

# Die generische Kurve und ihre Limestheorie

Florian Felix

18. Juni 2020

Wir interessieren uns für die Frage ob Eigenschaften gewisser definierbarer Mengen definierbar sind.

Wir werden uns dabei im Allgemeinen für Körper interessieren und im Speziellen (i.e. in diesem Vortrag) für algebraisch abgeschlossene Körper, d.h. Eigenschaften definierbarer Teilmengen  $X \subset K^n$ , wobei  $K$  algebraisch abgeschlossen.

Dazu reichern wir die klassische  $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$ -Sprache mit einem  $n$ -stelligen Relationssymbol  $C_n$  an und betrachten dann die Theorie, die entsteht, wenn wir  $C_n$  als  $X$  interpretieren.

## Definierbare Eigenschaften

Sei  $T$  eine vollständige Theorie in einer Sprache  $\mathcal{L}$ . und  $M$  ein Modell. Eine Familie uniform definierbarer Teilmengen  $\mathcal{C}$  (z.B. via  $\psi(\bar{x}; \bar{y})$ , wobei  $\bar{x}$  Variablen und  $\bar{y}$  Parametervariablen sind) von  $M^n$  heißt *definierbar*, falls eine Aussage  $\varphi$  existiert, sodass für definierbare Teilmengen  $D \subset M^n$   $D \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (M, D) \models \varphi$ .

## Beispiel

Sei  $T$  streng minimal. Dann ist die Familie definierbarer Teilmengen der Dimension  $d \geq 0$  im Sinne der Prägeometrie definierbar.

### Beweis: Beispiel.

Sei  $D \subset K^n$  also eine definierbare Menge von Dimension  $d$  in Parametern  $\bar{b}$ . Falls  $d = n$ , dann sei  $\psi(x_1, \dots, x_n, \bar{b})$  die definierende Formel für  $D$ . Es gilt dann, da  $T \exists^\infty$  eliminiert

$$(\exists^\infty x_1 \exists^\infty x_2, \dots, \exists^\infty x_n \psi(x_1, \dots, x_n, \bar{b}) \leftrightarrow \varphi(\bar{b}))$$

Das  $\varphi$  ist die gewünschte definierende Formel. Für  $d < n$  erhalten wir eine Disjunktion über  $\binom{n}{d}$  Formeln, genauer jeweils für alle möglichen Wahlen von  $i_1 < i_2 < \dots < i_d$

$$(\exists^\infty x_{i_1} \exists^\infty x_{i_2}, \dots, \exists^\infty x_{i_d} \exists x_J \psi(x_1, \dots, x_n, \bar{b}) \leftrightarrow \varphi(\bar{b})),$$

wobei  $x_J$  die fehlenden Indizes aufzählt. □

# Setting

Wir interessieren uns nicht für allgemeine streng minimale Theorien in diesem Vortrag. Es wird immer  $T = ACF_p$  sein für ein beliebiges aber festes  $p \in \mathbb{P} \cup \{0\}$  und  $K \models ACF_p$ . Die Eigenschaft für die wir uns interessieren ist:

## Zariski-Abgeschlossenheit

Eine (definierbare) Menge  $D \subset K^n$  heißt *Zariski-abgeschlossen*, falls sie abgeschlossen in der Zariski-Topologie ist, i.e. (in diesem Spezialfall) Nullstellenmenge endlich vieler Polynome  $f_1, \dots, f_n \in K[X_1, \dots, X_n]$ .

Die zentrale Frage, die durch Chapuis, Hrushovski, Koiran und Poizat 2002 gelöst wurde ist nun:

### Frage

Ist die Eigenschaft Zariski-abgeschlossene Teilmenge von  $K^2$  zu sein, definierbar?

### Antwort:

Nein, die Limestheorie der generischen Kurven von festem Grad  $d$  wird uns ein Gegenbeispiel liefern.

# Was macht die Kurve generisch?

Wir betrachten ein Polynom von Grad  $\leq d$  in zwei Variablen, also

$$P(x, y) = \sum \alpha_{ij} x^i y^j \text{ mit } i + j \leq d.$$

$P$  heißt *generisch*, falls die  $\alpha_{ij}$  eine algebraisch unabhängige Familie bilden (über dem Primkörper). Die entsprechende definierte Nullstellenmenge ist das, was wir mit *generische Kurve* bezeichnen.

