Sei $w \in F(S)$ mit $\bar{w} = 1_G$ und sei D min. van Kamp. Diagr. für w. Wir schreiben wieder $V, V^0, V^\bullet, E, E^0, E^\bullet$ etc. Dann gilt wie vorher

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v) \geq 3|V|$$

und daher $|V| \leq \frac{2}{3}|E|$.

Weil jede innere Fläche mind. 7 Kanten hat, und jede innere Kante im Rand von 2 Flächen liegt folgt $2|E^0| \geq 7|F^0|$, d.h. $|F^0| \leq \frac{2}{7}|E^0|$.

Andererseits gilt wegen $V + F = E + 1$

$$|E| + 1 \leq \frac{2}{3}|E| + \frac{2}{7}|E^0| + |F^\bullet|$$

$$(*) \quad \frac{1}{21}|E^0| \leq |F^\bullet| - \frac{1}{3}|E^\bullet| - 1$$

und daher $|F^0| \leq \frac{2}{7}|E^0| \leq 6|F^\bullet|$.

Da $\ell(\partial D) \geq F^\bullet$, folgt nun

$$A(w) = |F| = |F^\bullet| + |F^0| \leq 7|F^\bullet| \leq 7\,\ell(\partial D) = 7|w|.$$

□

Jetzt zeigen wir noch einige Eigensch., die auch für die Modellth. hyp. Gr. wichtig sind.

<u>Satz</u> 3.30 Eine endl. erz. hyp. Gr. hat nur endl. viele Konj.kl. von Elten endl. Ordnung.

<u>Bew</u>: Sei $G = \langle S \mid R \rangle$ hyperb. mit Dehn-Präsent. Sei $g \in G$ endl. Ord., $w \in g^G$ von min. Länge.

Dann ist $w^n = 1_G$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und aus der Dehnpräs. folgt, dass w^n mehr als die Hälfte eines Relators $r = r_1 r_2$ mit $|r_1| > |r_2|$ enth.
~~Wäre r_1 zykl. in w~~ Ist $|r_1| < |w|$, dann ist r_1 zykl. in w enthalten, d.h. $r_1 = uv$ und $w = vtu$. Dann ist $u w u^{-1} = uvt = r_1 t = r_2^{-1} t \in g^G$ und $|r_2^{-1} t| < |w|$. ↯. Daher ist $|w| \leq \max\{|r| \mid r \in R\}$.

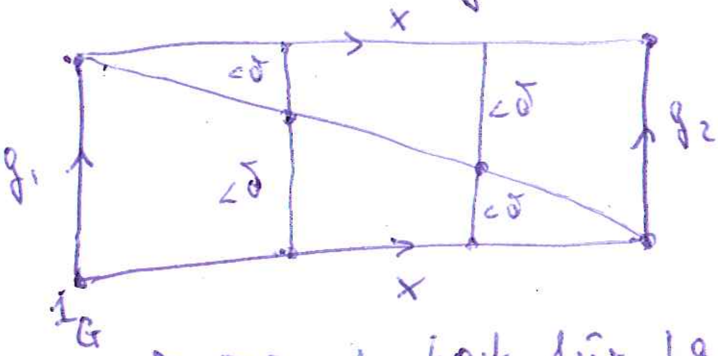
<u>Satz</u> 3.31 Das Konj.heitsproblem ist für hyp. Gr. lösbar.

<u>Bew</u>: Sei G hyp. mit ~~Dehn~~-Präs. $G = \langle S \mid R \rangle$ und seien Dreiecke in $\Gamma_S(G)$ δ-dünn.

<u>Beh</u>: Sind $g_1, g_2 \in G$ konj., dann ex $x \in G$ mit
$|x| < |S|^{2\delta + |g_1|} + |g_1| + |g_2| + 1$ und $g_1^x = g_2$.

Sei x mit $g_1^x = g_2$ und $n = |x|$ min.
Ist $x = y_1 \cdots y_n$, dann setze $x_i = y_1 \cdots y_i$, $y_i \in S^{\pm}$.

Betrachte das geod. Rechteck



Ang. $n > |S|^{2\delta + |g_1|} + |g_1| + |g_2| + 1$

Wegen δ-Dünnh. hat für $|g_1| \leq i \leq n - |g_2|$ das Elt $x_i^{-1} g_1 x_i$ eine Darst. der Länge $< 2\delta$.
Ist n zu groß, dann gibt es $i \neq j$ mit $g_1^{x_i} = g_1^{x_j}$ ↯ n min.

Daher findet man x mit $|x| < \ldots$ und $g_1^x = g_2$, und das Konj.heitsproblem ist entsch.

