فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۶، شمارهٔ ۶۰ (بهار و تابستان ۱۳۹۶) صص. ۸۹ تا ۱۰۲

شش افسانه دربارهٔ درونیابیِ چندجمله‌ای و فرمول‌های انتگرال‌گیری*

لوید نیک ترفتن

مترجم: داوود میرزایی

پیشنهاد نوشتن این مقاله که یادداشتی است بر مبنای سخنرانیِ تابستانه‌ام در ۲۹ ژوئن ۲۰۱۱ در انجمن سلطنتی[۱]، برای نشریهٔ *ریاضیات امروز*[۲] باعث خوشحالی است.

چندجمله‌ای‌ها از پایه‌ای‌ترین مباحث ریاضی است و برای یک ریاضیدان مثل من در حوزهٔ آنالیز عددی، نقطهٔ آغاز روش‌های عددی است و تاریخچهٔ آن در برخی موارد مانند فرمول‌های انتگرال‌گیری عددی و روش‌های تکرار نیوتن در ریشه‌یابی، به قرن‌ها پیش برمی‌گردد. شاید تا به حال فکر می‌کردید حقایق اساسی دربارهٔ محاسبه با چندجمله‌ای‌ها را به‌خوبی درک کرده‌اید. در واقع وضعیت تقریباً عکس این است. دیدگاه‌های همه‌گیری دربارهٔ چندجمله‌ای‌ها وجود دارد که برخی از مهم‌ترینِ آنها اشتباه هستند. این اشتباهات بر بدفهمی‌هایی استوارند که توسط نسل‌هایی از کتاب‌ها به‌صورت غیر قابل تغییر و مستحکم در آمده‌اند.[۳]

عبارات و کلمات کلیدی. درونیابی؛ تقریب بهینه؛ فرمول انتگرال‌گیری گاوس؛ ریشه‌یابی چندجمله‌ای‌ها؛ درونیابی لاگرانژ.

* نام و نشان مقالهٔ اصلی از این قرار است:
Trefethen, Lloyd N., Six myths of polynomial interpolation and quadrature, *Mathematics Today*, **47** (4) (2012), 184–188

[۳] در این نوشته، شش تصور مرسوم و مهم در آنالیز عددی به چالش کشیده و از آنها با عنوان افسانه یاد شده است. پشت هر افسانه واقعیتی نهفته است اما گاهی از این واقعیت برداشت‌های نادرست شده است و گاهی حقایقِ مهم‌ترِ دیگری، گفته نشده‌اند. لوید نیک ترفتن هم‌اکنون استاد دانشگاه آکسفورد و رئیس گروه آنالیز عددی آنجا است. او برندهٔ جایزه‌های بسیاری در ریاضیات کاربردی است و در فاصلهٔ زمانی ۲۰۱۱ تا ۲۰۱۲ رئیس SIAM بوده است–م.

[۱] Royal Society [۲] Mathematics Today

از سال ۲۰۰۶ به این سو، من و همکارانم در حال حل مسائل ریاضی به‌کمک چندجمله‌ای‌ها با استفاده از نرم افزار چبفان (`www.maths.ox.ac.uk/chebfun`) هستیم. بر پایهٔ تجربیات روزانه، فهمیده‌ایم که چندجمله‌ای‌ها چقدر سریع و قابل اعتماد هستند. این یافتهٔ کاملاً مثبت مرا کنجکاو کرد تا منشأ این تصورات غلط را بیابم و این نوشته تلاشی برای جمع‌بندی برخی از یافته‌هایم است. جزئیات کامل مشتمل بر تعریف‌های دقیق و قضیه‌ها، در پیش‌نویس‌های کتاب جدیدم با عنوان *نظریهٔ تقریب و انجامِ تقریب*[۱] وجود دارند که در سایت `www.maths.ox.ac.uk/~trefethen` نیز قابل دسترسی است.

متن حاضر دربارهٔ «شش افسانه» است. البته واقعیاتی هم درون هر افسانه وجود دارد، زیرا ریاضیدانان به‌ندرت چیزهایی می‌گویند که کاملاً اشتباه باشند. با این حال در هر کدام از اینها نکتهٔ مهمی مغفول مانده است.

در سراسر بحث، f یک تابع پیوسته بر بازهٔ $[-۱,۱]$ است، نقاط متمایز $x_۰$، $x_۱$، ...، x_n در $[-۱,۱]$ داده شده‌اند و p_n یک چندجمله‌ای یکتا از درجهٔ حداکثر n است و $p_n(x_j)=f(x_j)$ برای هر j. دو خانواده از نقاط دارای اهمیت ویژه هستند: نقاط هم‌فاصلهٔ $x_j=-۱+۲j/n$ و نقاط چبیشف $x_j=\cos(j\pi/n)$. همچنین به نقاط لژاندر اشاره خواهم کرد که ریشه‌های چندجمله‌ای درجهٔ $n+۱$ لژاندر $P_{n+۱}$ هستند.

توضیح مربوط به هر افسانه با دو یا سه نقل قول از کتاب‌های پیشگام بدون اسم نویسنده و تنها با ذکر سال چاپ آغاز می‌شود. سپس حقایق ریاضی پشت هر افسانه و اینکه این حقایق ناظر بر چه چیز هستند را می‌گوییم.

افسانهٔ ۱: درونیاب‌های چندجمله‌ای وقتی $n\to\infty$ واگرا هستند. کتاب‌ها همواره به دانشجویان هشدار می‌دهند که انتظار نداشته باشند $p_n\to f$ وقتی $n\to\infty$.

> «درونیاب‌های چندجمله‌ای به‌ندرت به یک تابع پیوستهٔ کلی همگرا هستند.»(۱۹۸۹)
>
> «متأسفانه تابع‌هایی وجود دارند که درونیابی روی نقاط چبیشف برای آنها همگرا نیست.»(۱۹۹۶)

علی‌الظاهر این هشدار با بیان دو قضیه توجیه می‌شوند. وایرشتراس در سال ۱۸۸۵ ثابت کرد [۱۹] که هر تابع پیوسته را می‌توان با هر دقت دلخواه با چندجمله‌ای‌ها تقریب زد. از سوی دیگر، فابر در سال ۱۹۱۴ ثابت کرد [۴] که هیچ طرحوارهٔ درونیابیِ چندجمله‌ای، با هر چیدمانی از نقاط، در مورد همهٔ توابع پیوسته همگرا نخواهد بود.

