Für (*) schreibe $x \in B_e(|g|+r)$ als $x = bc$ mit $|b| \le r$, $|c| \le |g|$. Dann gilt

$$d(\gamma bc, bc) \le d(\gamma bc, \gamma b) + d(\gamma b, b) + d(b, bc)$$
$$= d(\gamma b, b) + 2d(bc, b)$$
$$\le \delta(\gamma, r) + 2|g| .$$

Nun sei $U = U_{K,\varepsilon}$. Dann ex nach vorig. Lemma $s \in S$, $g \in {}^*G'$ mit $|g^{-1} s g| > \varepsilon R$.

Schreibe $g = s_1 \dots s_t$, $s_i \in S$, $t \in {}^*\mathbb{N}$. Für $0 \le i \le t$ setze $g_i = s_1 \dots s_i$, $M_i = \max\{\delta(g_i s g_i, KR) : s \in S\}$, und $C = \max\{|s| : s \in S\} \in \mathbb{N}$.

Dann ist $M_0 < \varepsilon R$ (weil G' triv. auf Y oper.)

$M_t > \varepsilon R$ und

$|M_{i+1} - M_i| \le 2C$ für $0 \le i \le t-1$ nach ob. Beh.

Daher ex $i_0 \in \{0, \dots t\}$ mit $|M_{i_0} - \varepsilon R| \le 2C$. (*)

Setze $\beta = g_{i_0}$. Dann ist $\beta \in {}^*G'$. Für $\gamma \in G'$ ist $\beta^{-1}\gamma\beta$ ein endl. Prod. ~~der~~ Elt. der Form $\beta^{-1}s\beta$, $s \in S$, und jedes $\beta^{-1}s\beta \in G^{(R)}$ nach (*).

Daher folgt $\beta^{-1}G'\beta \subset {}^*G^{(R)}$ und es ex ein $s \in S$ mit $|\delta(\beta^{-1}s\beta, KR) - \varepsilon R| \le 2C$, d.h.

$\sigma := \ell(\beta^{-1}s\beta) \ne id_Y$. Für $|a| \le KR$ gilt

$d(\sigma(a), a) = st(d(\sigma a, a)/R) \le \varepsilon$, also $\sigma \in U$.

$\square$

Die bisherigen Eigenschaften von $Cone(G) = Y$ (d.h. homog., geod., vollst.) hängen nicht vom Wachstum ab. Nun wollen wir zeigen:

(i) Ist $G = \langle X \rangle$ von polyn. Wachstum, dann ist Y lok. cp und endl. dim.

(ii) Ist G von exp. Wachst., dann ist Y nicht lok. cp.

<u>Lemma</u> 4.25 Sei $R_0 \in {}^*\mathbb{R} \setminus Fin$ und $W(R_0) \le c \cdot R_0^d$ für ein $0 < c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$. Dann gibt es (unendl.) $S \le R_0$ s.d. f.a. $i \in \mathbb{N}$, $i \ge 4$, gilt:

$P_i(S)$: Sind $g_1, \dots, g_t \in B_e(S/4)$, $t \in {}^*\mathbb{N}$, $B_{g_j}(S/i)$ pw. disj., dann ist $t \le i^{d+1} \in \mathbb{N}$.

<u>Bew</u>: Ang. nicht, dann gibt es für alle $S \in {}^*\mathbb{R}$ mit $\log R_0 \le S \le R_0$, ein $4 \le i \in \mathbb{N}$ so, dass $P_i(S)$ nicht gilt. Offens. ex. dann eine interne Fkt, die jedem S ein solches min $i \in \mathbb{N}$ zuordnet; das Bild dieser Fkt ist intern und $\subseteq \mathbb{N}$, also endl. $\le k \in \mathbb{N}$. D.h. ~~wir~~ können induktiv und intern eine Folge $i_1, \dots, i_u$, $u \in \mathbb{N}^*$, $k \ge i_j \in \mathbb{N}$ def. und Elte $g(l, j) \in {}^*G$ für $1 \le l \le u$, $1 \le j \le t_l \in \mathbb{N}$ mit $t_l = [i_l^{d+1}] + 1$ s.d. für $l = 1, \dots, u$ gilt

$$g(l,j) \in B_e\left(R_0 / 4 i_1 \cdots i_{l-1} \right) \quad \text{für } 1 \le j \le t_l \quad (*)$$

und $\quad B_{g(\ell,j)}\left(R_0/_{i_1\dots i_\ell}\right) \cap B_{g(\ell,j')}\left(R_0/_{i_1\dots i_\ell}\right) = \emptyset$

$$\text{für } 1 \le j < j' \le t_\ell . \qquad (**)$$

Wir können die Def. der i_ℓ und $g(\ell,j)$ fortsetzen, solange $P_i(R_0/i_1\dots i_{\ell-1})$ nicht gilt, d.h. solange bis $R_0/i_1\dots i_{u-1} \ge \log R_0 > R_0/i_1\dots i_u$.

