

# PARAMETRES DANS LES CORPS ALGEBRIQUEMENT CLOS

Bruno Poizat<sup>1</sup>

*Les principaux tropes sont l'antonomase,  
la catachrèse, la métaphore, la métonymie et la synecdoque.*

**Abstract.** This paper is an intrusion of Model Theory into Algebraic Geometry, and its author attaches a price to the methods used for the obtention of its results which is perhaps more important than the value of the results themselves. This is reflected in the nature of the questions disseminated in the text.

It studies the correlations between the group of automorphisms of a structure  $S$  definable in an algebraically closed field  $K$  and the group of automorphisms of  $K$ . The parameters necessary for the definition of  $S$ , and some other structures, will play in it an important rôle, as well as the very peculiar properties of the Model Theory of Algebraically Closed Fields.

It begins with a commentary of a result of A.V. Borovik, which was the source of its inspiration, making explicit its dependence on the famous Theorem of Borel and Tits on abstract isomorphisms between algebraic simple groups, considered from a model-theoretic point of view. It finally leads to a description of the automorphisms of finite order of a simple algebraic group (over an algebraically closed field), and of its superstable groups of automorphisms, based on general arguments from Model Theory, demanding only a minimal inspection of the structure of the group; to achieve that, we have to complete a somehow elliptic argument of Altinel, Borovik and Cherlin, in a proof which is nevertheless crucial in their inductive context.

In fact, the Theorem of Borel and Tits is not dependent of the presence of a law of group; it is valid more generally in what we call *autonomous constructible structures*, which are the infinite structures  $S$  definable in an algebraically closed field  $K$ , for which anything which is definable on  $S$  in the language of the field  $K$  is definable (with parameters) in the language of  $S$ . Significant examples of such structures are given by the *multifields*, whose plain definition hides a sophisticated Galois theory in characteristic  $p$ ; in any autonomous constructible structure  $S$ , a multifield is defined without parameters, and controls the automorphisms of  $S$ : the definable automorphisms of  $S$  whose action on the multifield has finite order form a group denoted by  $\text{Aut}(S)$ , which is the largest definable group of automorphisms of  $S$ , and also its largest superstable group of automorphisms. In characteristic zero, the same result is

---

<sup>1</sup> Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard, Mathématiques, bâtiment 101, 43, boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex, France ; poizat@math.univ-lyon1.fr

easy to handle because a unifold, that is a copy  $L$  of the base field  $K$ , is definable in  $S$  without parameters.

When  $S$  is a simple algebraic group  $G$ , such a copy  $L$  exists even in characteristic  $p$ , and  $\text{Aut}(G)$  is the group of geometric automorphisms of  $G$ ; it is the kernel of the action of the automorphisms of  $G$  on the field  $L$ .

**Mots-clés.** Groupes algébriques simples, Théorème de Borel-Tits, Théorie de Galois, internité au sens de Hrushovski

**Classification des sujets.** 03C45, 03C60, 12L12, 20G07

## 0. Introduction

Le but de cet article est d'éclairer les rapports entre les automorphismes d'un corps algébriquement clos  $K$  et ceux d'une structure  $S$  définissable<sup>2</sup> dans  $K$ , quand une copie  $L$  du corps de base  $K$  est définissable dans  $S$ . Nous irons au-delà de la remarque de bon sens qui dit qu'un automorphisme de  $K$  qui fixe les paramètres de la définition de  $S$  induit un automorphisme de  $S$ , et qu'un automorphisme de  $S$  fixant les paramètres nécessaires à la définition de  $L$  induit un automorphisme de ce dernier. Mais il est clair d'emblée que les paramètres intervenant dans les définitions vont être sur le devant de la scène.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, nous commentons le théorème suivant, extrait de BOROVIK 2024, qui a été le déclic à l'origine de la présente étude, tout en me donnant le désir d'affermir la démonstration approximative d'un autre résultat dont Borovik est un co-auteur; ce résultat est crucial dans le contexte inductif de ABC 2008.