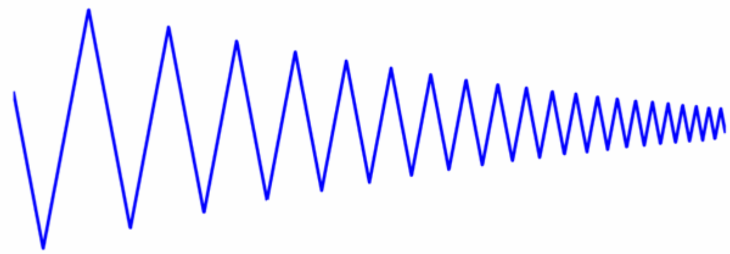
---
[۱] Trefethen, Lloyd Nicolas, *Approximation Theory and Approximation Practice*, SIAM, Philadelphia, 2013.

بنابراین به نظر می‌رسد ایرادی در درونیابی چندجمله‌ای وجود دارد. با وجود این، حقیقت این است که اگر f کمی *هموار* باشد، درونیاب‌های چندجمله‌ای روی نقاط چبیشف همیشه همگرا هستند (آنها را *درونیاب‌های چبیشف* می‌نامیم). شرط پیوستگی لیپ‌شیتس روی تابع f که می‌گوید ثابت L وجود دارد که به‌ازای هر $x, y \in [-۱, ۱]$ داریم $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|$، قوی‌تر از آن چیزی است که نیاز داریم. بنابراین مادامی که f پیوستهٔ لیپ‌شیتس باشد، که تقریباً در هر کاربرد عملی چنین است، همگرایی $p_n \to f$ تضمین شده است.

در واقع یک مشکل بزرگ در مورد همگرایی درونیاب‌های چندجمله‌ای وجود دارد که به درونیابی روی نقاط هم‌فاصله مربوط می‌شود. همان‌طور که رونگه در سال ۱۹۰۱ نشان داد [۱۳]، درونیابی روی نقاط هم‌فاصله حتی اگر f یک تابع تحلیلی (تمامریخت) باشد، ممکن است به‌صورت نمایی واگرا شود. این واقعیت مهم و موثق که به *پدیدهٔ رونگه* مشهور است، سبب ایجاد سردرگمی شده است. این امر به همراه قضیهٔ فابر که گویی تأییدی بر آن است، باعث تعمیم مسئلهٔ درونیابیِ چندجمله‌ایِ هم‌فاصله به حالت کلی شده است تا جایی که پژوهشگران نسبت به کاربرد درونیاب‌های چندجمله‌ای در حالت کلی بدگمان شده‌اند.

هرچه f هموارتر باشد، همگرایی درونیاب‌های چبیشف سریع‌تر است. اگر f، ν بار مشتق‌پذیر و مشتق مرتبهٔ νاُم آن دارای تغییرات کل V باشد، آنگاه $\|f - p_n\| = O(Vn^{-\nu})$ وقتی $n \to \infty$. (منظور از $\|f - p_n\|$ ماکزیمم $|f(x) - p_n(x)|$ به‌ازای $x \in [-۱, ۱]$ است.) اگر f تحلیلی باشد، همگرایی از نوعِ هندسی و به‌صورت $\|f - p_n\| = O(\rho^{-n})$ به‌ازای یک $\rho > ۱$ است. ویژگی‌های پارامتر ρ را در ذیل افسانه ۵ ارائه خواهم داد.

برای مثال، در اینجا درونیاب چبیشف p_n از درجهٔ ۱۰۰۰۰ برای تابع دندانه‌–ارّه‌ای $f(x)$ که با انتگرال تابع $\mathrm{sign}(\sin(۱۰۰t)/(۲ - t))$ از -۱ تا x تعریف می‌شود، آمده است. این خم ممکن است شبیه نمودار یک چندجمله‌ای نباشد، ولی هست! از آنجا که $\|f - p_n\| \approx ۰٫۰۰۰۱$، شکل درونیاب از شکل خود تابع f قابل تمییز نیست.



برای توابعی مانند این تابع که همواریِ کمی دارند، استفادهٔ چندانی از درونیاب‌های چندجمله‌ای نمی‌شود اما به‌لحاظ نظری، نگرانی در مورد همگرایی آنها وجود ندارد. برای تابع‌های هموارتر مانند e^x، $\cos(۱۰x)$ یا $۱/(۱ + ۲۵x^۲)$ همگرایی را تا ۱۵ رقم دقت حتی با مقادیر کوچک n (به‌ترتیب ۱۴، ۳۴ و ۱۸۲) به‌دست می‌آوریم.

افسانهٔ ۲: مقداریابیِ عددیِ درونیاب‌های چندجمله‌ای، مشکل‌دار است. درونیاب‌ها روی نقاط چبیشف ممکن است به‌لحاظ نظری همگرا شوند اما آیا مشکلی در محاسبهٔ آنها با رایانه وجود ندارد؟ کتاب‌های درسی در این زمینه به دانشجویان هشدار می‌دهند.

