Recension de *Lectures grothendieckiennes*, édité par F. Jaëck

Le volume *Lectures grothendieckiennes*, récemment publié par les éditions Spartacus sous le parrainage de la Société Mathématique de France, rassemble huit textes consacrés à la pensée d'Alexander Grothendieck et à ses ramifications. Ces textes sont des mises en formes d'interventions de divers conférenciers dans le séminaire éponyme qui s'est tenu à l'École Normale Supérieure (rue d'Ulm) entre 2017 à 2018. Les intervenants du séminaire étaient en majeure partie des mathématiciens travaillant sur des sujets proches des recherches d'A. Grothendieck, mais il se trouvait aussi parmi eux des philosophes et des logiciens. Le propos du séminaire était d'examiner la réception et les filiations des idées de ce mathématicien plutôt que de présenter les détails techniques de ses travaux, et les exposés étaient pour la plupart au moins partiellement accessibles à des auditeurs possédant une culture mathématique de base.

Le personnage d'Alexander Grothendieck n'est plus à présenter, tant son oeuvre a influencé l'ensemble des mathématiques contemporaines. Tout mathématicien s'intéressant à l'algèbre et à la théorie des catégories rencontre à tout moment des concepts forgés par ce dernier et, dans le cas de la géométrie algébrique, c'est l'ensemble du sujet qui a été refondu par A. G. et son école. Ses idées ont cependant également essaimé dans la topologie et la logique, en particulier par le biais du concept de topos. Par ailleurs, les premiers travaux d'A. G., qui concernaient l'analyse fonctionnelle, ont aussi eu une grande influence sur cette discipline.

Les textes rassemblés dans ce volume ne concernent qu'une petite partie de l'héritage grothendieckien. Les thèmes suivants y sont abordés :

(1) La notion de topos (Olivia Caramello, Colin McLarty et Alain Connes)

(2) L'analyse fonctionnelle (Pierre Cartier et Gilles Pisier)

(3) Les réflexions d'A. G. sur la connaissance et la vérité dans son texte tardif *La clé des songes* (Laurent Lafforgue)

(4) Le soubassement philosophique et méthodologique de l'oeuvre mathématique d'A. G. (Jean-Jacques Szczeciniarz)

(5) Le rôle de l'analyse complexe dans la pensée d'A. G. (Fernando Zalamea).

Le volume est également doté d'une préface de Peter Scholze, un éminent mathématicien qui a poursuivi la réflexion d'A. G. sur la topologie étale et le site cristallin (parmi ses nombreux travaux). Enfin, on trouve en préambule un mémento des principaux concepts introduits par A. G., rédigé par l'éditeur Frédéric Jaëck. Ce mémento, intitulé *Petit vocabu-*

laire grothendieckien, donne une mesure de l'ampleur de sa pensée et on ne peut qu'espérer que d'autres séminaires prennent le relai et poursuivent la réflexion sur son héritage intellectuel. Il serait par exemple intéressant de présenter la postérité de la notion de schéma et de ses généralisations (espaces et champs algébriques, log-schémas... en particulier à la lumière des travaux de B. Toën et de ses collaborateurs), de la K-théorie (en particulier à la lumière des travaux de D. Quillen et de S. Bloch entre 1970 et 1990, puis de ceux de V. Voevodsky dans les années 1990), de la géométrie anabélienne et de la conjecture de la section (en particulier au vu de la démonstration par A. Tamagawa et S. Mochizuki dans les années 1990 de la conjecture d'A. G. sur la détermination d'une courbe sur un corps de nombres par son groupe fondamental), de la topologie étale (généralisée récemment en topologie pro-étale par P. Scholze et D. Clausen pour les besoins de la cohomologie ℓ-adique), de la cohomologie cristalline (qui a par exemple mené dans les années 1980 aux conjectures de J.-M. Fontaine en théorie de Hodge p-adique et à la définition par P. Berthelot de la cohomologie rigide, ainsi qu'à l'introduction récente de la cohomologie prismatique par P. Scholze et B. Bhatt), et enfin de la notion de catégorie dérivée d'une catégorie abélienne et de la notion de dérivateur (on pensera ici aux travaux de D. Quillen sur les catégories de modèles dans les années 1970, à la géométrie algébrique dérivée développée par de nombreux mathématiciens depuis les années 1990, et aux travaux récents de J. Lurie). Cette liste de sujets n'est pas exhaustive et les développements ultérieurs mentionnés entre parenthèses ne font pas justice, tant s'en faut, aux travaux sur chacun des thèmes mentionnés. Il ne s'agit ici que de donner une idée de la richesse des recherches que les concepts introduits par A. G. ont suscitée.