**Theorem 3.** *Let  $K$  be an algebraically closed field of characteristic  $p > 0$ , and  $K_\infty$  the algebraic closure of the prime field  $F_p$  in  $K$ . Let  $G$  be a simple algebraic group over  $K$ , and  $G_\infty$  the group of points of  $G$  over  $K_\infty$ . If  $M$  is a subgroup of  $G$  containing  $G_\infty$  and the structure  $(G, M)$  has a finite Morley rank, then  $M = G$ .*

Son énoncé est lacunaire, car  $G_\infty$  n'est déterminé que si on précise une façon de définir  $G$  dans  $K$  (par une formule pour un logicien, par un schéma pour un algébriste) qui ne fait intervenir que des paramètres algébriques. Borovik, citant BOREL 1970, déclare que chaque groupe algébrique simple<sup>3</sup> a une représentation linéaire définie par des équations polynomiales à coefficients entiers; ce résultat, dont la source est le Théorème de la base entière de

---

<sup>2</sup> Par définissable, j'entends définissable avec paramètres, sauf si le contraire est précisé; je ne distingue pas définissable d'interprétable.

<sup>3</sup> Simple a pour nous le sens usuel qu'il a en Théorie des groupes:  $G$  n'est pas commutatif et n'a pas de sous-groupe propre normal. Nous qualifions de quasi-simples les groupes algébriques "simples" au sens géométrique:  $G$  est connexe, son centre  $Z(G)$  est fini, et le quotient  $G/Z(G)$  est simple.

Chevalley, est d'après moi implicite dans la classification de THOMAS 1983 des groupes simples de rang de Morley fini localement finis, qu'il a ensuite étendue aux groupes pseudo-localement finis. Rappelons que le travail de Simon Thomas repose sur la classification des groupes simples finis. La question suivante est un prélude aux arguments développés dans le présent article :

**Question A.** (i) *Peut-on trouver une raison purement modèle-théorique expliquant pourquoi un groupe simple définissable dans un corps algébriquement clos est définissablement isomorphe à un groupe définissable sans paramètres ?*

(ii) *Plus généralement, qu'en est-il des groupes algébriques affines connexes ?*

La démonstration de Borovik repose sur deux ingrédients :

(i) la version modèle-théorique du Théorème de Borel-Tits exposée dans POIZAT 1988 (voir aussi POIZAT 1987, p. 149, et le Corollaire 3.2 à venir), ayant pour conséquence que tout ce qui est définissable à l'intérieur du groupe simple  $G$  au sens du corps  $K$ , quand on considère  $G$  comme un objet définissable dans  $K$ , est définissable (avec paramètres) à partir de la seule loi de groupe de  $G$ .

(ii) le théorème de WAGNER 2001 affirmant que si  $K$  est un corps infini de rang de Morley fini, dans un langage augmenté, possédant un automorphisme définissable non-trivial, son modèle premier est basé sur  $K_\infty$ .

Mais, à la fin de son article, Borovik propose deux démonstrations alternatives, demandant une meilleure connaissance de la structure des groupes algébriques simples ; l'une d'elle réduit le problème au cas où  $G = \mathrm{SL}_2(K)$  ou  $\mathrm{PSL}_2(K)$ , si bien que le Theorem 3 devient alors une conséquence du Théorème 4 de POIZAT 2001, ou de sa généralisation MUSTAFIN-POIZAT 2006, qui décrit les sous-groupes superstables de  $\mathrm{SL}_2(K)$  et de  $\mathrm{PSL}_2(K)$  ; ils n'utilisent pas le Théorème de Wagner, et sont valables en toute caractéristique, si bien que le Theorem 3 est aussi vrai en caractéristique nulle (quand  $K_\infty$  est la clôture algébrique du corps des rationnels). Le Théorème de Borel-Tits reste nécessaire à la démonstration, car il faut être sûr que les groupes radiciels de  $G$  soient définissables dans le groupe  $G$  (ou bien il faut le vérifier à la main).

Nous allons voir bientôt que le groupe  $G_\infty$  est une restriction élémentaire de  $G$  ; mais le Theorem 3 affirme une propriété beaucoup plus forte. Borovik l'utilise sous la forme suivante : si, dans un contexte de rang de Morley fini,  $G$  agit sur un ensemble  $X$ , et si chaque point de  $G_\infty$  normalise un sous-ensemble définissable de  $X$ , ou bien commute avec une fonction définissable de  $X$  dans  $X$ , alors cela a lieu pour tout point de  $G$ .

