Saturiertheit, Homogenität und das Monstermodell

Wir fixieren für den gesamten Vortrag eine Sprache L.

Erinnerung: Eine Menge $\Sigma(\overline{x})$ Formeln ist konsistent mit einer Theorie T, genau dann wenn $\Sigma(\overline{x})$ erfüllbar ist in einem Modell von T, genau dann wenn sie endlich erfüllbar ist in einem Modell von T.

Definition 1. Sei $M \vDash T$ ein Modell von der Theore T. Eine Formelmenge $p(\bar{x})$ von T über $A \subset M$ heißt β-Typ, genau dann wenn es eine mit T maximal konsistente Menge von $L(A)$-Formeln in β freien Variablen ist (d.h. $\phi(\overline{x}) \in p$ oder $\neg\phi(\overline{x}) \in p$ für alle $L(A)$-Formeln $\phi(\overline{x})$ in den β freien Variablen). Ein Typ von M ist ein Typ von $\mathrm{Th}(M, m)_{m \in M}$.
Weiterhin sei

$$tp_M(\overline{a}/A) := \{\phi(\overline{x}) : \phi(\overline{x})\ L(A)\text{-Formel mit } M \vDash \phi(\overline{a})\}$$

der von $\overline{a}$ erzeugte $|\overline{a}|$-Typ. Wir schreiben auch $tp_M(\overline{a})$ für $tp_M(\overline{a}/\emptyset)$.

Beispiel: 0-Typen sind die konsistenten vollständigen Theorien.

Definition 2. Sind M, N Modelle, so ist $f : A \to N$, $A \subset M$ eine partiell elementare Abbildung, falls für jede Formel $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt:

$$M \vDash \phi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow N \vDash \phi(f(a_1), \ldots, f(a_n))$$

Wir schreiben dafür auch $f : \overline{a} \to \overline{b}$, falls $\overline{a}$ und $\overline{b}$ Tupel $(a_i)_{i<\beta}, (b_i)_{i<\beta}$ in M bzw. N sind mit $f(a_i) = b_i$.

Bemerkung: Eine Abbildung $f : a \to b$ ist genau dann partiell elementar, falls $tp_M(a) = tp_N(b)$. Partiell elementare Abbildungen sind injektiv, da für $\phi(x_1, x_2) = (x_1 = x_2)$ gilt

$$N \vDash f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow M \vDash a_1 = a_2$$

Definition 3. Sei κ Kardinalzahl. Ein Modell M heißt κ-saturiert, falls für jedes $A \subset M$ mit $|A| < \kappa$ jeder 1-Typ über A in M realisiert wird. M heißt saturiert, falls es $|M|$-saturiert ist.

Beispiel: $(\mathbb{R}, <)$ ist ω-saturiert, aber nicht $\aleph_1$-saturiert. Denn ist A eine endliche Teilmenge, so beschreibt jeder 1-Typ die Anordnung dieser endlich vielen Parameter bezüglich x (da DLO QE besitzt, ist jede Formel Boolsche Verknüpfung endlich vieler Formeln). Da $\mathbb{R}$ dicht ist, finden wir also ein x, das den Typ realisiert. Sei nun $A = \{\frac{1}{n} : n \in \omega\} \cup \{0\}$ und p ein Typ über A, der die Formeln $\{x < \frac{1}{n} : n \in \omega\} \cup \{x > 0\}$ enthält, so ist p endlich erfüllbar, aber in $\mathbb{R}$ nicht realisiert.

Satz 4. Sei M ein κ-saturiertes Modell, $A \subset M$ mit $|A| < \kappa$ und p ein β-Typ über A für $\beta \leq \kappa$. Dann wird p in M erfüllt.

Beweis. Transfinite Induktion: $\beta = \alpha + 1$: Sei $p_\alpha \subset p$ der α-Typ, in dem in allen Formeln nur die ersten α Variablen frei vorkommen. Nach Induktionsvoraussetzung wird p_α durch ein a_α realisiert. Wir betrachten nun den 1-Typen $p(a_\alpha, x)$ als einen Typen über $A \cup a_\alpha$ (da $|a_\alpha| \leq \alpha < \kappa$ ist $|A \cup a_\alpha| < \kappa$). Nach Voraussetzung wird $p(a_\alpha, x)$ durch ein $a_1 \in M$ realisiert. Nun gilt $M \vDash p(a_\alpha, a_1)$.
β Limeszahl: Nach Induktionsvoraussetzung und Konstruktion existiert eine aufsteigende Folge von Realisierungen a_α von p_α. Nun setze $a = \bigcup_{\alpha<\beta} a_\alpha$. □

Satz 5. Seien M, N Modelle, N κ-saturiert, $|M| < \kappa$ und f eine partiell elementare Abbildung von M nach N . Dann lässt sich f zu einer elementaren Einbettung von M nach N erweitern.
Wir beweisen aber stattdessen:

Satz 6. Seien M, N saturierte Modelle der gleichen Kardinalität κ, $A \subset M$ mit $|A| < \kappa$ und $f : A \to N$ partiell elementare Abbildung von M nach N. Dann lässt sich f zu einem Isomorphismus zwischen M und N erweitern.