## Theorie der generischen Kurve vom Grad $d$

Die Theorie der generischen Kurve vom Grad  $d$  ist die Theorie eines algebraisch abgeschlossenen Körpers  $K$  von fester Charakteristik  $p \in \mathbb{P} \cup \{0\}$ , zusammen mit einem Prädikat  $C(x, y)$  für die generische Kurve in der Sprache  $\mathcal{L}_{\text{Ring}} \cup \{C(x, y)\}$

Das ist gerechtfertigt, da die Theorie offenbar nur vom Typen der  $\alpha_{ij}$  abhängt, die wie erwähnt algebraisch unabhängig sind.

# Grundbegriffe

Wir haben bereits im Vortrag zu ab-initio  $\delta$ -Funktionen kennengelernt, wenn wir in unserem Setting statt der endlichen Mengen algebraisch abgeschlossene Körper von endlichem Transzendenzgrad betrachten erhalten wir mit der sonst gleichen Definition folgende  $\delta$ -Funktion:

## Definition

In einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $K$  definieren wir auf den algebraisch abgeschlossenen Unterkörpern von endlichem Transzendenzgrad über dem Primkörper  $\delta(k) = \text{trdeg}(k) - \#C$ , also Transzendenzgrad minus Anzahl der Punkt auf der Kurve in  $k$ .

Wir werden uns nur für die Fälle interessieren in denen  $\delta(k) \geq 0$  und nennen die Klasse der algebraisch abgeschlossenen Körper, die dies erfüllen  $\Theta_0$ . Wir nennen dann wie in ab initio  $k$  in  $K$  stark eingebettet, falls es keinen Körper  $k \leq k_1 \leq K$  gibt, sodass  $\delta(k_1) < \delta(k)$ .



# Grundbegriffe

Analog zur Situation in ab initio beweist man:

## Eigenschaften starker Einbettung

**Existenz:**  $k \in \Theta_0$  hat immer eine Erweiterung von endlichem Transzendenzgrad, die stark ist in  $K$ .

**Transitivität:** Ist  $k$  stark in  $k_1$  und  $k_1$  stark in  $K$ , dann ist  $k$  stark in  $K$ .

**Schnitt:** Sind  $k_1, k_2$  stark in  $K$ , dann auch  $k_1 \cap k_2$ .

**Abschluss:** Es existiert immer ein kleinster algebraisch abgeschlossener Körper  $k'$ , der  $k$  enthält und stark in  $K$  ist. Dieser ist gerade der Unterkörper von  $K$ , der  $k$  enthält sodass  $\delta$  minimal wird.

**Limes** Wenn wir eine aufsteigende Folge  $k_0, k_1, \dots$  von algebraisch abgeschlossenen Körpern haben, die jeweils stark im Nachfolger liegen, dann betten sie auch alle stark nach  $K = \cup_{i \in \omega} k_i$  ein.

# Amalgamierung

Ebenso analog definieren wir das freie Amalgam über eine starke Einbettung:

Zunächst seien dafür  $K_1, K_2$  Erweiterungen von  $k$ . Wegen der algebraischen Abgeschlossenheit aller involvierter Körper ist  $k$  algebraisch abgeschlossen in  $K_1$  und  $K_2$ , wir wählen

Transzendenzbasen für beide, machen sie künstlich disjunkt und gehen dann zum algebraischen Abschluss über und erhalten  $K_1 \oplus_k K_2$  - das freie Amalgam.

## Freie Amalgamierung

Sei  $k$  stark eingebettet in  $K_1$  und  $K_2$ , dann ist  $K_1 \oplus_k K_2$  wieder in  $\Theta_0$  und  $k$  stark eingebettet in  $K_1 \oplus_k K_2$

# Reichhaltigkeit

## Definition

Wir können jetzt wieder wie in ab initio (nur statt endliche Strukturen nehmen wir solche von endlichem Transzendenzgrad) eine Struktur  $K \in \Theta_0$  finden, die die Eigenschaft hat:

Falls  $k_1 \leq K$  und  $k_1 \leq k_2$ , dann existiert eine starke  $k_1$ -Einbettung von  $k_2$  in  $K$ , wobei  $k_1, k_2$  von endlichem Transzendenzgrad, alle Körper in  $\Theta_0$  und  $k_1$  stark in  $k_2$

Wir nennen  $K$  dann *reichhaltig*.

Unsere gewünschte Limestheorie  $T$  wird entstehen, indem wir versuchen die reichhaltigen Körper zu axiomatisieren (i.e. die  $\omega$ -saturierten Modelle von  $T$  sind reichhaltig).