Voici maintenant une recension plus détaillée des différents articles contenus dans le volume. Faute de place, nous ne pourrons discuter que quelques aspects de chaque texte.

(1) La notion de topos

Dans la première partie de son article intitulé *La 'notion unificatrice' de topos*, Olivia Caramello donne une présentation informelle, mais pourtant claire et informative, de la notion de topos, d'une partie de son histoire et de son utilisation dans diverses parties des mathématiques. La notion de topos prend sa source dans la réflexion d'A. G. sur les espaces fibrés (voir à ce sujet la contribution de Colin McLarty) ainsi que dans la définition abstraite de la cohomologie qu'il donna dans un article célèbre publié en 1957 dans le *Tohoku Mathematical Journal*. La notion de topos est introduite dans l'exposé IV du 1er volume du Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie de 1964-1964 (SGA 4.1). Un topos est une catégorie qui est équivalente à la catégorie des faisceaux d'ensembles sur un site (un site étant une catégorie munie d'une topologie généralisée, cette dernière étant une donnée d'une classe de flèches censées jouer le rôle des inclusions d'ouverts dans le cadre classique). Un espace topologique ordinaire donne ainsi lieu à un topos mais on peut montrer que la catégorie des représentations d'un groupe a aussi une structure naturelle de topos (on appelle ce topos le *topos classifiant* du groupe). Comme l'explique O. Caramello, il semble que A. G. voyait un topos sous différents angles : d'une part comme un espace topologique généralisé, d'autre part comme un espace classifiant, mais aussi, de manière plus générale, comme un univers où on peut pratiquer les mathématiques. Ce dernier point de vue est justifié par le fait que les propriétés catégoriques d'un topos sont semblables à celle de la catégorie des ensembles (qui est aussi un topos, le *topos ponctuel*). On rappelle qu'au début des années 1970, le logicien W. Lawvere s'est intéressé à ce dernier point de vue et a proposé de considérer des modèles de théories du premier ordre dans des topoi quelconques (plutôt que seulement dans le topos ponctuel, comme dans la théorie des modèles classique). Ceci a mené au développement de la *logique catégorique*, et en particulier à celui des logiques multivaluées.

La deuxième partie du texte d'O. Caramello est plus technique et présente certains de ses propres travaux sur la notion de topos. Ces travaux exploitent un point de vue nouveau, à savoir que les topoi permettent de construire des ponts entre diverses théories munies du même topos classifiant, ce dernier mettant en exergue des structures fondamentales de ces théories.

Le texte *Grothendieck's two intuitions of topos* de Colin McLarty est une étude historique et philologique de la notion de topos.

Dans la première partie de son exposé, l'auteur défend la thèse selon laquelle l'origine des topoi est à chercher dans un exposé que J.-P. Serre fit en 1958 à Paris, au cours duquel il introduisit un certain groupe de cohomologie fabriqué au moyen des espaces principaux homogènes sous un groupe constant. A. G. se trouvait dans l'assistance et C. McLarty argumente, textes et témoignages oraux à l'appui, que c'est à la suite de cet exposé qu'il envisagea pour la première fois la notion de topos, conçu comme un objet muni d'une topologie généralisée permettant de calculer la cohomologie d'un faisceau dont la restriction à la topologie de Zariski est trop pauvre.

La deuxième partie de l'article se concentre sur des exposés concernant les topoi que A. G. fit en 1973 à Buffalo aux USA. Ces exposés furent enregistrés sur des cassettes magnétiques dont certaines purent être retranscrites. C. McLarty cite des passages de ces enregistrements dans son article, lesquels montrent que A. G. avait repris à ce moment-là sa réflexion sur les topoi comme alternatives à la catégorie des ensembles (on notera que ceci semble être indépendant des travaux de W. Lawvere, qui avait à la même époque des préoccupations semblables). Certains extraits suggèrent que A. G. cherchait à élucider la compatibilité entre ses trois intuitions du topos mais, sauf erreur du recenseur, il semble qu'il n'a pas eu le temps de mener cette réflexion à bien dans ses exposés (ou du moins dans ce qui en subsiste).

Le texte d'Alain Connes *Un topo sur les topos* est assez foisonnant, mais il a grosso modo trois parties.

