Sur la conjecture de Manin-Mumford

T un tore complexe algébrique;

i.e.: $T = \mathbb{C}^g/L$, où L est un réseau de rang $2 \cdot g$ et il existe une métrique hermitienne H sur $\mathbb{C}^g$ tq $H(L, L) \subseteq \mathbb{Z}$.

$S \subseteq T$ un ensemble de points d'ordre fini;

$\overline{S}$ est l'intersection de toutes les sous-variétés analytiques fermées de T contenant S;

Conjecture de Manin-Mumford [Thm. Raynaud]. $\overline{S}$ est une réunion finie de translatés de sous-tores complexes de T.

Historique des preuves de la conjecture de Manin-Mumford

Bogomolov [1980] donne une preuve partielle, fondée sur les propriétés fines de l'action de Aut($\mathbb{C}$) sur les points d'ordre fini.

Raynaud [1985] donne une preuve utilisant les techniques de la géométrie algébrique à la Grothendieck.

Serre-Hindry [1988] complètent la preuve de Bogomolov.

Szpiro-Ullmo-Zhang [1995] donne une preuve utilisant les techniques de l'approximation diophantienne.

Historique. . . (suite)

Hrushovski [1996] donne une preuve utilisant les techniques de la théorie des modèles (logique mathématique).

Pink-R. [2001] donnent une preuve courte élémentaire inspirée de la preuve de Hrushovski.

Les deux dernières preuves exploitent aussi l'action de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ sur les points d'ordre fini.

?? [??] preuve analytique.

Démonstration de la conjecture de Manin-Mumford d'après Pink.-R., I

Réduction du problème.

T est analytiquement isomorphe à une variété projective (Lefschetz).

Via l'inclusion $\overline{S} \subseteq T$, $\overline{S}$ devient aussi une variété projective (Serre).

Plus précisément, T est alors décrit par

$$\{[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid P_1(x_0, \ldots, x_n) = 0, \ldots, P_r(x_0, \ldots, x_n) = 0\}$$

où $P_1, \ldots, P_r$ sont des polynômes homogènes en $x_0, \ldots x_n$ à coefficients complexes.

Il en est de même de $\overline{S}$.

Démonstration. . . II

L'action de Aut($\mathbb{C}$) sur les points d'ordre fini.

$G_0 :=$ {$\sigma \in$ Aut($\mathbb{C}$) | σ fixe les coefficients des polynômes de définition de T et de $\overline{S}$}

Théorème. [Weil-Serre] $\exists a_0, \ldots, a_{d-1} \in \mathbb{Z}$ et $\exists \sigma \in G_0$ tq

$$a_0 \cdot [x_0, \ldots, x_n] + a_1 \cdot [\sigma(x_0), \ldots, \sigma(x_n)] + \ldots$$
$$\cdots + [\sigma^d(x_0), \ldots, \sigma^d(x_n)] = 0$$

pour tout $\underline{x} := [x_0, \ldots, x_n]$ tq $\underline{x} \in T$ et tq $\underline{x}$ est d'ordre fini dans T.

De plus, on supposer que

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_{d-1} z^{d-1} + z^d = 0 \implies |z| > 1.$$

Démonstration... III

Linéarisation. Notons

$$a_0 \cdot \underline{x} + \cdots + a_{d-1} \cdot \sigma^{d-1}(\underline{x}) + \sigma^d(\underline{x}) = 0$$

l'équation du th. de Weil-Serre. Cette équation est équivalente au système

$$\underline{x}_1 = \sigma(\underline{x}_0)$$

$$\underline{x}_2 = \sigma(\underline{x}_1)$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\underline{x}_{d-1} = \sigma(\underline{x}_{d-2})$$

$$-a_0 \cdot \underline{x}_0 - a_1 \cdot \underline{x}_1 - \cdots - a_{d-1} \cdot \underline{x}_{d-1} = \sigma(\underline{x}_{d-1})$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{d-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{x}_{d-2} \\ \underline{x}_{d-1} \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} \underline{x}_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{x}_{d-2} \\ \underline{x}_{d-1} \end{bmatrix}$$

On notera $(*)$ ce système et M la matrice.

Démonstration. . . IV

Géométrie des solutions de (*). On considère l'ensemble

$$\Delta := \{(\underline{x}, \sigma(\underline{x}), \ldots, \sigma^{d-1}(\underline{x})) \in T^d \mid \\ \underline{x} \in \overline{S} \text{ et } \underline{x} \text{ est d'ordre fini dans } T$$

La matrice M agit sur T^d. Par construction, on a $M(\Delta) = \Delta$ et enfin

$$M(\overline{\Delta}) = \overline{\Delta}$$

Noter que l'ensemble $\overline{S}$ est la projection de $\overline{\Delta}$ sur le premier facteur de T^d.

Démonstration... (fin)

Géométrie des solutions de (*) (suite). Soit

$A := \mathbb{C}^{g_a}/L_a$ un tore algébrique complexe;

$\varphi : \mathbb{C}^{g_a} \to \mathbb{C}^{g_a}$ une application linéaire tq $\varphi(L_a) \subseteq L_a$; on suppose que si $z \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de φ alors $|z| > 1$.

Noter que φ induit un homomorphisme analytique $\varphi : A \to A$.

Théorème. [Pink-R.] Soit Z une sous-variété analytique tq $\varphi(Z) = Z$. Alors Z est une réunion finie de translatés de sous-tores complexes de A.

On applique le théorème géométrique à

$$\boxed{A = T^d,\ \varphi = M \text{ et } Z = \overline{\Delta}}$$

pour conclure.

Complément: la conjecture de Mordell-Lang

Soit T un tore algébrique complexe comme plus haut;

$G \subseteq T$ un sous-groupe tq $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ a un nombre fini de générateurs.

$S \subseteq G$;

Conjecture de Mordell-Lang [Thm. Faltings et al.] $\overline{S}$ est une réunion finie de translatés de sous-tores complexes de T.

La seule preuve connue de la conjecture de Mordell-Lang passe par l'approximation diophantienne.

Complément II: le théorème de Hrushovski

Soit T un tore complexe;

hypothèse : si $T_1 \subseteq T_2$ sont des sous-tores de T, alors T_2/T_1 n'est pas algébrique.

Théorème. [Hrushovski] Soit Z une sous-variété analytique fermée de T; alors Z est linéaire.