> «درونیابی چندجمله‌ای علاوه بر عدم همگرایی کلی‌اش، ضعف‌های دیگری هم دارد. تعیین و مقداریابیِ درونیاب‌های چندجمله‌ای از درجات بالا می‌تواند بسیار زمان‌بَر باشد و مسائل مشکلی را در رابطه با خطاهای گردکردن به بار آورد.» (۱۹۷۷)

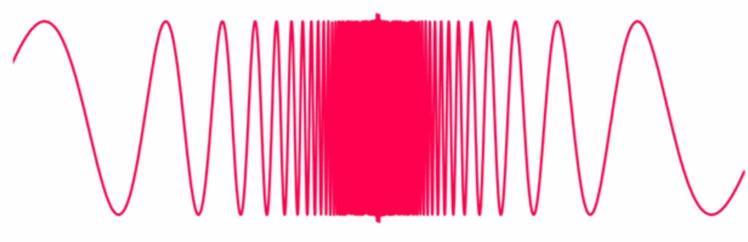
> « درونیابی لاگرانژ اگرچه گاهی در مطالعات نظری سودمند است، در محاسبات عملی به‌ندرت استفاده می‌شود.» (۱۹۸۵)

> «درونیابی از دیدگاه پایداریِ عددی به یک مسئلهٔ دشوار شُهره است.» (۱۹۹۰)

منشأ این نوع نگاه، این واقعیت است که برخی از روش‌هایی که ممکن است یک نفر به‌طور طبیعی برای محاسبهٔ درونیاب‌های چندجمله‌ای به‌کار می‌گیرد، یا کُند هستند یا عددی–ناپایدار یا هر دو. برای مثال، اگر شما فرمول لاگرانژ را به‌شکل متداول آن بنویسید و به همان صورت روی یک رایانه پیاده‌سازی کنید، الگوریتمی خواهید داشت که به $O(n^۲)$ عمل محاسباتی به‌ازای هر نقطهٔ مقداریابی نیاز دارد (گاهی به همین علت کتاب‌ها خوانندگان را هشدار می‌دهند که بایستی درونیابی نیوتن را به‌جای درونیابی لاگرانژ به‌کار گیرند–این هم یک افسانهٔ دیگر!) و اگر شما درونیاب‌ها را در «چارچوب جبرخطی» محاسبه کنید، یعنی یک ماتریس وندرموند تنظیم کنید که ستون‌های آن شامل مقادیر ۱، x، $x^۲$، …، x^n در نقاط گره‌ای باشد، آن‌گاه روش عددی شما به‌طور نمایی ناپایدار است. این همان الگوریتم polyval/polyfit در متلب[۱] است و من خودم نیز به‌دلیل ترویج افسانهٔ ۲ با استفاده از این الگوریتم در کتابم با عنوانِ *روش‌های طیفی در متلب* [۱۶] گناهکار هستم. خطاهای گرد کردن در رایانه حتی برای $n = ۶۰$ کل دقت این روش را بر باد می‌دهند، چه برسد به $n = ۱۰۰۰۰$ که در نمودار بالا داشتیم.

در مورد $n = ۱۰^۶$ چگونه است؟ در اینجا نمودار چندجمله‌ای درونیابِ تابع $f(x) = \sin(۱۰/x)$ مبتنی بر یک میلیون نقطهٔ چبیشف رسم شده است. نمودار در زمان حدود ۳۰ ثانیه روی لپ‌تاپ شخصی‌ام، با مقداریابی درونیاب در ۲۰۰۰ نقطهٔ بسیار نزدیک صفر، به‌دست آمده است.

[۱] Matlab



الگوریتم سریع و پایداری که این محاسبات را ممکن ساخته از یک بازنماییِ درونیابی لاگرانژ به‌دست آمده است که به *فرمول گرانیگاهی*[۱] مشهور و توسط سالتزر در سال ۱۹۷۲ انتشار یافته است [۱۴]:

$$p_n(x) = {\sum_{j=0}^{n}}' \frac{(-1)^j f_j}{x - x_j} \Big/ {\sum_{j=0}^{n}}' \frac{(-1)^j}{x - x_j}$$

به همراه حالت خاص $p_n(x) = f_j$ به‌ازای $x = x_j$. علامت‌های پرایم روی سیگماها نشان‌دهندهٔ این است که جمله‌های $j = 0$ و $j = n$ در $\frac{1}{2}$ ضرب شده‌اند. پیچیدگی محاسباتی، از مرتبهٔ $O(n)$ بر نقطهٔ مقداریابی است و اگرچه ممکن است عمل تقسیم بر $x - x_j$ وقتی $x \approx x_j$ خطرناک به نظر آید، همان‌گونه که نیک هایام در سال ۲۰۰۴ در [۹] اثبات کرده است، این فرمول پایدار است.

افسانهٔ ۳: بهترین تقریب‌ها بهینه‌اند. این یکی با توجه به تعریف، درست به نظر می‌رسد!

> «از آنجا که الگوریتم رِمِز[۲] یا در واقع هر الگوریتم دیگر برای تولید بهترین تقریب‌های اصیل به محاسبات نسبتاً زیادی نیاز دارد، گرایش‌هایی به دیگر فرآیندهای مناسب‌تر برای به‌دست آوردنِ تقریب‌های چندجمله‌ای خوب، اگر نگوییم بهینه، ایجاد شده است.» (۱۹۶۸)
>
> «تقریب‌های چندجمله‌ای مینیمال به‌روشنی برای استفاده در برنامه‌های محاسبهٔ توابع مناسب‌اند، زیرا این یک مزیت است که حتی‌الامکان جمله‌های کمتری در تقریب استفاده شود.» (۱۹۶۸)
>
> «در حالت ایدآل، یک بهترین تقریب یکنواخت می‌خواهیم.» (۱۹۸۰)

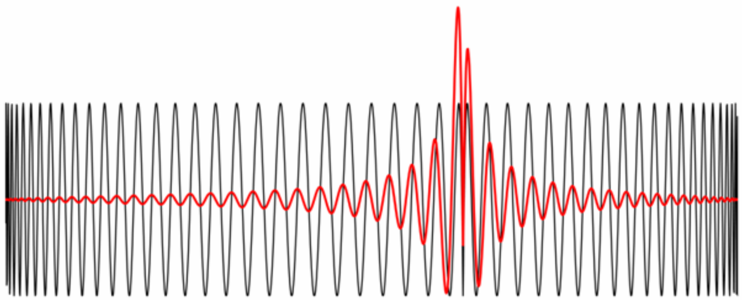
اگرچه بیان این افسانه شبیه *همانگویی* است، مضمونی هم در آن وجود دارد. «بهترین تقریب» نامی رایج برای چندجمله‌ایِ یکتایِ p_n^* است که $\|f - p_n^*\|$ را مینیمم می‌کند. پس بهترین تقریب نسبت به نرمِ ماکزیمم، بهینه است؛ اما آیا واقعاً در عمل هم بهترین است؟

[۱] barycentric formula [۲] Remes algorithm

همان‌طور که اولین نقل قول بالا بیان می‌کند، محاسبهٔ p_n^* موضوعی بدیهی و پیش پا افتاده نیست، زیرا وابستگی آن به f غیرخطی است. در مقابل، محاسبهٔ درونیاب چبیشف با استفاده از فرمول گرانیگاهی ساده است. در اینجا ممکن است دیدگاه نافذی که ارزش هر چیز را با پول می‌سنجد هم به اندیشهٔ ما سَرَک بکشد و فکر کنیم اگر محاسبهٔ بهترین تقریب‌ها سخت است، پس بایستی چیز باارزشی باشد!

