Hausd. Dim $\leq d+1$. Daher ist Y lok cp. $\square$

Wir brauchen noch:

<u>Lemma</u> 4.27 Ist G von exp. Wachstum, dann ist Y niemals lok. cp. (unabh. von R).

<u>Bew:</u> <u>Beh:</u> $\lim W(s)^{1/s}$ existiert

<u>Bew:</u> Sei t fest, $k = [\frac{s}{t}]+1$.

Dann ist $W(s) \leq W(kt) \leq W(t)^k \leq W(t)^{1+s/t}$,

und daher $\limsup W(s)^{1/s} \leq W(t)^{1/t}$.

Daher ist $\limsup W(s)^{\frac{1}{s}} \leq \inf\{W(t)^{\frac{1}{t}}\} \leq \liminf W(s)^{\frac{1}{s}}$

d.h. die Folge konverg. gegen $\inf\{W(t)^{\frac{1}{t}} \mid t \in \mathbb{N}\}$.

Wenn G von exp. Wachst. ist, dann ist $\lim W(s)^{\frac{1}{s}} > 1$.

D.h. es ex $r \in \mathbb{R}$, $r > 1$, s.d. für alle $R \in {}^*\mathbb{R} \setminus \mathrm{Fin}$ gilt

$st(W(R)^{1/R}) = st(W(2R)^{1/2R}) = r$, d.h.

$st((W(2R)/W(R)^2)^{\frac{1}{R}}) = 1$, d.h. $W(2R)/W(R) \in {}^*\mathbb{R} \setminus \mathrm{Fin}$.

Daher kann $B_e(2R)$ nicht mit endl. vielen R-Bällen $B_g(R)$ überdeckt werden, d.h. $B_e(2) \subset Y^{(R)}$ ist nicht kp. $\Rightarrow Y^{(R)}$ nicht lok. cp. $\square$

Nun haben wir folgende Situation:

Sei $G = \langle X \rangle$ endl. erz. Dann gibt es einen metr. Raum $Y = \mathrm{Cone}(G)$, Homom. $\ell: G \longrightarrow \mathrm{Isom}(Y)$ so dass gilt

(i) Y ist homogen

(ii) Y ist zsh. und lok zsh. (Basis aus off. zsh Mengen)

(iii) Y ist vollst. metr. Raum

(iv) Falls $\ell(G) \leq \mathrm{Isom}(Y)$ endl. ist und G keine ab. Ugr. von endl. Index hat, dann gibt es für jede offene Umg. $U \ni id_Y$ ein homom. Bild von $G' = \ker(\ell)$, das U schneidet.

(v) Falls G fast polyn. Wachst. hat, dann ist Y lok cp und endl. dim.

(vi) Hat G exp. Wachstum, dann ist Y nicht lok cp.

<u>Montgomery-Zippin</u> Ist Y lok cp., endl. dim, homog. zsh. und lok. zsh., dann ist $\mathrm{Isom}(Y)$ Lie-Gr. mit endl. vielen Zsh.komp.

<u>Satz</u> 4.28 Sei $Y = \mathrm{Cone}(G)$ lok. cp., endl. dim., G unendl. Dann hat G eine Ugr. H von endl. Index mit $H/N \cong \mathbb{Z}$ für $N \trianglelefteq H$ geeignet.

<u>Bew</u>: Klar, falls G ab. NT von endl. Index. Also o.B.d.A. <u>nicht</u>. Sei $L \leq \mathrm{Isom}(Y)$ die Zsh.komp, die 1 enthält, d.h. L ist zsh. Lie-Gr. von endl. Index in $\mathrm{Isom}(Y)$.

<u>Beh 1</u>: G hat Ugr. H, $|G:H|$ endl., ~~usw $\ell(H)$~~ dass H bel. große homom. Bilder in L hat.

<u>Bew</u>: Klar falls $\ell(G) \subset \mathrm{Isom}(Y)$ unendl (Setze dann $H = \ell(G) \cap \ell^{-1}(L)$.) Sei also $\ell(G)$ endl.
Dann hat $G' = \ker(\ell)$ endl. Index in G. Weil G keine ab. Ugr von endl. Index hat, ex. nach (iv) ein homom. Bild in $\mathrm{Isom}(Y)$ mit Elten bel. nahe an 1_Y, aber $\neq 1_Y$. Weil L eine Liegr.

ist, enthält L keine "kleinen Ugr". (es gibt Umg, die keine $\neq 1$ Ugr enthält).
Daher gibt es für jedes $n \geq 1$ eine Umgeb. $U \ni 1_y$, die keine Elte $\neq 1$ der Ord $\leq n$ enthält.
Daher hat G' bel. große homom. Bilder in $\mathrm{Isom}(y)$.
Weil G' nur endl. viele Ugr von Index $k = |\mathrm{Isom}(y) : L|$ hat, hat eine solche Ugr H bel. große homom. Bilder.

Sei $C = Z(L)$. Dann lässt sich $L/C \hookrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ einbetten mit $n = \dim L$.
Betrachte Homos $H \to L/C$. Wenn alle Bilder beschränkt sind durch q, dann sind die Kerne Ugr von Index $\leq q$ mit bel. großen Bildern in C. Dann ist der Schnitt $K^* = \bigcap_\varphi \ker \varphi$ Ugr. von H mit bel. gr. ab. homom. Bildern. Dann ist K/K' unendl., $K \leq G$ von endl. Index, also endl. erz.. Dann hat K ein homom. Bild $\cong \mathbb{Z}$.