Dans ce qui suit, nous allons interpréter ce résultat en termes de pure Théorie des Modèles ; nous verrons que le seul fait mathématique sur lequel il repose, de même que le Théorème de Borel-Tits et la description des automorphismes des groupes algébriques simples qu'on en tire, est que tout

corps infini définissable dans un corps algébriquement clos nu<sup>4</sup> est définissablement isomorphe au corps de base (POIZAT 1987, p. 141) : le reste suit de résultats généraux de Théorie des Modèles. Cela conduit à envisager le Théorème de Borel-Tits dans un cadre plus large, dans lequel il n'est pas essentiel que les structures considérées soient des groupes.

## 1. Géomètres et Logiciens

Ce qui est frappant dans l'énoncé du Theorem 3, c'est qu'il confronte des notions de Théorie des Modèles ("le rang de Morley fini") à des notions de Géométrie Algébrique ("les points rationnels d'un groupe algébrique") ; son énoncé est une mixture de Géométrie et de Théorie des Modèles.

Les théoriciens des modèles parlent d'un groupe algébrique comme d'un groupe *définissable*, et non pas *défini*, dans un corps algébriquement clos ; ils le voient marchant au milieu du cortège ( $\eta$  θεωρία !) formé par ses restrictions et ses extensions élémentaires ; ils s'immergent volontiers dans un domaine universel très saturé. Un point de vue très proche du leur est celui de WEIL 1948, qui nous apparaît a posteriori comme une étude fine de la Théorie des Modèles des corps algébriquement clos ; elle conforte l'impression que la Théorie des Modèles de la fin du siècle dernier est l'héritière de la Géométrie Algébrique des années cinquante.

Après Weil s'est développée une tendance à introduire les groupes algébriques non pas comme des groupes, mais comme des schémas de groupe, ayant des points rationnels sur n'importe quel anneau intègre  $A$  contenant les paramètres nécessaires à sa définition : les points rationnels sur  $A$ , eux, forment un groupe<sup>5</sup>. Une possibilité est donnée par les sous-fermés de Zariski de groupes linéaires  $GL_n$ , mais ce n'est pas la seule ; à ce propos, il semble que, dans ses premiers travaux, Zil'ber n'a en vue que ces groupes algébriques affines, ce qui n'est pas bien gênant quand on parle de groupes simples<sup>6</sup>.

Le théoricien des modèles rejoint le géomètre en considérant les objets définissables dans un corps (nu) algébriquement clos  $K$ , associés à une formule  $\varphi$  du langage des corps à paramètres dans  $K$  ; ils ont été qualifiés de *constructibles* par Chevalley ; si  $L$  est un corps algébriquement clos étendant  $K$ , c'en est une extension élémentaire, et la formule  $\varphi$  définit sur  $L$  un objet ayant les mêmes propriétés du premier ordre que son ancêtre dont les points sont dans  $K$  ; de plus, toute bijection de graphe constructible entre deux objets

---

<sup>4</sup> Nous voulons dire par là que le langage dans lequel le corps se présente est réduit au pur langage des corps ; pour nous, si rien d'autre n'est spécifié, un "corps de rang de Morley fini" peut être une structure de langage plus étendu.

<sup>5</sup> Il est piquant de rappeler qu'un algébriste comme Borovik est l'auteur d'une tentative de caractériser la finitude du rang de Morley d'un groupe sans sortir de ce dernier (BOROVIK 1984), qui a été finalisée dans POIZAT 1987.

<sup>6</sup> Car on sait que le quotient d'un groupe algébrique connexe par son centre est affine (POIZAT 1987, p. 147), soit encore linéaire.

constructibles dans  $K$  s'étend à leurs descendants dans  $L$ , ce qui fait que les théoriciens des modèles ont eux-aussi une vision schématique de l'existence.

Si on fixe le schéma, c'est-à-dire la définition, l'extension du corps de base capture bien toutes les extensions élémentaires du groupe. Mais ça ne marche pas dans l'autre sens, d'abord parce que la restriction du corps de base n'est possible que si elle contient les paramètres intervenant dans la définition choisie pour le groupe, et ensuite parce que, si on veut décrire par une restriction du corps toutes les restrictions élémentaires du groupe, il faut considérer toutes ses définitions possibles.