Beweis. Seien $M = \{a_\alpha \mid \alpha < \kappa\}, N = \{b_\beta \mid \beta < \kappa\}$ Aufzählungen von M und N. Wir konstruieren induktiv eine aufsteigende stetige Folge von partiell elementaren Abbildungen $f = f_0 \subset f_1 \subset \ldots$ mit $|\mathrm{dom} f_\alpha| < \kappa$, $a_\alpha \in \mathrm{dom} f_{\alpha+1}$ und $b_\beta \in \mathrm{Im} f_{\beta+1}$. Sei f_β bereits konstruiert und setze $B = \mathrm{dom} f_\beta$. Wir betrachten den Typen $p = tp_M(a_\beta/B)$. Durch Ersetzen aller Parameter aus B mit Parametern aus $f_\beta(B)$ erhalten wir einen Typen q von N über $f_\beta(B)$. Da $|f_\beta(B)| = |B| < \kappa$ und N saturiert, existiert ein $b \in N$, das q erfüllt und es gilt $tp_M(a_\beta B) = tp_N(b f_\beta(B))$. Also ist die Abbildung $f_\beta \cup \{(a_\beta, b)\}$ partiell elementar. Setze $g_\beta := f_\beta^{-1} \cup \{(b, a_\beta)\}$ und finde auf die gleiche Weise für b_β ein $a \in M$ mit $g_\beta \cup \{b_\beta, a)\}$ partiell elementar. Setze nun $f_{\beta+1} = g_\beta^{-1} \cup \{(a, b_\beta)\}$. Dann ist

$$\tilde{f} := \bigcup_{\alpha<\kappa} f_\alpha$$

eine partiell elementare Abbildung mit $\mathrm{dom}\tilde{f} = M$ und $\mathrm{Im}\tilde{f} = N$, somit ein Isomorphismus mit $\tilde{f}|_A = f$. □

Korollar 7. Sind M, N saturierte Modelle der gleichen Kardinalität und gilt $M \equiv N$, so ist $M \cong N$.

Beweis. Es gilt $M \equiv N$ genau dann wenn $f : \emptyset \to N$ partiell elementar. □

Korollar 8. Sind M, N elementar äquivalente Modelle, M κ-saturiert und $|N| < \kappa$, so existiert eine elementare Einbettung $f : N \to M$.

Definition 9. Ein Modell M heißt κ-homogen, falls für jedes $A \subset M$, $|A| < \kappa$ und jede partiell elementare Abbildung $f : A \to M$ und jedem $a \in M$ ein $b \in M$ existiert mit $f \cup \{(a, b)\}$ ist partiell elementar. Ein Modell M heißt stark κ-homogen, falls sich jede solche partiell elementare Abbildung $f : A \to M$ zu einem Automorphisus von M fortsetzen lässt.
Ein Modell M heißt (stark) homogen, falls es (stark) $|M|$-homogen ist.

Korollar 10. Ist M κ-saturiert, so ist es κ-homogen.

Korollar 11. Ist M saturiert, so ist es stark homogen.

Beweis. Sei $f : A \to M$ mit $|A| < |M|$ partiell elementare Abbildung. Nach Satz 6 lässt sich f zu einem Automorphismus auf M fortsetzen. □

Im Allgemeinen hängt die Existenz von saturierten Modellen von mengentheoretischen Erweiterungen von ZFC ab, wie ZFC+GCH, BGC oder ZFC+{Existenz klassenvieler stark unerreichbarer Kardinalzahlen}

Lemma 12. Sei κ unendliche Kardinalzahl und M Modell. Dann existiert eine elementare Erweiterung $N \succeq M$, die κ-saturiert ist.

