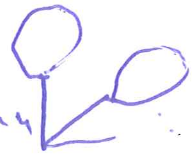
kann zur Summe pos. beitragen.

Wegen $\frac{p}{q} + 2 < q$ ↯.

<u>Lemma</u> 2.19 Ist M zsh, einf. zsh ohne Vertex von Grad 1. Wenn ∂M kein einf. Weg ist, dann hat M mind. zwei äußere Scheiben.



Hierbei heißt $K \subseteq M$ äußere Scheibe, wenn K top. eine Scheibe ist und $\partial K \underset{\text{zsh.}}{\subseteq} \partial M$ ein einf. Zyk

<u>Bew</u> 2.19: Durch Ind. über $m =$ # Flächen in M.

Klar für $m = 1$. Sei nun $m > 1$, $\partial M = e_1 \ldots e_n$ und $\alpha = e_{i_1} \ldots e_{i_k}$ ein kürz. Zykel in ∂M. Weil M keinen Vertex von Grad 1 hat, ist α ein einf. geschl. Weg, daher $\alpha = \partial K$ für eine äußere Scheibe in M. Nun sei J^* so, dass $\partial J^* = \partial M \setminus \alpha$. Dann können wir J^* reduz. so, dass J keinen Vertex von Grad 1 enthält. Nach Indukt. ist entweder ∂J einf (und daher J extr. Scheibe) oder J hat mind. zwei äußere Scheiben, und daraus folgt die Beh. in beiden Fällen.

<u>Satz</u> 2.20 Sei M zsh. einf. zsh (q,p) Karte ohne Vert. von Grad 1 und mit mehr als einer Fläche. Sei $d(D) \geq p$ für alle $D \in M^2$ mit $\partial D \cap \partial M$ ohne Kante. Dann ist

$$\sum_M^* \left[\frac{p}{q} + 2 - i(D)\right] \geq p,$$

wobei die Summe über alle Randfl. von D mit

$\partial D \cap \partial M$ zsh Weg gebildet wird.

Bew: Fall 1: ∂M ist einf. Zykel.

Ind. über $m = \#$ Flächen in M.

Ist $m = 2$, dann ist $i(D_j) = 1$, $j = 1,2$ und die Beh. gilt.

Sei nun $m > 2$. ~~Haben~~ alle Randflächen von M zsh Rand in ∂M, dann folgt die Beh. aus 2.17.

Sei also E Randfläche in M, so dass $\partial E \cap \partial M$ mind. eine Kante und mehr als 1 Zshkomp. enth. Dann hat $M \setminus E$ mind zwei Zsh.komp $C_1, C_2, \ldots$ die mind. eine Fläche enthalten.

Setze $M_1 = C_1 \cup \overline{E}$, $M_2 = C_2 \cup \overline{E}$. Ist nun D Fläche in einem M_j, $j = 1,2$, dann ist $\partial D \cap \partial M_j = \partial D \cap \partial M$ außer ~~für~~ $D = E$.

E ist die einzige Fläche in $M_1 \cap M_2$ und es ist $i_{M_j}(E) \geq 1$. Dann gilt nach Ind vor.

$$\sum\nolimits^{*}_{M_1} \left[\frac{p}{2} + 1 - i(D)\right] + \sum\nolimits^{*}_{M_2} \left[\frac{p}{2} + 1 - i(D)\right] \geq 2p$$

Höchstens E kommt in beiden Summen vor mit $i_{M_i}(E) = 1$. Daher ist

$$\sum_{\substack{M_1 \\ D \neq E}}^{*} \left[\frac{p}{2} + 1 - i(D)\right] + \sum_{\substack{M_2 \\ D \neq E}}^{*} \left[\frac{p}{2} + 1 - i(D)\right] \geq p.$$

Besteht M aus mehreren äußeren Scheiben, dann gilt für jede äußere Scheibe K mit mehr als einer Fläche

$$\sum\nolimits^{*}_{K} \left[\frac{p}{2} + 1 - i(D)\right] \geq p.$$

In K gibt es höchstens eine Randfläche E mit $\partial D \cap \partial K$ zsh, aber $\partial D \cap \partial M$ nicht zsh.

Dann ist $\sum^*_{K, D\neq E} \left[\frac{p}{2}+1-i(D)\right] \geq \frac{p}{2}$.

Ist K eine äußere Scheibe mit nur einer Fläche E, dann ist $\partial E \cap \partial K = \partial E \cap \partial M$ zsh und

$$\sum^*_K \left[\frac{p}{2}+1-i(E)\right] = \frac{p}{2}+1.$$

Daher trägt jede äußere Scheibe mind. $\frac{p}{2}$ zu der Summe $\sum^*_M \left[\frac{p}{2}+1-i(D)\right]$ bei und daraus folgt die Beh.