# Die Theorie

$T$  besteht aus folgenden Axiomen

## Limestheorie

1. Die Axiome der algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik  $p$ .
2. Für jedes Polynom  $P(u_1, \dots, u_n)$  mit Koeffizienten im Primkörper das folgende Axiom

$$(\forall x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (x_i, y_i) \neq (y_j, y_j) \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq n} C(x_i, y_i) \\ \rightarrow \bigvee_{\epsilon} P(u_{\epsilon 1}, \dots, u_{\epsilon n}) \neq 0$$

wobei  $\epsilon$  jeweils eine der  $2^n$  Funktionen ist, die für alle  $i$  eine der Variablen im Tupel  $(x_i, y_i)$  auswählt.

# Die Theorie

## Limestheorie-Fortsetzung

3. Wir betrachten eine Konjunktion von Polynomgleichungen mit Koeffizienten im Primkörper  $\varphi(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, \bar{z})$ . Da die Dimension definierbar ist existiert wieder für alle Wahlen von  $n$  Variablen  $u_{\epsilon 1}, \dots, u_{\epsilon n}$  (wie oben) eine Formel  $\psi_{\epsilon}(\bar{z})$ , die genau dann gilt, wenn  $\exists \bar{w} \varphi(\bar{w}, u_{\epsilon 1}, \dots, u_{\epsilon n}, z)$  (hier sind  $\bar{w}$  die verbleibenden Variablen) eine generische Teilmenge von  $K^n$  definiert (also eine von voller Dimension). Wir setzen  $\psi(\bar{z}) := \bigvee_{\epsilon} \psi_{\epsilon}(\bar{z})$  und das gewünschte Axiom ist

$$\forall \bar{z} (\exists x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \psi(\bar{z}) \rightarrow \bigwedge_{1 \leq i \leq n} C(x_i, y_i) \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

Zunächst müssen wir prüfen, dass diese Axiome in einem reichhaltigen Körper tatsächlich gelten. Für die ersten beiden ist das klar. Das erste Axiom sagt nur, dass der Körper algebraisch abgeschlossen ist. Für das zweite brauchen wir folgendes berühmtes kombinatorisches Theorem:

### Halls Heiratssatz

Seien  $A_1, \dots, A_n$  Teilmengen einer endlichen Menge  $X$ , die nicht notwendigerweise verschieden sein müssen. Dann existieren  $x_i \in A_i$  mit  $x_i \neq x_j$  für  $i \neq j$  genau dann wenn für alle  $1 \leq m \leq n$  und  $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$  gilt  $|\bigcup_{k=1}^m A_{i_k}| \geq m$ .

Wir beweisen es in einem etwas anderen Fall:

**Satz: Algebraische Hochzeit**

Sei  $K/k$  eine Körpererweiterung von algebraisch abgeschlossenen Körpern. Seien  $A_1, \dots, A_n$  Teilmengen von  $K$  mit endlichem Transzendenzgrad über  $k$  und habe die Vereinigung von  $l$  dieser Mengen mindestens Transzendenzgrad  $l$  über  $k$ , dann kann man  $x_i \in A_i$  wählen, sodass die Familie der  $x_i$  algebraisch unabhängig über  $k$  ist.

Beweis: Die Hinrichtung ist trivial nach Schubfachprinzip.

Die Rückrichtung beweisen wir via Induktion:

Für  $n = 1$  ist nichts zu zeigen.

Also sei  $n > 1$  und  $\{A_1, \dots, A_n\}$  eine Familie, die die Bedingung in der Aussage erfüllen, die wir im Folgenden (H) nennen werden.

Wir nennen eine Unterfamilie von  $l < n$  Mengen *kritisch*, falls ihre Vereinigung genau Transzendenzgrad  $l$  über  $k$  hat.

Es gibt zwei Fälle:

*Es gibt keine kritische Familie:* Dann wähle ein  $x \in A_n$  und betrachte  $X \setminus k(x)^{\text{alg}}$ , sowie  $\{A'_1, \dots, A'_{n-1}\}$ , wobei  $A'_j := A_j \setminus k(x)^{\text{alg}}$ . Da es keine kritische Familie gibt enthält die Vereinigung von  $m$  Mengen der  $A'_j$  mindestens Transzendenzgrad  $m$  über  $k$  hat. Mit Induktionsvoraussetzung existieren dann  $x_j \in A'_j$  mit  $x_j \notin k(x, \{x_j\}_{j \in I \setminus \{i\}})^{\text{alg}}$  und können dann einfach um  $x \in A_n$  ergänzen.



*Es gibt eine kritische Familie:* Nach Umnummerieren können wir annehmen, dass  $\{A_1, \dots, A_l\}$  die kritische Familie ist.