Beweis. OBdA sei κ regulär, sonst betrachte κ^+. Wir bilden eine elementare stetige Kette

$$M = M_0 \preceq M_1 \preceq \dots,$$

wobei alle Typen über Teilmengen $A \subset M_\alpha$ mit $|A| < \kappa$ in $M_{\alpha+1}$ realisiert werden. Wir konstruieren $M_{\alpha+1}$ wie folt: Für neue Konstantensymbole $\overline{c}_p$ ist nach Defintion von Typen die Theorie

$$T' = \mathrm{Th}(M_\alpha, m)_{m \in M_\alpha} \cup \{p(\overline{c}_p) \mid p \text{ Typ von } M_\alpha \text{ über einer Teilmenge } A\}$$

konsistent. Sei nun $M_{\alpha+1}$ ein Modell von T'. So ist es eine elementare Erweiterung von M_α und erfüllt alle Typen über kleinen Teilmengen A. Sei nun

$$N := \bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$$

Dann ist N κ-saturiert: Sei $A \subset N$ mit $|A| < \kappa$ und p ein Typ über A. Da κ regulär, existiert ein $\alpha < \kappa$ mit $A \subset M_\alpha$. Somit wird p in $M_{\alpha+1}$ erfüllt, nach Tarski-Vaught auch in N. □

Satz 13. Sei κ Kardinalzahl, M Modell. Dann ex. eine elementare Erweiterung $N \succeq M$, die κ-saturiert und stark κ-homogen ist.

Beweis. OBdA ist κ wieder regulär. Mit dem Satz vorher konstruieren wir eine elementare stetige Kette $(M_i)_{i<\kappa}$ mit $M = M_0$ und $M_{\alpha+1}$ ist $|M_\alpha|^+$-saturiert. Setze $N := \bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$.
Da alle Typen über allen Teilmengen aus M_α in $M_{\alpha+1}$ realisiert werden, folgt wie im Beweis von Lemma 12, dass N κ-saturiert ist.
Für die starke κ-Homogenität, sei $A \subset N$ mit $|A| < \kappa$ und $f : A \to N$ eine partiell elementare Abbildung und schreibe $B := \mathrm{Im}(f)$. Da κ regulär ist, existiert ein $\alpha_0 < \kappa$ mit $A \cup B \subset M_{\alpha_0}$. Wir konstruieren nun wieder eine aufsteigende stetige Folge von partiell elementaren Abbildungen $f = f_0 \subset f_1 \subset \dots$ mit $M_\alpha \subset \mathrm{dom} f_\beta, \mathrm{Im} f_\beta \subset M_{\alpha+2}$ für ein $\alpha \geq \alpha_0 + \beta > \alpha_0$. Sei also f_β bereits konstruiert, dann ist f_β eine partiell elementare Abbildung zwischen $M_{\alpha+2}$ und $M_{\alpha+3}$. Da $M_{\alpha+3}$ nun $|M_{\alpha+2}|^+$-saturiert ist, existiert nach Satz 5 eine Einbettung $f'_\beta : M_{\alpha+2} \to M_{\alpha+3}$, die f fortsetzt. Sei nun $g_\beta := {f'_\beta}^{-1}$ eine partiell elementare Abbildung von $M_{\alpha+3}$ nach $M_{\alpha+4}$. Aus dem gleichen Grund finden wir wieder eine Fortsetzung $g'_\beta : M_{\alpha+3} \to M_{\alpha+4}$, die g_β fortsetzt. Wir setzen dann $f_{\beta+1} = {g'_\beta}^{-1}$. Nach Konstruktion ist dann

$$\tilde{f} := \bigcup_{\beta<\kappa} f_\beta : N \to N$$

der gesuchte Automorphismus. □

Wir wollen manchmal ein sehr großes Modell mit schönen Eigenschaften haben. Sei also T vollständige Theorie, dann ist ein Monstermodell $\mathfrak{C}$ von T ein κ-saturiertes und stark κ-homogenes Modell für großes κ, größer als jede Kardinalzahl, die wir betrachten werden. Dadurch erhält man:

(a) Jedes Modell M von T mit $|M| < \kappa$ lässt sich nach Korollar 8 elementar in $\mathfrak{C}$ einbetten. Jede elementare Erweiterung kleiner κ von elementaren Unterstrukturen von $\mathfrak{C}$ ist isomorph zu einer elementaren Unterstruktur in $\mathfrak{C}$.

(b) Alle Typen über Mengen A mit $|A| < \kappa$ sind realisiert.

(c) Zwei β-Tupel a, b für $\beta < \kappa$ haben den gleichen Typ über A, d.h $tp_{\mathfrak{C}}(a/A) = tp_{\mathfrak{C}}(b/A)$, genau dann wenn es einen Automorphismus $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ gibt, der a auf b schickt.