<u>Kor</u> 2.21 Sei M eine einf zsh., zsh. $(3,6)$-Karte ohne Vert. von Gr. 1 und $d(D) \geq p$ wie vorher. Dann ~~tritt~~ ~~gilt~~ eines der folg. Fälle ein:

(i) M besteht aus genau einer Fläche,

(ii) M enthält mind zwei Randfl. D mit $i(D) \leq 1$

(iii) — " — drei — " — mit $i(D) \leq 2$

(iv) — " — zwei mit $i(D) \leq 2$
+ zwei $i(D) \leq 3$

(v) — " — vier mit $i(D) \leq 3$
+ eine $i(D) \leq 2$

(vi) — " — sechs $i(D) \leq 3$ □

Schreibe $s > \lambda R$, wenn es $r \in R$ gibt mit $r \equiv st$, $|s| > \lambda |t|$.

Satz 2.22 (Greendlingers Lemma) Sei $G = \langle X \mid R \rangle$ eine $C'(\frac{1}{6})$-Gr., $w \in N = \langle R \rangle^{F(X)}$. Dann gilt

(i) $w \in R$ cycl. red.

oder ein zykl. Konj. w' von w erfüllt eines der folgenden Bed.

(ii) zwei disj. Teilw $> \frac{5}{6} R$

(iii) drei $> \frac{4}{6} R$

(iv) zwei $> \frac{4}{6} R$

$+$ zwei $> \frac{3}{6} R$

(v) vier $> \frac{3}{6} R$

$+$ eines $> \frac{4}{6} R$

(vi) sechs $> \frac{3}{6} R$.

Insbesondere ist jede $C'(\frac{1}{6})$-Präsent. eine Dehn-Präsent.

§ 3 Hyperbolische Gruppen

$C(7)$-Gruppen sind 'hyperbolisch', d.h. Baum-ähnlich, s. Aufg 1, Blatt 4.

Def 3.1 Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metr. Räume. Dann heißen X, Y quasi-isometrisch, wenn es Abb $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ und Konst. $\lambda > 0$, $c \geq 0$ gibt so, dass gilt

(i) f.a. $x_1, x_2 \in X$ ist

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d_X(x_1, x_2) + c$$

(ii) f.a. $y_1, y_2 \in Y$ ist

$$d_X(g(y_1), g(y_2)) \leq \lambda d_Y(y_1, y_2) + c$$

(iii) f.a. $x \in X$ ist $d_X(g \circ f(x), x) \leq c$

(iv) $y \in Y$ $d_Y(f \circ g(y), y) \leq c$.

Dann heißt (f, g) Quasi-Isometrie.

Bem: Quasi-Isom. ist Äquiv.rel.

Bsp 3.2: (i) Alle beschr. metr. Räume sind q.i.

(ii) $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{R}^n$ sind q.i.

Eine Eigensch. metr. Räume, die unter ~~für~~ alle Q.I. Räume erhalten bleibt, heißt qu.i. Invariante

Bsp. solcher Eigensch. sehen wir später.

Beschränktheit ist ein solches Bsp.

Def 3.3 Sei (X, d) metr. Raum, (i) $p: [0,1] \to X$ Weg.

Dann heißt p rektifizierbar, wenn das Supr. über alle ~~Part~~ Part. $[0 = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n = 1]$

$$\sum_{i=1}^{n} d(p(t_{i-1}), p(t_i)) \text{ ex.}$$

Wenn das Supr. $l(p)$ ex., heißt $l(p)$ die

Länge von p. Ein metr. Raum (X, d) heißt

Längenraum, wenn für alle $x, y \in X$

$$d(x,y) = \inf \{ l(p) \mid p \text{ rekt. Weg in } X \text{ von } x \text{ nach } y \}$$

(ii) Eine Geodäte (oder geodät. Weg) von x nach y ist eine isom. Einbettung $\gamma : [0, d] \to X$ mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(d) = y$ (und $d = d(x,y)$).

Ein Raum (X, d) heißt geodät., wenn zwischen allen $x, y \in X$ geodät. Wege ex.

Bem: Ein geodät. Raum ist notw. wegzsh. Längenraum, in dem die Infima der Weglängen angenommen werden.

Bsp. 3.4 (i) Riemann'sche Mfkt ...

(ii) Zsh. Gph mit Gphmetrik: Kanten haben Länge 1, Metrik gegeben durch Weglänge

(iii) K n-dim. Simplizialkomplex, in dem jeder n-Simplex als eukl. Simplex mit Kantenlänge 1 aufgefasst wird. Metrik durch Weglänge.

Def 3.5 Sei (X, d) metr. Raum, $w \in X$. Das Gromov-Produkt auf $X \times X$ mit Basis w ist gegeben durch $(x \cdot y)_w = \frac{1}{2} \left(d(x,w) + d(y,w) - d(x,y) \right)$

Bsp. 3.6. Ist X ein Baum, $x, y, w \in X$, dann ist $(x \cdot y)_w$ der Abst. von w zum Verzw.pkt von x, y.