Dans la première partie, il est question, comme dans les contributions de C. McLarty et O. Caramello, de l'origine de la notion de topos. Le propos ici est assez semblable à celui des deux autres exposés sur les topoi mais il s'y trouve un peu de matériel supplémentaire, en particulier des passages de la correspondance Grothendieck-Serre et des extraits inédits des enregistrements des conférences américaines d'A. G. L'auteur cite aussi un long passage de *Récoltes et semailles*, un vaste mémoire rédigé par A. G. au début des années 1980. A. G. y explique que seuls les topoi donnent un cadre assez large pour pouvoir calculer des groupes de cohomologie intéressants sans perdre l'intuition topologique. Il s'y trouve plusieurs images frappantes, comme celle du topos comme 'vaste lit conjugal' du 'nombre et de la grandeur', un espace topologique ordinaire étant 'trop étriqué'.

Dans la deuxième partie du texte, l'auteur s'intéresse à la vision du topos comme univers, et il montre, exemples à l'appui, que le passage du langage des ensembles à celui des faisceaux d'ensembles introduit un 'aléa' (une variabilité) dans tous les objets mathématiques que l'on considère, tout en préservant la possibilité de faire des opérations ensemblistes naïves. Cet 'aléa' mène en particulier à des logiques multivaluées en un sens très large.

Dans la troisième partie de son texte, l'auteur explique comment le concept de topos l'a guidé dans sa définition, avec C. Consani, du *site arithmétique*. Le *site arithmétique* est un topos qui joue un rôle de fond dans l'approche à l'hypothèse de Riemann que l'auteur a développée au début des années 1990. À l'examen, il nous semble cependant que la définition du site arithmétique est surtout liée à une définition très succincte des catégories additives que A. G. donna autour de 1962. Les catégories additives firent leur apparition dans l'oeuvre d'A. G. à peu près au même moment où ce dernier forma l'intuition du topos (les faisceaux sur un site donnant lieu à beaucoup de catégories additives) mais elles ne sont pas directement liées à ces objets.

(2) L'analyse fonctionnelle.

L'article *Il a tué l'analyse fonctionnelle* de Pierre Cartier revient sur les débuts de l'activité mathématique d'A. G., qui concernaient l'analyse fonctionnelle. P. Cartier a fait ses études à l'école normale (rue d'Ulm) au début des années 1950 et son cursus universitaire a donc commencé peu après celui d'A. G. Il est ainsi l'un des rares mathématiciens disposant encore d'informations de première main sur les premiers pas d'A. G. dans le monde académique. Le texte contient quantité d'anecdotes et de faits dont le souvenir se serait peut-être perdu sans cet effort de rédaction. L'auteur passe d'abord en revue les travaux de S. Banach et de son école jusqu'au début de la Seconde Guerre mondiale puis il décrit les problèmes auxquels faisait face l'analyse fonctionnelle de l'après-guerre à la suite de ces travaux. Il mentionne ensuite que J. Dieudonné et L. Schwartz se trouvaient à Nancy à la fin des années 1940, et que c'est là qu'ils rencontrèrent A. G. pour la première fois. Après la fin de ses études à Montpellier, A. G. s'était d'abord rendu à Paris et y avait rencontré H. Cartan, et c'est sur les conseils de ce dernier qu'il était venu les voir à Nancy. J. Dieudonné suggéra d'abord à A. G. de travailler sur une série de quatorze problèmes d'analyse fonctionnelle qu'il avait énoncés dans un de ses articles avec L. Schwartz. Au grand étonnement de J. Dieudonné, A. G. parvint à résoudre rapidement ces problèmes. Après ces débuts spectaculaires, L. Schwartz lui proposa de travailler sur un problème qui était motivé par *le théorème du noyau*, un résultat qu'il venait de démontrer. Le problème était le suivant : quelle est la bonne définition du produit tensoriel de deux espaces de Banach ? A. G. conclut rapidement que deux définitions différentes étaient également plausibles, l'une correspondant au point de vue *projectif* (au sens catégorique) et l'autre au point de vue *injectif*, qui est dual du premier. L'existence de ces deux produits tensoriels mena à nombre de travaux par la suite (voir à ce sujet l'article de G. Pisier) et elle est aussi à la racine de la définition des espaces dits *nucléaires* (où les deux produits tensoriels coïncident). Dans le dernier paragraphe de son article, P. Cartier explique comment, selon lui, A. G. passa de l'analyse fonctionnelle à la géométrie algébrique. Cette transition aurait eu lieu dans le contexte d'exposés de J.-P. Serre au Séminaire Cartan, où ce dernier avait proposé une approche via les méthodes de l'analyse fonctionnelle à ce qui s'appelle maintenant la *dualité de Serre*. J.-P. Serre avait aussi essayé à la même époque de trouver une démonstration complète du *théorème de Dolbeault* (ou apparaît le fameux opérateur différentiel $\bar{\partial}$, dont le noyau est constitué des formes différentielles holomorphes). Il est bien connu que A. G. donna par la suite (dans le cas des variétés algébriques) une preuve algébrique et faisceautique de la dualité de Serre et que la théorie de la cohomologie des faisceaux jointe à un lemme de Poincaré convenable permet de démontrer rapidement le théorème de Dolbeault. On voit donc que l'article que A. G. publia dans le *Tohoku Mathematical Journal* est lié aux problèmes que J.-P. Serre cherchait à résoudre dans le cadre du Séminaire Cartan. Par ailleurs, les deux définitions du produit tensoriel d'espaces de Banach peuvent, comme on l'a vu plus haut, être également comprises de manière catégorique. Tous les éléments sont donc en place pour une utilisation de méthodes catégoriques en géométrie algébrique.