دو برداشت، یافتن حقیقت را مشکل می‌کند. اول اینکه اختلاف دقت بین درونیاب‌های چبیشف و بهترین تقریب‌ها نسبت به نرم ماکزیمم نمی‌تواند زیاد باشد، زیرا اِلیش و زیلِر در سال ۱۹۶۶ ثابت کردند [۳] که اختلاف $\|f-p_n\|$ با $\|f-p_n^*\|$ نمی‌تواند بیش از $(۲/\pi)\log(n+۱)+۲$ باشد. معمولاً اختلاف، کمتر از این است و در واقع بهترین کران خطای شناخته شده برای توابعی که ν بار مشتق‌پذیرند یا تحلیلی‌اند–همان دو ردهٔ همواری که در ذیل افسانهٔ ۲ ذکر شد–در مورد درونیاب‌های چبیشف تنها به اندازهٔ ۲ واحد بیش از خطای بهترین تقریب‌ها است.

دوم اینکه بنابر قضیهٔ هم‌نوسانی[۱] که به چبیشف در دههٔ ۱۸۵۰ منسوب است، خطای ماکزیمم بهترین تقریب همیشه در دست‌کم $n+۲$ نقطه در $[-۱,۱]$ رخ می‌دهد. برای مثال، منحنی سیاه رنگ در شکل زیر، منحنیِ خطای $f(x)-p_n^*(x)$ به‌ازای $x\in[-۱,۱]$ برای بهترین تقریبِ تابع $|x-\frac{۱}{۴}|$ از درجهٔ ۱۰۰ است که بین ۱۰۲ نقطهٔ اکسترمم با مقدار تقریبیِ $\pm$۰٫۰۰۲۷ هم‌نوسانی دارد. منحنی قرمز رنگ متناظر با چندجمله‌ای درونیاب p_n روی نقاط چبیشف است. روشن است که برای اکثر مقادیر x مقدار $|f(x)-p_n(x)|$ بسیار کوچکتر از $|f(x)-p_n^*(x)|$ است. کدام‌یک از این تقریب‌ها در عمل مفیدتر است؟ من فکر می‌کنم تنها جواب منصفانه این است که بگوییم: بستگی دارد! گاهی واقعاً نیاز است در مورد بدترین رفتار هم تضمین داشته باشیم. گاهی هم قربانی کردنِ دقت بیشتر از ۹۵٪ از برد برای به‌دست آوردنِ دقتی اندک در یک زیربازهٔ کوچک، اسراف است.



[۱] equioscillation theorem

افسانهٔ۴: مرتبهٔ دقت فرمول گاوس دو برابر فرمول کلنشا-کِرتیس است. فرمول‌های انتگرال‌گیری معمولاً به‌کمک چندجمله‌ای‌ها به‌دست می‌آیند. انتگرال را با یک مجموع متناهی تقریب می‌زنیم:

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx I_n = \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k) \qquad (10)$$

و وزن‌های $\{w_k\}$ با استفاده از اصلِ درونیابیِ f با یک چندجمله‌ای در نقاط $\{x_k\}$ و انتگرال‌گیری از درونیاب، تعیین می‌شوند. فرمول نیوتن-کوتس[1] مبتنی بر نقاط هم‌فاصله، فرمول کلنشا-کرتیس[2] مبتنی بر نقاط چبیشف و فرمول گاوس مبتنی بر نقاط لژاندر است. تقریباً در همهٔ کتاب‌ها ابتدا فرمول نیوتن-کوتس توضیح داده می‌شود که دقیقاً وقتی f یک چندجمله‌ای از درجهٔ n باشد، $I = I_n$ و سپس نشان داده می‌شود که فرمول گاوس، مرتبهٔ دقتش دو برابر این است: اگر f یک چندجمله‌ای از درجهٔ $2n+1$ باشد، آن‌گاه $I = I_n$. فرمول کلنشا-کرتیس معمولاً مطرح می‌شود اما مرتبهٔ دقت آن n است که بهتر از فرمول نیوتن-کوتس نیست.

> «با این حال مرتبهٔ دقت فرمول کلنشا-کرتیس تنها $n-1$ است.» (۱۹۹۷)

> «قاعدهٔ کلنشا-کرتیس بهینه نیست چرا که مرتبهٔ یک فرمول n-نقطه‌ای تنها $n-1$ است که بسیار پایین‌تر از بیشترین مقدار ممکن است.» (۲۰۰۲)

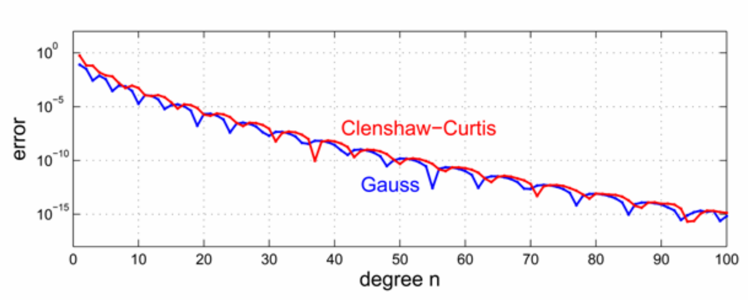
این تأکید زیاد بر مرتبهٔ دقت، گمراه‌کننده است. کتاب‌های درسی می‌گویند دلیل اینکه فرمول گاوس نتایج بهتری نسبت به فرمول نیوتن-کوتس می‌دهد این است که مرتبهٔ دقت آن بیشتر است اما این مطلب صحیح نیست. مشکل فرمول نیوتن-کوتس این است که نقاط انتگرال‌گیری هم‌فاصله‌اند: پدیدهٔ رونگه. در واقع همان‌طور که پولیا در سال ۱۹۳۳ ثابت کرد [۱۲]، در حالت کلی فرمول نیوتن-کوتس حتی اگر f تحلیلی باشد، وقتی $n \to \infty$ همگرا نیست.