Une autre différence est que les variétés des géomètres sont des objets constructibles très particuliers, pour que leurs points rationnels sur n'importe quel anneau se comportent décentement. Les théoriciens des modèles, eux, manipulent aisément des objets plus généraux, mais doivent payer le prix de n'avoir pour domaine de base que des anneaux qui sont des corps algébriquement clos (ou bien des corps dont ils maîtrisent les propriétés du premier ordre, comme les corps réel-clos).

Ils ont tendance à identifier des objets définissablement isomorphes. Par exemple, le groupe  $SL_3$  est formé des matrices carrées d'ordre 3 dont le déterminant vaut 1 : cette définition est limpide à tout point de vue ; le groupe  $PSL_3$  est défini communément comme étant le quotient de  $SL_3$  par son centre, formé des matrices diagonales associées aux racines cubiques de l'unité. Le théoricien des modèles admet sans états d'âme que  $PSL_3(\mathbb{R})$  est le même<sup>7</sup> groupe que  $SL_3(\mathbb{R})$ , tandis que pour un géomètre il s'agit plutôt des points réels de deux schémas distincts.

Deux objets isomorphes ne sont pas identiques (bien qu'ils aient beaucoup de propriétés en commun !), et il faut se préoccuper de la nature de leur isomorphie avant de les identifier : cette philosophie est à la base du Théorème de Borel-Tits.

Bien que le rang de Morley soit une traduction au niveau constructible de la dimension géométrique, les hypothèses du Theorem 3 sont modèlles-théoriques, car le groupe  $M$  de l'énoncé n'a a priori rien d'algébrique ; il satisfait cependant une condition de nature géométrique, celle de contenir le groupe  $G_\infty$  ; le théoricien des modèles rejoint le géomètre en déterminant  $G_\infty$  par le choix nécessaire d'une formule à paramètres algébriques interprétant  $G$  dans le corps de base. Quand il énonce cette condition, quel que soit le point-de-vue adopté, l'énoncé du Theorem 3 ne parle pas d'un groupe, mais d'une façon de définir un groupe.

On comprend que cette différence d'approche ne facilite pas la communication entre la Géométrie et la Logique, ce qu'on me permettra d'illustrer par une anecdote. En 1983, à Bombay, j'ai demandé à Jean-Louis Colliot-Thélène s'il était bien connu que le seul corps constructible était le corps

---

<sup>7</sup> Il ne l'est pas tout-à-fait : c'est le quotient de  $SL_3(\mathbb{R})$  par son sous-groupe réduit à l'unité.

de base ; comme je ne savais pas à l'époque que les groupes constructibles étaient constructiblement isomorphes aux groupes algébriques<sup>8</sup>, je lui parlais d'un corps dont le groupe additif comme le groupe multiplicatif étaient des groupes algébriques. Il fallut de longues et pénibles explications pour que la lumière se fît : "Ah, tu veux dire un schéma en anneau dont les points rationnels sur un corps algébriquement clos forment un corps !" Gopal Prasad, également présent sur les lieux, fut beaucoup plus pragmatique : "Let us see! What can be the additive group of the field? It is certainly not an abelian variety ... "

Le fossé s'est élargi après l'intervention de Grothendieck<sup>9</sup>.

## 2. Une reformulation du Theorem 3

Pour mieux analyser le résultat de Borovik, nous le généralisons très légèrement, et nous en offrons une démonstration qui s'appuie directement sur le Théorème de Wagner, ce qu'évite Borovik qui préfère n'utiliser que la notion de "bon tore" qui en dérive (voir ABC 2008, p. 50).

Notre énoncé distingue la structure  $(G, M)$  formée du groupe algébrique  $G$  muni de sa loi de groupe, ainsi que d'un prédicat représentant son sous-groupe  $M$ , de la structure plus forte  $(K, G, M)$  formée du corps de base  $K$  et de la relation décrivant  $M$  comme sous-groupe de  $G$  (lequel est définissable dans  $K$ ).

