§4 Asympt. Kegel und polyn. Wachstum

<u>Satz</u> (Gromov) Eine endl. erz. Gr. von polyn. Wachst. ist virtuell nilp.

<u>Def</u> 4.1 Sei $G = \langle X \rangle$. Dann ist die Wachst. fkt

$W = W_X : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ von $\Gamma_X(G)$ def durch

$$W(n) = |B_n(e)| = \#\{g \in G \mid |g|_X \leq n\}.$$

<u>Bsp</u> 4.2 (i) $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $X = \{(1,0),(0,1)\}$, $W(n) = 2n^2 + 2n + 1$

(ii) $G = F(X)$, $X = \{a,b\}$, $W(n) = 2 \cdot 3^n - 1$.

<u>Def</u> 4.3 Wir sagen, dass G Wachst. grad $\leq d \in \mathbb{N}$ hat, falls es $c > 0$ gibt mit $W_X(n) \leq c \cdot n^d$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

G hat <u>polynom. Wachstum</u>, falls es Wachst. grad $\leq d$ für ein $d \in \mathbb{N}$ hat und expon. Wachstum, falls $W(n) \geq c^n$ für ein $c > 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir sagen, dass G Wachst. grad <u>fast</u> $\leq d \in \mathbb{N}$ hat, falls $W_X(n) \leq c \cdot n^d$ für unendl. viele $n \in \mathbb{N}$.

<u>Bem</u> 4.4 Der Wachstumsgrad hängt nicht von der Erz. meng X ab: Allgemeiner gilt:

Sind $\Gamma_S(G)$, $\Gamma_{S'}(G')$ quasiisom., dann

(i) hat G polyn. Wachstum von Grad d gdw G' hat

(ii) expon. gdw G'

Ziel Satz von Gromov

Zutaten:

Satz (Wolf) Endl. erz. nilp. Gr. haben polyn. Wachst.

Satz (Milnor-Wolf) Endl. erz. aufl. Gr. sind entw. virt. nilp. oder sie haben expon. Wachst.

Satz (Tits) Eine endl. erz. Ugr. von $GL_n(\mathbb{C})$ hat entweder eine freie Ugr. von Rg 2 oder ist virt. auflösbar.

Tits-Alternative gilt in anderen Klassen wie z. B.

Gromovs Idee: Gegeben eine Gr. G von polyn. Wachst, finde Einbettung $G \hookrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ für geeign. $n \in \mathbb{N}$ und wende Sätze von Tits und Milnor-Wolf an.

Für die Einbettung $G \hookrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ braucht man Hilbert 5. Problem, die Char. von Lie-Gr.

Gromov konstr. zu einer endl. erz. Gr. G einen lok. cp. vollst metr. zsh und lok. zsh. homog. Raum Y mit $G \hookrightarrow \mathrm{Isom}(Y)$ und nach der Lös. von Hilbert V erhält man eine 'virt. Einbettung' von $G \hookrightarrow GL_n(\mathbb{C})$.

Für die Konstr. von $\mathcal{Y}$ folgen wir van den Dries-Wilkie: Diese benutzen Ultraprod. und Non-stand. Analysis, um $\mathcal{Y}$ zu konstr.

<u>Def</u> 4.5 Sei J eine unendl. Menge. Ein Filter auf J $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(J)$ ist eine Menge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(J)$ mit

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

(ii) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

(iii) $A \in \mathcal{F},\ A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}$.

Ein <u>Ultrafilter</u> auf J ist ein max. Filter, d.h. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(J)$ ist Ultrafilter, falls zusätzl. gilt:

(iv) Ist $A \subseteq J$, dann ist $A \in \mathcal{F}$ oder $J \setminus A \in \mathcal{F}$.

Ultrafilter ex. mit Zorns Lemma (man braucht nur ein schwächeres Axiom als das Ausw. axiom)

Ein Filter $\mathcal{F}$ ist ein <u>Hauptfilter</u> (vgl Hauptideal), wenn es von einer Menge $\emptyset \neq A \subseteq J$ erz. wird, d.h. falls $B \in \mathcal{F}$ gdw $A \subseteq B$.