L'article *Le produit tensoriel d'espaces de Banach depuis Grothendieck* de Gilles Pisier décrit la postérité de six questions que A. G. posa dans un court article publié en 1953, intitulé *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*. Cet article fut à peine remarqué au moment de sa publication et fut redécouvert en 1968 par J. Lindenstrauss et A. Pelczynski, qui notèrent que certains problèmes formulés pendant les années 1960 avaient déjà été conjecturés par A. G. dans son article. Une grande partie de ces problèmes concernent la comparaison des deux produits tensoriels possibles d'espaces de Banach et les normes auxquelles ils donnent lieu. Faute de place (et aussi de compétence), nous ne pourrons tous les passer en revue et nous nous bornerons à décrire un résultat simple qui est lié à plusieurs d'entre eux. Il s'agit de l'énoncé suivant, appelé *Inégalité de Grothendieck*.

Soit $(H, \langle\cdot\rangle)$ un espace euclidien (resp. hermitien) de dimension n. Soit $[a_{ij}]$ une matrice $n \times n$ réelle (resp. complexe). Alors il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\sup\{\big|\sum_{ij} a_{ij}\langle x_i, x_j\rangle\big|,\ x_i, x_j \in H,\ ||x_i|| = ||x_j|| = 1\} \leqslant K \sup\{\big|\sum_{ij} a_{ij} x_i x_j\big|,\ x_i, x_j \in \mathbf{K},\ |x_i| = |x_j| = 1\}$$

où $\mathbf{K}$ est le corps des réels ou des complexes selon que H est euclidien ou hermitien. Cette inégalité est une version élémentaire (due à J. Lindenstrauss et A. Pelczynski) d'un résultat que A. G. appelle 'théorème fondamental' dans son article de 1953. Malgré la simplicité de l'énoncé, la constante K est fort mystérieuse et il n'existe apparemment pas de formule simple qui l'exprime en termes de constantes fondamentales. Des travaux de U. Haagerup et A.-M. Davie de la fin des années 1980 ont montré que si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ alors $1.338 < K \leqslant 1.405$. Par ailleurs, de façon très inattendue, l'inégalité de Grothendieck fait depuis le début des années 2000 l'objet de recherches en informatique théorique. Le lien est le suivant. Le côté gauche de l'inégalité peut être calculé en temps polynomial alors qu'on ne sait calculer le côté droit (sans la constante K) qu'en temps exponentiel ! Cela signifie que la constante K mesure d'une certaine façon le hiatus entre le calcul en temps polynomial et en temps exponentiel, et qu'elle est donc liée au fameux problème P≠NP de l'informatique théorique. L'avenir nous dira peut-être quelle est la véritable signification de ce lien.