**Théorème 2.1.** *Considérons un groupe algébrique infini  $G(K) = G$  sur un corps algébriquement clos  $K$  de caractéristique  $p$ , où  $G(\ )$  est une formule du langage des corps à paramètres algébriques, définissant l'ensemble sous-jacent à  $G$  et sa multiplication, et un sous-groupe  $M$  de  $G(K)$  contenant  $G(K_\infty)$ , où  $K_\infty$  est le corps des nombres algébriques en caractéristique  $p$ .*

(i) *Si la structure  $(K, G, M)$  a un rang de Morley fini, alors  $M = G$ .*

(ii) *Si  $G$  est simple et la structure  $(G, M)$  a un rang de Morley fini, alors  $M = G$ .*

**Démonstration.** (i) Comme les paramètres de la formule  $G(\ )$  sont algébriques, il existe une puissance non triviale  $\sigma$  de l'automorphisme de Frobenius du corps  $K$ , associant  $x^p$  à  $x$ , qui induit un automorphisme  $\sigma^*$  de  $G$ ; l'intersection  $\Gamma$  de toutes les images de  $M$  par les puissances de  $\sigma^*$ , positives ou négatives, est celle d'un nombre fini d'entre elles, si bien qu'elle est définissable dans  $(K, G, M)$ . On observe que  $G(K_\infty)$  est préservé par  $\sigma^*$ , et inclus dans  $\Gamma$ .

<sup>8</sup> Résultat exposé dans POIZAT 1987, p. 141 ; lui sont associés les noms de Weil, van den Dries et Hrushovski. J'ai reçu à son propos une intéressante lettre d'Alexandre Grothendieck, dont je tiens la copie à la disposition de mes lecteurs.

<sup>9</sup> C'est ainsi que j'ai averti un étudiant courageux qui voulait lire le SGA et les EGA comme un préliminaire à toute entreprise de travaux sur les groupes de rang de Morley fini : "Vous verrez que vous aurez du mal à comprendre ce qu'ils appellent une courbe." Olivier Chapuis, qui assistait à l'entretien, a ajouté : "Oh non, la vraie difficulté est de comprendre ce qu'ils appellent un point !"

Maintenant on oublie  $M$  : la structure  $(K, G, \Gamma)$  n'est rien d'autre qu'un corps enrichi de rang de Morley fini, admettant  $\sigma$  comme automorphisme. D'après le théorème de Wagner rappelé ci-dessous, son modèle premier est porté par  $K_\infty$  ; donc  $\Gamma = G$ .

(ii) Si  $G$  est simple, d'après la version modèle-théorique du Théorème de Borel-Tits décrite dans la section suivante,  $(K, G, M)$  est de rang de Morley fini si et seulement si  $(G, M)$  l'est (Corollaire 4.6). **Fin**

**Théorème de Wagner sur les corps** (WAGNER 2001). *Soit  $K$  un corps infini de rang de Morley fini, de langage possiblement enrichi ; alors :*

- (i) *le modèle premier de la théorie de  $K$  est la clôture algébrique modèle-théorique de l'ensemble vide ;*
- (ii)  *$K$  élimine les imaginaires ;*
- (iii) *si de plus la structure enrichie  $K$  a un automorphisme définissable non trivial, alors son modèle premier est porté par la clôture algébrique algébrique de l'ensemble vide, c'est-à-dire  $K_\infty$ .*

Nous appelons *corps de Wagner* un corps (enrichi) satisfaisant (iii) ; sa caractéristique est un nombre premier  $p$ , car le corps des invariants de l'automorphisme doit être fini. Observons que son langage ne peut nommer qu'un nombre fini de paramètres, tous algébriques ; on ne sait pas s'il existe des corps de Wagner autres que les corps nus avec un nombre fini de paramètres algébriques nommés.

La problématique sous-jacente au résultat de Borovik se résume à la question suivante : *si  $G$  est un groupe algébrique, sur un corps  $K$  algébriquement clos, et  $M$  est un sous-groupe de  $G$ , à quelles conditions les structures  $(G, M)$  ou  $(K, G, M)$  restent-elles de rang de Morley fini ?*

Par exemple, si la caractéristique de  $K$  est  $p$ , et si  $M$  est un sous-groupe propre divisible du groupe multiplicatif  $K^*$  contenant sa torsion,  $(K^*, M)$  est de rang de Morley deux, tandis que le rang de Morley de  $(K, K^*, M)$  est infini. C'est une conséquence du Théorème de Wagner : comme  $K^*$  n'a pas de  $p$ -éléments, si  $(K, K^*, M)$  est de rang de Morley fini  $M$  est uniquement  $p$ -divisible, et l'automorphisme de Frobenius est un automorphisme de  $(K, K^*, M)$ . D'ailleurs, d'après WAGNER 2003, il est très peu probable qu'on puisse trouver un sous-groupe propre infini  $M$  de  $K^*$  tel que le rang de Morley de  $(K, K^*, M)$  soit fini.