Ein nicht-Hauptultrafilter enthält keine endl. Menge:

<u>Bsp</u>: Sei $J = \mathbb{N}$, dann ist $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit $A \in \mathcal{F}$ ($A \subseteq J$) gdw $J \setminus A$ endl. ein Filter, der sich mit Zorns Lemma zu nicht-Hauptultrafilter erweitern lässt, $\mathcal{F}$ heißt Fréchet-Filter

Jeder nicht-Hauptultrafilter auf $\mathbb{N}$ enthält $\mathcal{F}$.

Äquiv. zu dieser Def. ist

Def 4.6: Ein Ultrafilter auf einer Menge I ist ein endl. add. Wahrscheinlichkeitsmaß
nicht-Haupt

$$\mu: P(I) \to \{0,1\}.$$

Das Maß ist $\mu(A) = 0$ für $A \subseteq I$ endl.

Daher folgt leicht:

Lemma 4.7: Ist F Ultraf. auf I, $I = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, dann ist $A_i \in F$ für ein $i \leq n$.
Ebenso: Ist $A \in F$, $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, dann ...

Bew: durch Ind. über n.

Um Ultraprod. zu def., sei L eine Familie von Fktn und Rel., z.B. $L = \{+, \cdot, 0, 1, <\}$ mit fester Stelligkeit.
Eine L-Struktur ist eine Menge A mit einer 'Interpretation' der Fktn und Rel. in L, d.h. z.B. mit einer Fkt auf A, die $+: A^2 \to A$, $\cdot: A^2 \to A$ etc.

Wir fix. jetzt eine Sprache L und eine ~~Klasse~~ $\mathcal{S}_L$ von L-Strukturen (z.B. $\mathcal{S}_L$ Klasse der Gr, Körper, ..)

Def 4.8 Sei I eine unendl. Indexmenge, μ ein Ultrafilter auf I und $A_i \in \mathcal{S}_L$ für $i \in I$.
Dann ist das Ultraprod.

$\mathfrak{A}^* = \prod A_i/_{\mu}$ def. als die folgende

L-Struktur:

Elte von $\mathfrak{A}^*$ sind gegeben als Äquivkl. von Elten von $\prod A_i$ mod. $\sim_\mu$:

$(a_i)_{i\in J}, (b_i)_{i\in J} \in \prod A_i$ sind $\sim_\mu$, falls

$\{i \mid a_i = b_i\} \in \mu$

d.h. $(a_i)_J$ und $(b_i)_J$ sind μ-fast überall gleich.

Wegen der Eigenschaften von Ultrafiltern können wir def: Für eine n-st. Fkt $f \in L$ wird f auf $\mathfrak{A}$ wie folgt interpret.

$$f^{\mathfrak{A}}((a_i^1)_\mu, \ldots (a_i^n)_\mu) = (f(a_i^1, \ldots a_i^n))_\mu.$$

Dies ist wohldef., d.h. hängt nicht von den Repräs. $(a_i^1)_J, \ldots (a_i^n)_J$ ab (nach Lemma 4.7).

Für eine n-stel. Rel. $R \in L$ entspr.

$$R^{\mathfrak{A}}((a_i^1)_\mu, \ldots (a_i^n)_\mu) \text{ gdw}$$

$$\{i \mid R^{A_i}(a_i^1, \ldots a_i^n)\} \in \mu.$$

Bsp 4.9 Sei $L = \{0, 1, +, \cdot\}$, K ein Körper als L-Str., $J = \mathbb{N}$, μ ein Nicht-Hauptultraf.

Dann ist $K^* = \prod K/_\mu$ ein Körper.

Genügt z.z.: jedes $(a_i)_\mu \neq 0$ hat multipl. Inverses.

Klar: $K \hookrightarrow K^*$.