Setze $T = \{(s_1,\dots s_u) : s_\ell \in \mathbb{N},\ 1 \le s_\ell \le t_\ell,\ \ell = 1,\dots u\}$.

Für $s = (s_1,\dots s_u) \in T$ setze $g_s = g(1,s_1)\, g(2,s_2)\dots g(u,s_u)$.

Dann ist $\quad |g_s| \le \sum_{\ell=1}^{u} |g(\ell,s_\ell)| \underset{(*)}{\le} \sum_{\ell=1}^{u} \frac{R_0}{4 i_1\dots i_{\ell-1}} \le \sum \frac{R_0}{4^\ell} < R_0$

Daher ist $\quad \{g_s \mid s \in T\} \subset B_e(R_0)$.

__Beh__: Für $s \ne s' \in T$ ist $g_s \ne g_{s'}$.

__Bew__: Ist $g_s = g_{s'}$, dann ist für ein $v < u$ mit $s_v \ne s'_v$:

$$g(v,s_v)\dots g(u,s_u) = g(v,s'_v)\dots g(u,s'_u)$$

Also $\quad g(v,s'_v)^{-1} g(v,s_v) = g(v+1,s'_{v+1})\dots g(u,s'_u)\, g(u,s_u)^{-1} \dots g(v,s_v)^{-1}$

Aber nach $(**)$ ist

$$\begin{aligned} R_0/_{i_1\dots i_v} &\le |g(v,s'_v)^{-1} g(v,s_v)| \\ &\underset{(*)}{\le} 2 \sum_{\ell=v+1}^{u} R_0/4 i_1\dots i_{\ell-1} \qquad i_j \ge 4 \\ &\le R_0/_{2 i_1\dots i_v} \left(1 + \sum_{\ell=v+2}^{u} \frac{1}{4^{\ell-v-1}}\right) < \frac{R_0}{i_1\dots i_v} \quad \lightning \end{aligned}$$

Daher ist $\quad |T| \ge \prod_{\ell=1}^{u} i_\ell^{d+1} \underset{\text{Def } u}{>} \left(R_0/\log R_0\right)^{d+1} \underset{R_0 \notin \text{Fin}}{>} c \cdot R_0^d$.

Wegen $|\{g_s \mid s\in T\}| = |T|$, $\{g_s \mid s \in T\} \subseteq B_e(R_0)$ ↯.

<u>Satz 4.26</u> Sei $G = \langle X\rangle$ mit fast Wachst.gd $\leq d \in \mathbb{N}$.
Dann ex $R \in {}^*\mathbb{R}\setminus Fin$, so dass $Cone_\mu^R(G)$ lok. kp von Dim $\leq d+1$ ist.

<u>Def 4.27</u> Sei X ein metr. Raum, $S \subseteq X$, $d \geq 0$. Dann ist das d-dim. <u>Hausdorff-Maß</u> von S def. als

$$H_X^d(S) := \inf\Big\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^d \;\Big|\; \text{es ex. Überd. von } S \text{ mit Bällen von Radius } r_i > 0 \Big\}.$$

Die Hausd.-Dim von S ist def. als

$$\dim_H(S) = \inf\{ d \geq 0 : H_X^d(S) = 0\}.$$

<u>Bew</u> (4.26) Es ex $R_0 \in {}^*\mathbb{R}\setminus Fin$ mit $W(R_0) \leq c \cdot R_0^d$.
Sei $S \in {}^*\mathbb{R}\setminus Fin$ so, dass $P_i(S)$ für alle $i \geq 4$, $i \in \mathbb{N}$, gilt.
Setze $R = S/4$.
<u>Beh:</u> $Cone^R(G)$ ist lok kp von Dim $\leq d+1$.
<u>Bew:</u> Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt nach 4.24:
Sind $g_1, \dots g_t \in B_e(R)$, $t \in {}^*\mathbb{N}$, $B_{g_1}(R/k), \dots B_{g_t}(R/k)$ pw. disj., dann ist $t \leq (4k)^{d+1}$ endl.
Ist t max, dann überdecken die $B_{g_i}(2\cdot R/k)$ ganz $B_e(R)$.
Daher überdecken die Projektionen den abg. Ball $B_{e/\sim}(1)$ in Y, d.h. $B_{e/\sim}(1)$ wird von $(4k)^{d+1}$ vielen Bällen von Radius $2/k$ überdeckt für alle $k \in \mathbb{N}$.
Weil Y ein vollst. metr. Raum ist und homogen, folgt, dass alle Bälle von Radius 1 kp und von