فرمول‌های گاوس و کلنشا-کرتیس رفتارهایی کاملاً متفاوت دارند. هر دو روش برای همهٔ انتگرالده‌های پیوسته همگرا هستند و اگر انتگرالده تحلیلی باشد، همگرایی از نوع هندسی است. روش کلنشا-کرتیس با استفاده از تبدیل سریع فوریه[3] یا با استفاده از الگوریتم والدفوگل در سال ۲۰۰۶ [۱۷] به‌سادگی قابل پیاده‌سازی است و اینکه توجه کمتری را به خود جلب کرده شاید یکی از دلایلش این باشد که فرمول گاوس قدمت بیشتری دارد، زیرا در سال ۱۸۱۴ [۵] ابداع شده است نه سال ۱۹۶۰ [۲]. هر دو فرمول کلنشا-کرتیس و گاوس، حتی اگر n چند میلیون باشد، در عمل قابل استفاده هستند. در مورد دومی علت این است که نقاط و وزن‌ها را می‌توان با کمک الگوریتمِ پیاده‌سازی شده در چبفان توسط گلیزِر، لیو و روخلین

[1] Newton–Cotes [2] Clenshaw–Curtis [3] Fast Fourier Transform

[۶] به‌دست آورد (در واقع از زمان کار گلیزر–لیو–روخلین به این سو، دیگر باوری نادرست است که فکر کنیم فرمول گاوس فقط برای مقادیر کوچک n کارایی دارد).

با توجه به مرتبهٔ دقت دو برابر، انتظار داریم فرمول گاوس با سرعت دو برابر نسبت به فرمول کلنشا–کرتیس همگرا شود. ولی چنین نیست! بجز حالتی که f در یک ناحیهٔ بزرگ از صفحهٔ مختلط حول $[-1,1]$ تحلیلی باشد، می‌توان به‌طور نوعی دید که فرمول کلنشا–کرتیس با همان سرعت فرمول گاوس همگرا است. برای مثال، منحنی‌های خطا برای تابع $f(x) = \exp(-1/x^2)$ را به تصویر کشیده‌ایم.



این مشاهده را در قضیه‌ای به سال ۲۰۰۸ موشکافی کرده‌ام. اگر f دارای مشتق νاُم با تغییر کراندار[۱] V باشد، می‌توان نشان داد فرمول گاوس با آهنگ $O(V(2n)^{-\nu})$ همگرا است که در اینجا مضرب ۲ نشان می‌دهد که دقتش دو برابر است. قضیه مدعی است که همان آهنگ $O(V(2n)^{-\nu})$ و همان مضرب ۲ برای فرمول کلنشا–کرتیس هم به‌دست می‌آید. (فولکمار بورنمن (در یک گفتگوی خصوصی) اشاره کرد که احتمالاً هر دوی این آهنگ‌ها را می‌توان به یک توان بیشتر برای n بهبود داد.)

تبیین این نتیجهٔ شگفت‌انگیز منسوب به اُهارا و اشمیت [۱۰] به سال ۱۹۶۸ است. درست است که فرمول گاوس $(n+1)$-نقطه‌ای چندجمله‌ای‌های چبیشف T_{n+1}، T_{n+2}، ... را به‌طور دقیق انتگرال‌گیری می‌کند در حالی که در مورد فرمول کلنشا–کرتیس چنین نیست؛ اما خطایی که فرمول کلنشا–کرتیس برای انتگرال‌گیری از این چندجمله‌ای‌ها تولید می‌کند شامل مستعار نمودن آنها با چندجمله‌ای‌های چبیشف T_{n-1}، T_{n-2}، ... و انتگرال‌گیریِ دقیق از چندجمله‌ای‌های جدید است[۲]. وقتی چنین می‌شود، اختلاف انتگرال‌های T_{n+k} و T_{n-k} فقط $O(n^{-3})$ است که نشان می‌دهد چرا فرمول کلنشا–کرتیس بسیار دقیق‌تر از آن است که مرتبهٔ دقتش نشان می‌دهد.

[۲] فرض کنیم در (۱.۰) انتگرال با $I(f)$ و سیگما با $I_n(f)$ نمایش داده شوند. برای نقاط چبیشف x_j، $0 \leqslant j \leqslant n$، و برای $0 \leqslant k \leqslant n$ می‌توان ثابت کرد $T_{n-k}(x_j) = T_{n+k}(x_j)$. اصطلاحاً می‌گویند T_{n+k} و T_{n-k} نسبت به نقاط x_j مستعار یکدیگرند. به این پدیده *مستعارنمایی* (aliasing) می‌گویند. به‌کمک این رابطه می‌توان ثابت کرد که $I_n(T_{n+k}) = I_n(T_{n-k})$ و با توجه به مرتبهٔ دقت کلنشا–کرتیس، $I_n(T_{n-k}) = I(T_{n-k})$. چون $I(T_j)$ برابر با صفر است اگر j فرد باشد و برابر با $2/(1-j^2)$ است اگر j زوج باشد، نتیجه می‌گیریم $I(T_{n+k}) - I_n(T_{n+k}) = O(n^{-3})$.–م.

[۱] bounded variation

افسانهٔ ۵: فرمول انتگرال‌گیری گاوس بهینه است. شاید فرمول گاوس خیلی بهتر از فرمول کلنشا–کرتیس نباشد، اما به نظر می‌رسد تا حد ممکن دقیق است: یک استاندار طلایی برای فرمول‌های انتگرال‌گیری.