Dann  $\tilde{X} := \cup_{i=1}^l A_i$  mit  $\text{trdeg}(\tilde{X}/k) = l$ . Da  $l < n$  finden wir nach Induktionsvoraussetzung schon algebraisch unabhängige  $x_i \in A_i$  für  $1 \leq i \leq l$ .

Wir betrachten dann die verbleibenden  $A_{l+1}, \dots, A_r$  und wählen  $m$ , dann hat die Vereinigung von  $A_1, \dots, A_l$  und diesen  $m$  Mengen mindestens Transzendenzgrad  $m + l$  über  $k$  nach (H) und damit mindestens Transzendenzgrad  $m$  über  $\tilde{X}$ , das bedeutet (H) gilt für die Mengen:

$$A_{l+1} \setminus k(\tilde{X})^{\text{alg}}, \dots, A_n \setminus k(\tilde{X})^{\text{alg}}$$

Induktion gibt uns auch für diese Familie die passenden  $x_i$  und wir sind fertig.

## Korollar

Die Bedingung, dass  $\delta$  positiv ist, kann auch wie folgt ausgedrückt werden: Für  $n$  verschiedene Punkte  $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$  auf der Kurve können wir  $c_i \in \{a_i, b_i\}$  so wählen, dass  $c_1, \dots, c_n$  algebraisch unabhängig ist.

Beweis: Das folgt direkt aus der algebraischen Hochzeit mit  $A_i = \{a_i, b_i\}$ . Also codiert das zweite Axiom in der Tat nur die Klasse  $\Theta_0$

Es verbleibt zu zeigen, dass das letzte Axiom:

$$\forall \bar{z} (\exists x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \psi(\bar{z}) \rightarrow \bigwedge_{1 \leq i \leq n} C(x_i, y_i) \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

in reichhaltigen Körpern erfüllt wird.

Sei also  $\bar{d}$  eine Lösung von  $\psi$  in  $K$  und sei  $k$  der starke Abschluss des von  $\bar{d}$  erzeugten Körpers. Wir finden in einer Erweiterung von  $k$   $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$  die  $\varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d})$  lösen und mit  $c_1 \in \{a_1, b_1\}, \dots, c_n \in \{a_n, b_n\}$  algebraisch unabhängig über  $k$ . Wir setzen  $k' := k(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)^{\text{alg}}$  und machen  $k'$  zu einem Körper mit Kurve indem wir  $(a_i, b_i)$  auf die Kurve setzen und sonst nur die Punkte, die schon in  $k$  vorhanden waren. Dann ist  $k'$  offenbar weiter in  $\Theta_0$  sowie  $k$  stark in  $k'$  und Reichhaltigkeit von  $K$  erlaubt es uns  $k'$  in  $K$  über  $k$  einzubetten, was die Gültigkeit unseres Axioms zeigt.

# Vollständigkeit

Damit ist unsere Theorie bereits konsistent.

Vollständigkeit folgt nun ganz leicht: Wenn alle  $\omega$ -saturierten Modelle reichhaltig sind, dann ist die Theorie vollständig, da man per back-and-forth für zwei abzählbare reichhaltige Modelle einen Isomorphismus konstruieren kann.

Sei also  $k$  stark in  $K$  und in  $k'$ . Wir sagen  $k'/k$  ist *minimal*, falls es keine Zwischenkörper gibt, die stark in  $k'$  sind. Jede Erweiterung von endlichem Transzendenzgrad zerfällt in einen endlichen Turm minimaler Erweiterung, demnach müssen wir Reichhaltigkeit nur für  $k'/k$  minimal zeigen.

# Vollständigkeit

Sei also  $k'/k$  minimal, dann betrachten wir erst den Fall, dass  $\delta(k) = \delta(k')$ . Diese Situation erhält man zum Beispiel wenn man  $c_1, \dots, c_n$  algebraisch unabhängig wählt und dann zyklisch auf die Kurve setzt, also:

$$(c_1, c_2), (c_2, c_3), \dots, (c_n, c_1)$$

sind genau die Punkte auf der Kurve.

# Vollständigkeit

Seien also

$$(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$$

die Punkte auf der Kurve, die nicht in  $k$  liegen. Dann soll  $\varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d})$  gerade von  $\bar{a} \wedge \bar{b}$ . erfüllt werden. Wir können alle Punkte, die in  $k$  auf der Kurve liegen in  $\bar{d}$  reinschreiben.

