Prof. K. Tent
Dr. M. Bays

Universität Münster
Wintersemester 2016/2017

Modelltheorie
Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{L}_M = \{1, \cdot\}$ die Sprache der Monoide und $\mathcal{L}_G = \{1, \cdot, ^{-1}\}$ die Sprache der Gruppen.

a) Geben Sie in beiden Sprachen ein Axiomensystem für die Klasse der Gruppen an.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}_G$-Unterstrukturen von Gruppen Gruppen sind, dagegen $\mathcal{L}_M$-Unterstrukturen nicht notwendigerweise. (Das heißt: Die Klasse der Gruppen ist in der Gruppensprache *abgeschlossen bezüglich Unterstrukturen*, in der Monoidsprache dagegen nicht).

c) Ist die Klasse der Integritätsbereiche bzw. die Klasse der Körper abgeschlossen bezüglich Unterstrukturen (in der Ringsprache)?

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, $S \subseteq A$. Betrachten Sie

$$\langle S \rangle^{\mathcal{A}} := \{t^{\mathcal{A}}[s_1, \dots, s_n] \mid t(x_1, \dots, x_n)\ \mathcal{L}\text{-Term},\ s_i \in S\}.$$

a) Zeigen Sie: Wenn $\langle S \rangle^{\mathcal{A}}$ nicht leer ist, dann ist $\langle S \rangle^{\mathcal{A}}$ die kleinste $\mathcal{L}$-Unterstruktur von $\mathcal{A}$, die S enthält (die *von S erzeugte Unterstruktur*).

b) Betrachten Sie die $\mathcal{L}_{\text{ring}}$-Struktur $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, +^{\mathbb{Q}}, 0^{\mathbb{Q}}, 1^{\mathbb{Q}}, -^{\mathbb{Q}}, \cdot^{\mathbb{Q}})$. Beschreiben Sie $\langle \{\frac{1}{2}\} \rangle^{\mathcal{Q}}$.

Aufgabe 3.

a) Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $\sigma \in \operatorname{Aut}(\mathcal{A})$ ein Automorphismus. Zeigen Sie, dass für jede $\emptyset$-definierbare Menge $D \subseteq A^n$ und alle $d \in D$ auch $\sigma(d) \in D$ gilt.

b) Was sind die $\emptyset$-definierbaren Teilmengen von $\mathbb{Q}^1$ in der $\mathcal{L}_{\text{order}}$-Struktur $(\mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}})$?

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, $S \subseteq A$. $\mathcal{L}(S)$ ist die Sprache, die sich ergibt, wenn man jedes Element von S als neue Konstante auffasst. $\mathcal{A}_S$ ist die naturliche $\mathcal{L}(S)$-Struktur, wobei $s^{\mathcal{A}_S} = s$ für alle $s \in S$.
Eine Teilmenge $D \subseteq A^n$ heißt *S-definierbar* in $\mathcal{A}$, wenn D $\emptyset$-definierbar in $\mathcal{A}_S$ ist.

a) Zeigen Sie, dass $\langle S \rangle^{\mathcal{A}} = \langle \emptyset \rangle^{\mathcal{A}_S}$.

b) Was sind die $\mathbb{Z}$-definierbaren Teilmengen von $\mathbb{Q}^1$ in der $\mathcal{L}_{\text{order}}$-Struktur $(\mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}})$?

Abgabe bis Montag, den 31.10., 09:00 Uhr
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: `https://wwwmath.uni-muenster.de/u/baysm/logikII/`