> «دقت وقتی ماکزیمم است که فرمول گاوسی باشد.» (۱۹۸۲)

> «در واقع می‌توان نشان داد در بین همهٔ قاعده‌هایی که از n بار مقداریابی تابع استفاده می‌کنند، قاعدهٔ n–نقطه‌ای گاوسی به احتمال زیاد دقیق‌ترین تخمین را تولید می‌کند.» (۱۹۸۹)

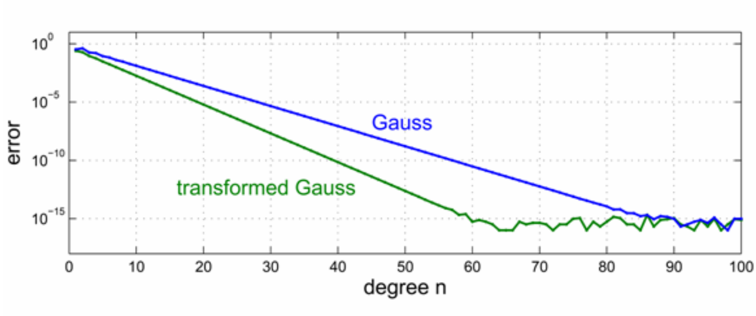
یک بدفهمی دیگر در اینجا وجود دارد که کاملاً با آنچه در افسانهٔ ۴ توضیح داده شد، متفاوت است. فرمول گاوس وقتی بهینه است که با مرتبهٔ دقت چندجمله‌ای اندازه‌گیری شود؛ اما این یک معیار اریب (یک‌طرفه) است.

قدرت چندجمله‌ای‌ها یکدست نیست: آنها در دو انتهای بازه، تفکیک‌پذیریِ[1] بیشتری نسبت به نقاط میانهٔ بازه دارند. برای مثال، فرض کنیم تابع $f(x)$ روی $[-۱,۱]$ تحلیلی باشد به این معنا که می‌توان آن را به‌طور تحلیلی به یک همسایگی $[-۱,۱]$ در صفحهٔ مختلط گسترش داد. در این صورت تقریب‌های چندجمله‌ای f اعم از درونیاب‌های چبیشف یا لژاندر یا بهترین تقریب، با آهنگ هندسی $O(\rho^{-n})$ همگرا هستند که این آهنگ بر اساس اینکه نقاط تکین (قطب‌های) f در صفحه چقدر به $[-۱,۱]$ نزدیک باشند، تعیین می‌شود. به‌طور دقیق‌تر، ρ مجموع طول‌های نیم‌قطر کوچک و نیم‌قطر بزرگِ بزرگترین بیضی با کانون‌های ±۱ است که f در درون آن تحلیلی و کراندار است. اما بیضی در نزدیکی دو نقطهٔ انتهایی لاغرتر از نقطهٔ میانی است. اگر f به‌ازای εی کوچک دارای یک تکینی در نقطهٔ $x_۰ = i\varepsilon$ باشد، آن‌گاه همگرایی با آهنگ $O(\rho^{-n})$ را به‌دست می‌آوریم که $\rho \approx ۱ + \varepsilon$. از سوی دیگر، اگر f در $۱ + \varepsilon$ تکینی داشته باشد، برای پارامتر ρ داریم $\rho \approx ۱ + \sqrt{۲\varepsilon}$ که متناظر با همگرایی بسیار سریع‌تری است. یک تابع که در ۱٫۰۱ تکینی دارد، حدود ۱۴ بار سریع‌تر از تابعی با یک تکینی در $۰٫۰۱i$ همگرا است.

فرمول‌های انتگرال‌گیریِ ساخته‌شده با چندجمله‌ای‌ها شامل هر دو فرمول گاوس و کلنشا–کرتیس، نایکنواختیِ مشابهی را نشان می‌دهند. این امر به نظر اجتناب‌ناپذیر است اما در واقع دلیلی بر لزومِ استخراج فرمول انتگرال‌گیری (۱.۰) از روی چندجمله‌ای‌ها وجود ندارد. با یک تغییر متغیر می‌توان فرمول‌های دیگری مبتنی بر درونیابی با چندجمله‌ای‌های پیوندی[2] ساخت که در مورد بسیاری از توابع، همگرایی آنها تا $\pi/۲$ بار سریع‌تر از فرمول گاوس یا کلنشا–کرتیس است. این ایده در یکی از مقاله‌های من و نیک هِیل [۸] در سال ۲۰۰۸ ارائه شده است و با کار قدیمی‌تری از کُسلُف و تَل–ایزِر [۱۱] در سال ۱۹۹۳ مرتبط است.

---
[1] resolution [2] transplanted polynomials

قضیهٔ زیر برای یکی از روش‌های تبدیلی به‌کار می‌آید که هیل و من پیشنهاد کردیم. فرض کنیم f تابعی باشد که در یک ε-همسایگی $[-۱, ۱]$ به‌ازای $\varepsilon \leqslant ۰/۰۵$ تحلیلی باشد. آن‌گاه در حالی که فرمول گاوس با آهنگ $I_n - I = O((۱+\varepsilon)^{-۲n})$ همگرا است، فرمولِ تبدیل شدهٔ گاوس ٪۵۰ سریع‌تر است: $I_n - I = O((۱+\varepsilon)^{-۳n})$. در اینجا نموداری برای $f(x) = ۱/(۱+۲۵x^۲)$ آورده شده است.



این حقیقت که برخی فرمول‌های انتگرال‌گیری وقتی $n \to \infty$ تا $\pi/۲$ بار سریع‌تر از فرمول گاوس هستند، ممکن است به‌لحاظ عملی اهمیت زیادی نداشته باشد، ولی به‌لحاظ مفهومی مهم است.