(3) Les réflexions d'A. G. sur la connaissance et la vérité dans son texte *La clé des songes*

Dans son exposé *La notion de vérité selon Grothendieck* Laurent Lafforgue revient sur *La clé des songes*, un texte que A. G. rédigea à la fin des années 1980. Alors que dans *Récoltes et semailles*, son mémoire antérieur plus connu, A. G. mêle réflexions mathématiques, considérations philosophiques, récriminations et éléments biographiques, il ne s'intéresse plus aux mathématiques dans *La clé des songes* et il ne revient que peu sur son histoire personnelle. Il s'agit d'une sorte de méditation, où A. G. cherche à comprendre sa relation personnelle avec la connaissance, la recherche et la vérité. Le texte propose d'une part une véritable gnoséologie, qui semble très originale, mais il contient aussi beaucoup de passages assez déroutants. A. G. y explique par exemple que Dieu lui parle directement pendant ses rêves et qu'il lui a annoncé 'l'avènement d'une ère nouvelle'. Malgré ces étrangetés, on y trouve aussi de très beaux passages sur le processus de découverte et sur la révélation de l'évidence cachée. L. Lafforgue propose un mode de lecture inhabituel de *La clé des songes*. Au lieu d'en fournir une interprétation globale, il s'intéresse à un ensemble de mots ou de syntagmes récurrents dans le texte et il étudie leurs ramifications conceptuelles. C'est une approche intéressante, herméneutique plutôt qu'analytique, et elle a l'avantage de ne pas imposer au lecteur une certaine manière de comprendre le texte. Le terme le plus important qu'utilise A. G. est certainement 'L'état de vérité', qui est l'état dans lequel se trouve le sujet connaissant lorsque l'évidence lui est apparue. Il 'accueille' alors humblement la connaissance. L. Lafforgue souligne que A. G. ne cherche jamais à définir la notion de vérité mais qu'il ne doute jamais de la possibilité d'accéder à cette dernière. Il ajoute qu'A. G. se différencie en cela de beaucoup de philosophes dont c'est la préoccupation majeure, et que cela est d'autant plus remarquable que dans son oeuvre mathématique il attache beaucoup d'importance à trouver les bonnes définitions des concepts. D'autres termes clés du texte sont 'la foi' (nécessaire pour trouver le chemin de la vérité), et aussi 'l'erreur', les erreurs n'étant que des 'marches sur le chemin de la vérité'. Il est intéressant de noter que même si l'imagerie de *La clé des songes* est souvent d'inspiration chrétienne, la conception de la connaissance qu'on y trouve ne s'inscrit apparemment pas dans une théologie de la révélation. Dieu y est présenté comme un simple guide pour le sujet à la recherche de l'évidence. Sa nature n'est pas révélée par un évènement et il ne constitue pas l'objet dernier de toute connaissance.

(4) Le soubassement philosophique et méthodologique de l'oeuvre mathématique d'A. G.

Dans son article ambitieux *Prolégomènes à une étude philosophique de l'oeuvre de Grothendieck* Jean-Jean-Jacques Szczeciniarz revient sur certains concepts fondamentaux introduits par A. G. et en propose un commentaire philosophique. L'article commence par une longue introduction méthodologique, où l'auteur explique comment on peut tirer des leçons philosophiques d'un développement mathématique. Son point de vue est que 'La pensée philosophique se manifeste au coeur même de la pratique mathématique ; elle surgit parfois ou émerge, prescrit ses exigences, de façon diverse continue ou discrète, dans des reprises réflexives d'abord mathématiques, dans ses visées de concepts ou de thèmes philosophiques [...], dans ses exigences de synthèse.' Ainsi 'Les mathématiques nous offrent [...] une sorte de dépassement de leur propre réflexivité, et un ensemble de virtualités philosophiques à même de modifier, bousculer même les dispositifs philosophiques'. Ce qui intéresse donc l'auteur est le processus de synthétisation qui a lieu en mathématiques à la suite d'une sorte de dépassement. En termes plus profanes, cette synthétisation est la généralisation des concepts à laquelle l'examen d'un problème mathématique peut mener. Cette synthétisation est particulièrement intéressante chez A. G., car '[...] ce que nous pourrions appeler la visée architectonique est présente d'emblée chez Grothendieck. Cette immédiateté de l'architectonique, ce fait là nous incite à dire qu'il "tend" vers la philosophie.' En d'autres termes (c'est notre interprétation), les mathématiques d'A. G. sont pour l'auteur un lieu privilégié de généralisation des concepts, car elles sont traversées par le souci de déterminer d'emblée la généralité naturelle des concepts utilisés. Dans la suite de son texte, J.-J. Szczeciniarz examine l'un après l'autre certains objets mathématiques introduits par A. G. et cherche à comprendre le mécanisme de généralisation qui a mené à leurs définitions. Il donne par exemple une interprétation kantienne du processus qui a mené à la définition du spectre d'un anneau commutatif, un objet dans lequel s'opère une synthèse de l'algèbre et de la géométrie. Il passe ensuite à la définition du schéma, et à son interprétation comme foncteur, qu'il voit à la suite de J. Cavaillès comme le résultat de plusieurs "thématisations" husserliennes. Il examine aussi les notions de platitude, de schéma de Hilbert, et de schéma formel. On notera que J.-J. Szczeciniarz fait dans son texte l'effort louable de donner des définitions mathématiques précises des objets qu'il considère. Il est l'un des rares philosophes à avoir fait l'effort de se plonger dans les détails techniques des mathématiques qui l'intéressent. Pour comprendre pleinement la portée de son analyse des concepts introduits par A. G., il faut avoir une culture philosophique autant que mathématique, ce dont peu de lecteurs disposeront.