Daher nehmen wir an, dass $H \to L/C \hookrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ bel. große Bilder hat.
(a) die Homom. $H \hookrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ hat bel. gr. endl. Bilder
(b) es gt Hom. $H \hookrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ mit unendl. Bild.

<u>Fall (a)</u> (Jordan) Es ex $q = q(n) \in \mathbb{N}$, so dass jede endl. Ugr von $GL_n(\mathbb{C})$ ab. Ugr. von Index $\leq q$ hat
Dann weiter wie eben.
<u>Fall (b)</u> (Tits) Eine endl. erz. Ugr von $GL_n(\mathbb{C})$ ist virt. aufl. oder enthält freie Ugr. von Rg 2.

Wenn $\varphi(H)$ eine freie Gr. enthält, muss G von exp. Wachstum sein $\overset{\text{\Lightning}}{\downarrow}$ (vi).

Daher ist $\varphi(H)$ (virt.) aufl. und Kommut. gr. von unendl. Index. $\Rightarrow$ Beh.

Satz 4.29 (Gromov) Ist G endl. erz. Gr. mit fast polyn. Wachstum, dann ist G virt. nilp.

Bew: Sei G von Wachst. gr. $\leq d$. Zeige G hat nilp. Ugr. von endl. Index. Induktion über d.

$d = 0 \Rightarrow G$ endl.

Ist G von fast Wachst. grad $\leq d+1$, G unendl., dann können wir nach Satz 4.28 einen surj. Hom. $h: G \to \mathbb{Z}$ finden. Sei $K = \ker h$.

Beh: K ist endl. erz. (von fast Wachst. gr. $\leq d$.)

Bew: Sei $g \in$ ~~[illegible]~~ $h(g) = 1$ und seien $e_1, \ldots e_k \in K$ mit $G = \langle g, e_1, \ldots e_k \rangle$. Setze $g_{mi} = g^m e_i g^{-m}$, $m \in \mathbb{Z}$, $i \leq k$.

Dann ~~[illegible]~~ $K = \langle g_{mi} \mid m \in \mathbb{Z}, i \leq k \rangle$. Sei $i \in \{1, \ldots k\}$.

Für $m > 0$ betrachte $g_{0,i}^{\varepsilon_0} \cdots g_{m,i}^{\varepsilon_m}$, $\varepsilon_i = 0$ oder 1.

Dann gibt es 2^{m+1} Worte über $\{g, e_1, \ldots e_m\}$ von Länge $\leq 2m$. Wegen fast polyn. Wachst. von G ex $m > 0$, so dass $g_{0i}^{\varepsilon_0} \cdots g_{m,i}^{\varepsilon_m} = g_{0i}^{\delta_0} \cdots g_{m,i}^{\delta_m}$, $\varepsilon_m \neq \delta_m$.

Dann ist $g_{m,i} \in \langle g_{0,i} \cdots g_{m-1,i} \rangle$ und daher $g_{m+1,i} \in \langle g_{1i}, \ldots g_{m,i} \rangle$ durch Konj. mit g $\subseteq \langle g_{0i}, \ldots g_{m-1,i} \rangle$.

Durch Ind. erhalten wir $g_{p,i} \in \langle g_{0,i}, \dots g_{m-1,i} \rangle$ für alle $p \geq 0$. Entsprechend für $m \leq 0$.

Daher ist $K = \langle g_{m,i} \mid 1 \leq i \leq k, |m| \leq M \rangle$ für ein $M \in \mathbb{N}$

Beh: K hat fast Wachst. grad $\leq d$.

Bew: Sei $G_X(n) \leq c \cdot n^{d+1}$ für alle $n \in S$, $X = Y \cup \{g\}$.
mit $\langle Y \rangle = K$. Für $n \in S$ seien $g_i \in K$, $i = 1, \dots W_Y[n/2]$
die Elte in K mit $|g_i|_Y \leq [n/2]$.

Dann sind die $n \cdot W_Y(|n/2|)$ - Elte $g_i g^j$, $-|n/2| \leq j \leq \frac{n}{2}$ sind alle versch. und in $B_e(n)$, d.h.

$n \cdot W_Y(|n/2|) \leq W_X(n) \leq c \cdot n^{d+1}$,

d.h. $W_Y |n/2| \leq c \cdot n^d \leq c' \cdot |n/2|^d$ für ein $c' > 0$
(unabh. von n).

Nach Indvoraus. hat K nilp. Ugr K' von endl. Index. O.B.d.A $K' \underset{char}{\trianglelefteq} K$ $\left(\bigcap_{g \in K} K'^{g}\right)$

Setze $G' = \langle K', g \rangle$. Dann ist $K \cap G' = K'$ und

$K \cdot G' = G$. Daher ist $|G : G'| = |K : K'| < \infty$ und

G' ist auflösbar wegen $1 \to K' \to \Gamma' \to \mathbb{Z} \to 0$

und K' nilp.

Milnor-Wolf: Eine aufl. endl. erz Gr. hat entweder exp. Wachstum oder ist virt. nilp.

$\Rightarrow$ G' ist virt. nilp. $\Rightarrow$ G virt. nilp.