افسانهٔ ۶: ریشه‌یابی چندجمله‌ای خطرناک است. آخرین افسانهٔ ما توسط جیم ویلکینسون[۱] (۱۹۱۹–۱۹۸۹) به‌وجود آمده است. او [از نظر شخصیتی] الگوی من بود و دو درس دورهٔ تحصیلات تکمیلی را در استنفورد با او گذراندم. ویلکینسون هنگام کار با آلن تورینگ[۲] روی رایانهٔ پایلوت ایس[۳] در سال ۱۹۵۰ دریافت که تلاش‌ها برای محاسبهٔ ریشه‌های یک چندجمله‌ای حتی از درجهٔ پایین به طرز ناخوشایندی شکست می‌خورند. او این کشف را به‌طور گسترده چاپ و منتشر کرد.

> «هدف اصلی ما در این فصل تمرکز توجه بر محدویت ذاتی شدید در همهٔ روش‌های عددی برای یافتن ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها بوده است.» (۱۹۶۳)

> «هشدار: برخی از چندجمله‌ای‌ها بدوضع هستند.» (۱۹۹۲)

اولین نقل‌قول از کتاب ویلکینسون در مورد خطاهای گرد کردن [۲۰] آمده است. او همچنین عبارت خاطره‌انگیز «چندجمله‌ای سست پیمان[۴]» را برای عنوان مقاله‌ای به سال ۱۹۸۴ ابداع کرد که جایزهٔ شوونه[۵] برای برجسته‌ترین مقالهٔ توصیفی ریاضی[۶] را از آنِ خود کرد. [۲۱]

---
[۱] Jim Wilkinson [۲] Alan Turing [۳] Pilot Ace computer [۴] perfidious polynomial [۵] Chauvenet prize
[۶] outstanding mathematical exposition

آنچه ویلکینسون کشف کرد بدوضعیِ بسیار شدید ریشه‌های چندجمله‌ای‌های مشخصی *به‌عنوان توابعی از ضرایب‌شان* بود. به‌ویژه فرض کنیم یک چندجمله‌ای p_n با ضرایبش به‌شکل

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

مشخص شده باشد. اگر p_n نزدیک دایرهٔ واحد در صفحهٔ مختلط ریشه داشته باشد، هیچ مشکلی پیش نمی‌آید: آنها توابعی خوش‌وضع از ضرایب a_k هستند و می‌توان آنها را به‌طور دقیق با دستور ‘roots’ متلب که مبتنی بر محاسبهٔ مقادیر ویژهٔ یک ماتریس همزاد[1] شامل ضرایب است، محاسبه کرد. با این حال ریشه‌های دور از دایره مانند ریشه‌های درون بازهٔ $[-1,1]$ ممکن است بسیار بدوضع باشند، تا آنجا که عملاً قابل محاسبه نباشند. تک‌جمله‌ای‌های x^k یک پایهٔ به‌طور نمایی بد برای چندجمله‌ای‌ها روی $[-1,1]$ تشکیل می‌دهند.

نقص استدلال بالا این است که چیزی در مورد وضعیت ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها *به‌عنوان توابعی از مقادیرشان* نمی‌گوید. برای در دست داشتنِ یک روش ریشه‌یابیِ کارآمد روی $[-1,1]$ مبتنی بر نمونه‌های نقطه‌ای، تمام آنچه باید انجام داد این است که پایه را ترمیم کنیم: تک‌جمله‌ای‌های x^k که چندجمله‌ای‌های متعامد روی دایرهٔ واحد هستند را با چندجمله‌ای‌های چبیشف $T_k(x)$ که روی این بازه متعامدند، جایگزین کنید. فرض کنید یک چندجمله‌ای p_n با ضرایبش به‌شکل $a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + \cdots + a_n T_n(x)$ مشخص شده است. اگر p_n دارای ریشه‌هایی نزدیک $[-1,1]$ باشد، آنها توابعی خوش‌وضع از ضرایب a_k هستند و می‌توان آنها را به‌طور دقیق با حل یک مسئلهٔ مقدار ویژه شامل یک «ماتریس همکار[2]» محاسبه کرد. جزئیات توسط اِشپخت [۱۵] در سال ۱۹۵۷ و گود [۷] در سال ۱۹۶۱ کشف شده‌اند.

چبفان ریشه‌های تابع f روی بازهٔ $[-1,1]$ را با تقریب آن با یک چندجمله‌ای بیان شده به‌شکل چبیشف و سپس حل یک مسئلهٔ مقدار ویژه با ماتریس همکار، به‌دست می‌آورد و اگر درجه بیشتر از ۱۰۰ باشد، نخست برای تقلیل دادن آن، بازه را به‌طور بازگشتی به زیربازه‌هایی تقسیم می‌کند. این ایده‌ها را جان بوید [۱] در سال ۲۰۰۲ ابداع کرد و کاراییِ فوق‌العاده‌ای دارند. ریشه‌یابیِ چندجمله‌ای نه‌تنها دردسر خاصی ندارد، بلکه وقتی به این سبک مطرح شود، رام‌شدنی‌ترین مسئله در بین همهٔ مسائل ریشه‌یابی به چشم می‌آید، زیرا می‌توانیم این مسئله را به‌طور سرتاسری با تنها $O(n^2)$ عمل محاسباتی برای یافتن تمام ریشه‌ها در یک بازه با دقت بالا حل کنیم.

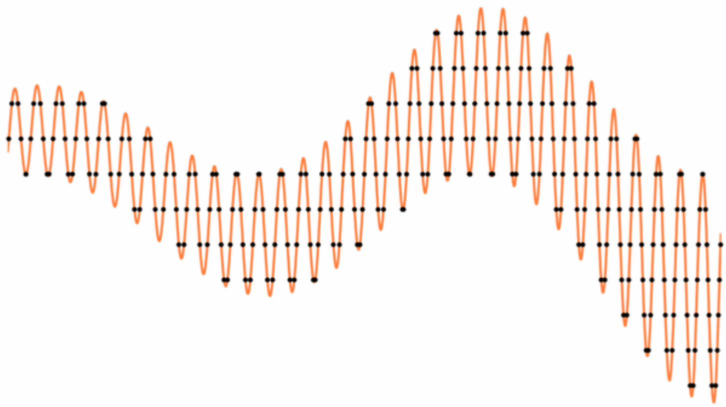
برای مثال، تابع $f(x) = \sin(1000\pi x)$ روی $[-1,1]$ در چبفان با یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۴۰۹۱ تقریب زده می‌شود. یافتن تمام ۲۰۰۱ ریشه در $[-1,1]$ روی لپ‌تاپ من ۲ ثانیه زمان می‌برد و بیشترین انحراف از مقادیر دقیق 4.4×10^{-16} است.