Beh 2 Für alle R ist $|g^{NR}| \geq R$.

Bew: Ang. es ex R_0, $\varepsilon > 0$ mit $|g^{NR_0}| \leq R_0 - \varepsilon$

Dann sei $s > NR_0$, $s = nNR_0 + R_1$ mit $0 \leq R_1 < NR_0$

und $n \cdot \varepsilon > |g^{R_1}|$. Nun gilt

$$|g^s| \leq |g^{nNR_0}| + |g^{R_1}|$$
$$\leq n(R_0 - \varepsilon) + |g^{R_1}| < nR_0 < \frac{s}{N}.$$

Nun wähle R so, dass $s = P(R) > NR_0$.

Dann ist nach $(*)$ $|g^{P(R)}| > R$, aber $|g^{P(R)}| \leq \frac{P(R)}{N} \leq R$

Nun sei γ der Weg durch $\langle g \rangle$ in X und $x, y \in \gamma$.

Dann ex a, b mit $d(x, g^{aN}) \leq N|g|$ und

$d(y, g^{bN}) \leq N|g|$. Daher ist

$$d_\gamma(x,y) \leq N|b-a||g| + 2N|g| = N(|b-a|+2)|g|.$$

Andererseits ist $d(g^{aN}, g^{bN}) = |g^{N|b-a|}| \underset{\text{Beh 2}}{\geq} |b-a|$

und daher $d(x,y) \geq |b-a| - 2|g|N$.

Es ist $d_\gamma(x,y) \leq N|g|\, d(x,y) + \underbrace{2N^2|g|^2 + 2N|g|}_{=\mu}$,

$$N|g|\, d(x,y) \geq N|g|\,|b-a| - 2|g|^2 N^2$$

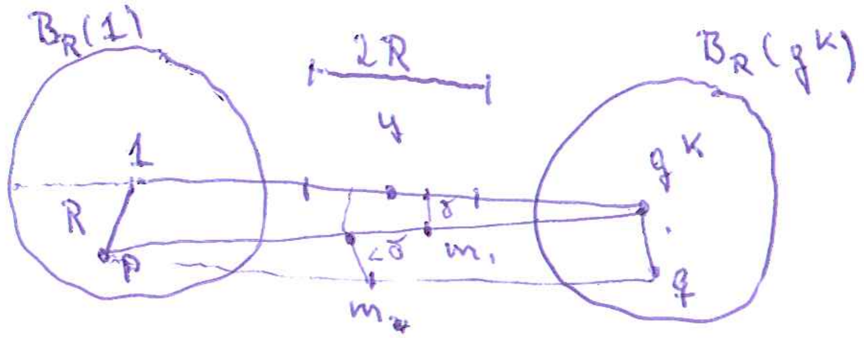
Die Beh. folgt mit $\lambda = N|g|$ und $\mu =$

Satz 3.32 Sei G hyp. mit Cayley-Gph X, $g \in G$ mit unendl. Ord. Dann ist der Weg durch $\langle g \rangle$ in X Quasi-Geod.

Bew: Sei $G = \langle S \rangle$, $X = \Gamma_S(G)$ δ-dünn. Sei $R > 0$ und k so, dass $d(g^k, 1) > 8R + 2\delta$ ~~wegen~~. Sei β Geod. von 1 nach g^k, y der Mittelpkt von β $(\pm \frac{1}{2})$ und $J = \gamma(y-R), y+R)$

Beh: Für $p \in B_R(1)$, $q \in B_R(g^k)$, $m \in [p,q]$ Mittelpkt, ist $m \in B_{2\delta}(J)$.

Bew



Seien $m_1 \in [p, g^k]$, ~~m_2~~ $\in$ [Mittelpkt. Dann folgt die Beh aus δ-Dünnh.

Sei $\frac{1}{2} N = |B_{2\delta}(1)|$. Dann ist $|B_{2\delta}(J)| \le NR$

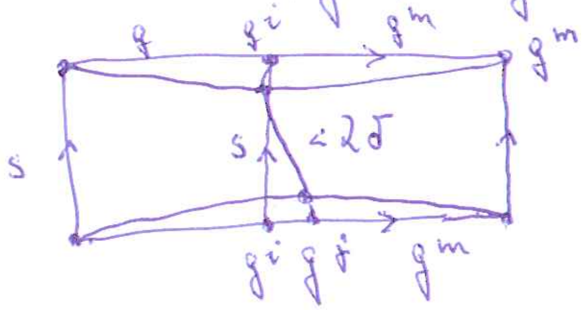
Sei $A = \text{arc}[1, g^k]$ und betrachte die Translate von A unter $1, g, \dots g^{NR}$. Dann sind die Bilder von y pw verschieden und daher ex ein

(*) $P(R) \le NR$ mit $g^{P(R)} \notin B_R(1)$ und daher $g^{P(R)+k} \notin B_R(g^k)$. (Offens. $P(R) \ge R/|g|$.)