(5) Le rôle de l'analyse complexe dans la pensée d'A. G.

Le propos de l'article *La variable complexe dans l'oeuvre grothendieckienne* de Fernando Zalamea est de comprendre le rôle qu'a joué la variable complexe (c'est-à-dire la théorie des fonctions holomorphes) dans les travaux d'A. G. L'auteur explique en préambule que cette théorie a été déterminante dans le développement scientifique de A. G et aussi que les concepts et méthodes introduites par A. G. se caractérisent par leur souplesse, leur naturalité et leur universalité. Il n'est pas clair à ce stade du texte en quoi cette dernière assertion est liée à l'importance de la variable complexe pour A. G. Cependant, il affirme vers la fin de son texte que la variable complexe a aussi ces trois vertus et que c'est dans cette coïncidence qu'on doit chercher la raison profonde de l'importance des fonctions holomorphes dans l'opus grothendieckien. Il semble que ce soit la seule justification qu'il donne pour affirmer, comme il le fait dans les paragraphes suivants, que tous les grands concepts introduits par A. G. prennent leur source dans une intuition provenant de la variable complexe. Les catégories additives, la K-théorie, les espaces nucléaires, le théorème de Riemann-Roch et la dualité seraient ainsi tous enracinés dans cette intuition. Chemin faisant, et bien que cela semble un peu hors de propos, il passe en revue les références à B. Riemann dans les écrits d'A. G. Il mentionne une discussion de l'oeuvre de B. Riemann dans *Récoltes et Semailles* et il remarque que le mot Riemann apparaît dans 'sphère de Riemann' et 'théorème de Riemann-Roch'. Il suggère que l'intérêt que A. G. a porté à la sphère de Riemann et au théorème de Riemann-Roch prend source dans son admiration pour le mathématicien allemand. Le lien (ténu) entre cette digression et les fonctions holomorphes est alors apparemment le fait que la sphère de Riemann a une structure complexe.

Cette présentation des choses nous semble assez déroutante. F. Zalamea veut relier trois thèmes décidément hétérogènes : les vertus des méthodes introduites par A. G., la flexibilité de la variable complexe, et l'admiration d'A. G. pour l'oeuvre de B. Riemann. En consultant les nombreux textes d'A. G. cités par l'auteur, on ne trouve cependant (sauf erreur du recenseur) aucun texte qui présente la variable complexe comme exemplaire de quelque façon, ou même de référence où elle fournisse explicitement le prototype d'un nouveau concept. Par ailleurs, aucune citation ne suggère que l'intérêt d'A. G. pour le théorème de Riemann-Roch ou ses quelques travaux de jeunesse sur la sphère de Riemann soient liés à son admiration pour B. Riemann.

Notre sentiment est que les variétés analytiques complexes ont bien joué un rôle important pour A. G. car souvent les premières preuves de théorèmes de géométrie algébrique complexe sont analytiques. Historiquement, la préoccupation d'A. G. est souvent de remplacer des méthodes analytiques peu transparentes par des preuves algébriques et structurales. À titre d'exemple, on voit ceci à l'oeuvre dans la démonstration schématique de la formule de Riemann-Roch pour une courbe projective lisse. La démonstration analytique fait appel à la théorie de l'uniformisation et quitte le territoire algébrique alors que la démonstration schématique est un simple dévissage une fois qu'on dispose de la théorie des faisceaux cohérents et de la dualité de Serre pour le faisceau trivial. Cependant, rien ne suggère que la théorie des fonctions holomorphes ait été en tant que telle un catalyseur dans l'approche d'A. G. aux mathématiques.