In der Tat folgt dann mit unserer algebraischen Hochzeit und da  $k$  stark in  $k'$  eingebettet liegt, dass  $\bar{d}$  die zu  $\varphi$  assoziierte Formel  $\psi$  erfüllt.

Dann finden wir  $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n)$  in  $K$ , die  $\varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d})$  erfüllen.

# Vollständigkeit

Das reicht noch nicht ganz, wir wollen, dass die Punkte zudem paarweise verschieden sind und nicht in  $k$  liegen. Wir fügen der Formel  $\varphi$  neue Bedingungen hinzu von der Form  $(x_i - y_j)y' = 1$ , wobei  $y'$  disjunkt von den bereits vorhandenen Variablen gewählt wird, ergänzen außerdem ein  $x'$  auch disjunkt an das wir aber keine Bedingungen stellen. Das selbe für die Variablen in  $z$ . Wir erhalten eine Formel  $\varphi^*(\bar{x}^*, \bar{y}^*, \bar{z})$  und  $\bar{d}$  erfüllt immer noch die korrespondierende Formel  $\psi(z)^*$ . Die so erhaltenen Punkte  $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_n, \beta_n)$  sind paarweise verschieden und nicht in  $k$ : Aus Stärke in  $K$  folgt, dass der Transzendenzgrad dieses Tupels  $n$  ist, Daher sind dann  $k(\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n)$  und  $k(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$   $k$ -isomorph. Ihre algebraischen Abschlüsse ebenso. Und da  $\delta(k) = \delta(k')$  bleibt der algebraische Abschluss in  $K$  auch stark. Wir erhalten die gewünschte Einbettung.

# Vollständigkeit

Bisher haben wir Saturiertheit noch nicht gebraucht, das kommt jetzt ins Spiel: Die andere Möglichkeit für  $k'/k$  ist, dass  $k'/k$  Transzendenzgrad 1 hat und keine neuen Punkte auf der Kurve hinzukommen: Der Typ der sagt „Ich bin nicht in einem endlichen Tupel  $\bar{x}$  mit  $\delta(\bar{x}/k) \geq 0$ “ ist realisiert in  $K$ , was die Einbettung liefert und den Beweis vollendet.



## Ernte

Wir haben versprochen, dass gezeigt wird, dass Zariski-Abgeschlossenheit nicht definierbar ist:

## Lemma

Ist  $K$  ein Modell von  $T$  und wir entfernen einen Punkt  $(a, b)$  von der Kurve, dann bleibt dies ein Modell von  $T$

Beweis: Die universellen Axiome bleiben damit offensichtlich erhalten. Wir müssen nur das dritte Axiom testen: Das heißt für das Axiom das zu  $\varphi(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, \bar{z})$  assoziiert ist müssen wir nur checken, dass es wahrbleibt wenn wir in der Formel  $C(x, y)$  durch  $C(x, y) \wedge (x, y) \neq (a, b)$  ersetzen.

## Ernte

Dafür nutzen wir einen ähnlichen Trick wie oben durch Hinzufügen neuer Variablen und betrachten die neue Formel die aus Konjunktion mit  $\varphi$  und der Aussage dass alle Variablen in  $\varphi$  nicht dem entfernten Punkt entsprechen entsteht und erhalten eine Formel  $\Psi(\bar{z}, a, b)$  wie im Axiom gewünscht, die für die gleichen  $\bar{z}$  erfüllt ist. Entsprechend bleibt das Axiom erhalten.  $\square$

Der Kern des Ganzen und die Tatsache, dass wir Zariski-Abgeschlossenheit nicht definieren können basiert auf der folgenden Tatsache:

### Satz

Sei  $T_d$  die Theorie der generischen Kurve von Grad  $d$  und sei  $\varphi$  irgendeine Aussage in  $T$ , dann existiert ein  $n \geq 0$ , sodass für alle  $d' \geq n$   $T_{d'} \models \varphi$ .

Der Beweis nutzt algebraische Geometrie und sprengt ein wenig den Rahmen dieses Vortrags. Für die universellen Axiome benutzt man:

### Lemma

Sei  $d = n - 1$ , und eine generische Kurve von Grad  $d$  enthält die Punkte  $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ , dann haben die Koordinaten der Punkte mindestens Transzendenzgrad  $n$ .

# Anmerkungen

Letzteres folgt mit ein wenig Arbeit aus dem Satz von Bézout, der besagt, dass zwei projektive ebene Kurven im zweidimensionalen projektiven Raum, die keine gemeinsamen Komponenten haben so viele Schnittpunkte haben wie das Produkt ihrer Grade mit Multiplizitäten gerechnet.