Ziel Zentralis. in hyperb. Gr. sind virt. zyklisch.

Satz 3.33 Sei G endl. erz. hyp. Gr., $g\in G$ von unendl. Ord.
Dann ist $C(g)$ virt. zykl., d.h. endl. Erw von $\langle g\rangle$

Bew. Sei $G=\langle S\rangle$, $X=\Gamma_S(G)$ und L so, dass $\forall n\in\mathbb{N}$ Dreiecke in X δ-dünn
$\{g^i \mid i\leq n\}\subseteq B_L[1,g^n]$. Sei $s\in C(g)$ $m\in\mathbb{N}$
mit $d(1,g^m)=|g^m|_S > 8|s|+2\delta$. Dann ist



Dann ex nach dem Beweis von Satz 3.32 Elte p,q auf den Geod. mit $d(p,q)<2\delta$. Dann ex $i\leq j$ mit $s=g^{j-i}u$ und $|u|<2L+2\delta$.

Daher hat jedes $s\in C(g)$ einen Repräs. der Länge $<2L+2\delta$ mod $\langle g\rangle$, d.h. $[C(g):\langle g\rangle]$ ist endlich.

Kor 3.34 Ist G hyperb., $H<G$ ab. mit Elt unendl. Ord.. Dann ist $H\simeq \mathbb{Z}\oplus A$, A endl. ab.

Bew: Für $g\in H$ unendl. Ord. ist $C_H(g)=H$ und die Beh. folgt aus der Str. ab. Gr.

Kor 3.35 Ist G tors. frei hyp., dann sind alle ab. Ugr. von der Form $C(g)=\langle g\rangle$ für geeign. $g\in G$, und die Zentralis. selbstnormalis, d.h. G ist CSA

<u>Bew</u>: Das Argument im Bew von Satz 3.33 zeigt, dass $N(C(g))/\langle g\rangle$ endl. Dann operieren die Elte $h \in N(C(g))$ auf $\langle g\rangle \cong \mathbb{Z}$ durch Autom. endl. Ord. $\Downarrow$ δ-dünn h oper. als Invol.

Ugr. der Form $C(g)$ spielen eine wichtige Rolle in der Untersuchung freier und hyperb. Gr.

Modellth. Eigensch: hyperb. Gr. bilden (innerh. der endl. erz. Gr.) eine elem. Klasse (Sela, Andr)

Gleichungen in freien Gr. (Lyndon)

= qu.-fr. defb. Mengen in fr. Gr.

<u>Rips</u>: Alg. Geom. über Gr.

<u>Sela</u>: Alle nicht-ab. fr. Gr. haben dieselbe elem. Theorie (Tarski-Problem).

Alle defb. Mengen sind $\forall\exists$-defb.

Die Theorie der freien Gr. ist stabil.

§4 Asympt. Kegel und polyn. Wachstum

Satz (Gromov) Eine endl. erz. Gr. von polyn. Wachst. ist virtuell nilp.

Def 4.1 Sei $G = \langle X \rangle$. Dann ist die Wachst.fkt

$$W = W_X : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ von } \Gamma_X(G) \text{ def durch}$$

$$W(n) = |B_n(e)| = \# \{ g \in G \mid |g|_X \leq n \}.$$

Bsp 4.2 (i) $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $X = \{(1,0),(0,1)\}$, $W(n) = 2n^2 + 2n + 1$

(ii) $G = F(X)$, $X = \{a,b\}$, $W(n) = 2 \cdot 3^n - 1$.

Def 4.3 Wir sagen, dass G Wachst.grad $\leq d \in \mathbb{N}$ hat, falls es $c > 0$ gibt mit $W_X(n) \leq c \cdot n^d$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

G hat polynom. Wachstum, falls es Wachst.grad $\leq d$ für ein $d \in \mathbb{N}$ hat und expon. Wachstum, falls $W(n) \geq c^n$ für ein $c > 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir sagen, dass G Wachst.grad fast $\leq d \in \mathbb{N}$ hat, falls $W_X(n) \leq c \cdot n^d$ für unendl. viele $n \in \mathbb{N}$.

Bem 4.4 Der Wachstumsgrad hängt nicht von der Erz.menge X ab.