Paris, 1971.

[2] Bernard Dwork, *On the rationality of the zeta function of an algebraic variety*, Amer. J. Math. **82** (1960), 631–648, DOI 10.2307/2372974.

[3] *Conférence en l'honneur d'Albert Lautman*. 19-20 mars 2020, ENS Paris. Organisée par C. Eckes, B. Mélès, B. Rémy et J.-J. Szczeciniarz. Page internet https ://cavailles.hypotheses.org/evenements/colloque-albert-lautman-19-20-mars-2020.

[4] *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*, Documents Mathématiques (Paris) [Mathematical Documents (Paris)], vol. 3, Société Mathématique de France, Paris, 2003 (French). Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960–61. [Algebraic Geometry Seminar of Bois Marie 1960-61] ; Directed by A. Grothendieck ; With two papers by M. Raynaud ; Updated and annotated reprint of the 1971 original [Lecture Notes in Math., 224, Springer, Berlin].

[5] Alexandre Grothendieck, *La Clé des songes ou Dialogue avec le Bon Dieu*, 1987. Manuscrit.

[6] Alexandre Grothendieck et Jean-Pierre Serre, *Correspondance Grothendieck-Serre*, Documents Mathématiques, Société mathématique de France, 2001.

[7] David Hilbert, *Wesen und Ziele einer Analysis der unendlichvielen unabhängigen Variablen*, Rend. del Circolo mat. di Palermo **27** (1909), 59–74.

[8] Frédéric Jaëck (ed.), *Lectures grothendieckiennes*, Nouvelles Visions des Sciences, Société Mathématique de France, 2021. Avec des contributions de P. Cartier, O. Caramello, A. Connes, L. Lafforgue, C. McLarty, G. Pisier, J.-J. Szczeciniarz et F. Zalamea.

[9] Alexandre Koyré, *From the Closed World to the Infinite Universe (Hideyo Noguchi Lecture)*, Angelico Press, 2016.

[10] Albert Lautman, *Les mathématiques, les idées et le réel physique*, Librairie philosophique, J. Vrin, 2006. présentation par J. Lautman, avec une étude de F. Zalamea.

[11] John Nash, *C^1 isometric imbeddings*, Ann. of Math. (2) **60** (1954), 383–396, DOI 10.2307/1969840.

[12] D. J. Newman, *Simple analytic proof of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly **87** (1980), no. 9, 693–696, DOI 10.2307/2321853.

[13] Jean Petitot, *Refaire le Timée. Introduction à la philosophie mathématique d'Albert Lautman.*, Revue d'Histoire des Sciences **XL (1)** (1987), 79-115.

[14] David Ruelle, *L'Étrange beauté des mathématiques*, Odile Jacob, 2008.

[15] Peter Scholze and Dustin Clausen, *Lectures on Condensed Mathematics*. Téléchargeable sous https ://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Condensed.pdf.

[16] Hassler Whitney, *Differentiable manifolds*, Ann. of Math. (2) **37** (1936), no. 3, 645–680, DOI 10.2307/1968482.

[17] D. Zagier, *Newman's short proof of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly **104** (1997), no. 8, 705–708, DOI 10.2307/2975232.

[18] Fernando Zalamea, *Albert Lautman et la dialectique créatrice des mathématiques modernes*, Les Mathématiques, les idées et le réel physique, 2006, pp. 17–33.

[19] ———, *Mixtes et passages du local au global chez Lautman : préfigurations de la théorie des faisceaux*, Philosophiques **37** (2010), no. 1, 17–25, DOI 10.7202/039710ar.

[20] David Corfield, *Commentaire sur Emmanuel Barot : Lautman*, Philosophiques **37** (2010), no. 1, 207–211, DOI 10.7202/039722ar.

[21] Emmanuel Barot, *La dualité de Lautman contre la négativité de Hegel, et le paradoxe de leurs formalisations : contribution à une enquête sur les formalisations de la dialectique*, Philosophiques **37** (2010), no. 1, 111–148, DOI 10.7202/039715ar.

[22] Mathieu Bélanger, *La vision unificatrice de Grothendieck : au-delà de l'unité (méthodologique ?) des mathématiques de Lautman*, Philosophiques **37** (2010), no. 1, 169–187, DOI 10.7202/039718ar.

[23] J. Szczeciniarz, *For a Continued Revival of the Philosophy of Mathematics*, 2018, DOI 10.1007/978-3-319-93733-5_12.