[1] companion matrix [2] colleague matrix

در اینجا تصویرسازی دیگری از کاراییِ ریشه‌یابی چندجمله‌ای‌ها روی یک بازه ارائه می‌شود. در چپفان تابع $f(x) = \exp(x/۲)(\sin(۵x) + \sin(۱۰۱x))$ را رسم و سپس دستور

```
plot(r,f(r),'.') r=roots(f-round(f)),
```

را اجرا کرده‌ایم. این رشته مجموعه‌ای از صدها مسئلهٔ ریشه‌یابی چندجمله‌ای را برای مکان‌یابی همهٔ نقاطی حل می‌کند که f در آنها مقدار صحیح یا نیم‌صحیح می‌گیرد و آنها را با علامت نقطه رسم می‌کند. این محاسبه $\frac{۲}{۳}$ ثانیه زمان می‌برد.



نتیجه‌گیری. بحثم را با اشاره به دیدگاهی دیگر دربارهٔ بدفهمی‌هایی که مطالعهٔ محاسبه با چندجمله‌ای‌ها را تحت تأثیر قرار داده است، به پایان می‌برم. با تعویض متغیر $x = \cos\theta$ می‌توان نشان داد که درونیابی با چندجمله‌ای‌ها روی نقاط چبیشف هم‌ارز با درونیابی توابع متناوب با سری‌های سینوسی و کسینوسی روی نقاط هم‌فاصله است. دومی موضوع آنالیز فوریهٔ گسسته است و نمی‌توان این نکته را نادیده گرفت که در حالی که تردید گسترده‌ای دربارهٔ ایمنی محاسبه با چندجمله‌ای‌ها وجود دارد، هیچ کس در مورد تبدیل سریع فوریهٔ نگران نیست! سرانجام اینکه شاید بزرگترین تفاوت بین درونیاب‌های فوریه و چندجمله‌ای، تفاوت در شهرت آنها باشد.

و این هم یک پاداش، بدون هیچ هزینه‌ای:

افسانهٔ ۷: لاگرانژ درونیابی لاگرانژ را کشف کرد. ویِرینگ [۱۸] در سال ۱۷۷۹ بود که این کار را کرد! اویلر در سال ۱۷۸۳ و لاگرانژ در سال ۱۷۹۵ از این فرمول استفاده کردند.

مراجع

[1] Boyd, J. P., Computing zeros on a real interval through Chebyshev expansion and polynomial rootfinding, *SIAM J. Numer. Anal.*, **40** (5) (2002), 1666–1682.

[2] Clenshaw, C. W., Curtis, A. R., A method for numerical integration on an automatic computer, *Numer. Math.*, **2** (1960), 197–205.

[3] Ehlich, H., Zeller, K., Auswertung der Normen von Interpolationsoperatoren, *Math. Ann.*, **164** (1966) ,105–112.

[4] Faber, G., Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen, *Jahresber. Deutsch. Math. Verein.*, **23** (1914), 190–210.

[5] Gauss, C. F., Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi, *Comment. Soc. R. Scient. Göttingensis Rec.*, **3** (1814), 39–76.

[6] Glaser, A., Liu, X., Rokhlin, V., A fast algorithm for the calculation of the roots of special functions, *SIAM J. Sci. Comp.*, **29** (4) (2007), 1420–1438.

[7] Good, I. J., The colleague matrix, a Chebyshev analogue of the companion matrix, *Quart. J. Math.*, **12** (1961), 61–68.

[8] Hale, N., Trefethen, L. N., New quadrature formulas from conformal maps, *SIAM J. Numer. Anal.*, **46** (2008), 930–948.

[9] Higham, N. J., The numerical stability of barycentric Lagrange interpolation, *IMA J. Numer. Anal.*, **24** (4) (2004), 547–556.

[10] O'Hara, H., Smith, F. J., Error estimation in the Clenshaw–Curtis quadrature formula, *Comp. J.*, **11** (1968), 213–219.

[11] Kosloff, D., Tal-Ezer H., A modified Chebyshev pseudospectral method with an $O(N^1)$ time step restriction, *J. Comp. Phys.*, **104** (1993), 457–469.

[12] Pólya, G., Über die Konvergenz von Quadraturverfahren, *Math. Z.*, **37** (1933), 264–286.

[13] Runge, C., Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten, *Z. Math. Phys.*, **46** (1901), 224–243.

[14] Salzer, H. E., Lagrangian interpolation at the Chebyshev points $x_{n,v} = \cos(v\pi/n)$, $v = 0(1)n$; some unnoted advantages, *Comp. J.*, **15** (1972), 156–159.

[15] Specht, W., Die Lage der nullstellen eines polynoms. III, *Math. Nachr.*, **16** (1957), 363–389.

[16] L. N. Trefethen, *Spectral Methods in MATLAB*, SIAM, Philadelphia, 2000.

[17] Waldvogel, J., Fast construction of the Fejér and Clenshaw-Curtis quadrature rules, *BIT Num. Math.*, **46** (1) (2006), 195–202.

[18] Waring, E., Problems concerning interpolations, *Phil. Trans.*, **69** (1779), 59–67.

[19] Weierstrass, K., Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher funktionen einer reellen veränderlichen, *Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin*, 633–639 and 789–805, 1885.

[20] Wilkinson, J. H., *Rounding Errors in Algebraic Processes*, Prentice-Hall Series in Automatic Computation, Dover, New York, 1994.

[21] Wilkinson, J. H., *The Perfidious Polynomial*, Studies in numerical analysis, Mathematical Association of America, Washington DC, 1984.

داوود میرزایی: دانشگاه اصفهان، گروه ریاضی

تارنما: http://sci.ui.ac.ir/~d.mirzaei

رایانامه: d.mirzaei@sci.ui.ac.ir