En caractéristique nulle, BHMPW 2009 ont construit un sous-groupe sans torsion  $M$  de  $K^*$  tel que  $(K, K^*, M)$  soit de rang de Morley deux, et CAYCEDO-HILS 2015 l'ont fait en incorporant à  $M$  de la torsion divisible arbitraire.

Du côté additif, en caractéristique nulle il est clairement impossible d'obtenir un sous-groupe  $M$  additif non trivial en gardant  $(K, K^+, M)$  de rang de Morley fini. Par contre, BMPZ 2007 ont construit un exemple de rang deux en caractéristique  $p$ .

ROCHE 2017 a ajouté des sous-groupes non-algébriques à des variétés abéliennes tout en préservant la finitude du rang.

Comme notre savoir-faire en la matière se limite aux groupe commutatifs, il est tentant de poser la question suivante, à laquelle MUSTAFIN-POIZAT 2007 apporte une réponse positive si  $G = \mathrm{SL}_2(K)$  ou  $\mathrm{PSL}_2(K)$ .

**Question B.** Soit  $M$  un sous-groupe du groupe algébrique  $G$ , sur un corps algébriquement clos  $K$ , tel que  $(K, G, M)$  soit de rang de Morley fini ; peut-on trouver des sous-groupes  $A_1, \dots, A_n$  de groupes algébriques commutatifs tels que  $(K, M)$  et  $(K, A_1, \dots, A_n)$  soient bi-interprétables ?

**Théorème 2.2.** Le Théorème 2.1.(ii) est aussi valable en caractéristique nulle (si  $K_\infty$  représente la clôture algébrique du corps des rationnels).

**Démonstration.** Comme je l'ai dit dans l'introduction, c'est une conséquence de la démonstration alternative de Borovik pour son Theorem 3. **Fin**

### 3. Le Théorème de Borel-Tits et la théorie des modèles des groupes algébriques simples

Un groupe algébrique infini simple  $G$ , sur un corps algébriquement clos  $K$ , a des propriétés modèle-théoriques très particulières, qui tiennent aux quatre faits suivants :

(i)  $G$  a un sous-groupe de Borel non nilpotent, et en conséquence on peut définir à l'aide de sa seule loi de groupe un corps infini  $L$  ; c'est un fait très basique pour un algébriste (voir ABC 2008, p. 118), mais on peut aussi l'obtenir à partir de la pseudo-locale finitude de  $G$  (un contre-exemple minimal serait un mauvais groupe).

(ii) Comme nous l'avons dit, ce corps  $L$  est isomorphe au corps de base  $K$ , par un isomorphisme  $\sigma$  entre  $K$  et  $L$  qui est définissable dans  $K$  ; la construction de  $\sigma$  demande une familiarité minimale avec la Géométrie Algébrique, essentiellement pour montrer que le produit semi-direct de  $L^+$  par  $L^*$  est un groupe algébrique affine.

(iii) D'après le premier résultat de Zil'ber sur la Théorie des Modèles du sujet (ZIL'BER 1977), le groupe nu  $G$  est  $\omega_1$ -catégorique, et par conséquent son type générique n'est pas orthogonal à  $L$  ; selon un résultat général de Hrushovski sur les groupes simples de rang de Morley fini,  $G$  est  $L$ -interne, c'est-à-dire paramétrable par des points de  $L$ , grâce à l'aide d'un uplet fixé de points de  $G$  ;  $G$  est alors définissablement dans  $G$  (par une formule utilisant des paramètres) isomorphe à un groupe  $G_1(L)$  définissable dans  $L$  ; en outre le groupe des automorphismes de  $G$  qui fixent point-par-point le corps  $L$ , qu'on appelle groupe de Galois ou groupe de liaison, est définissable (POIZAT 1987, Ch. 2.f).

(iv) Le groupe  $G$  a une copie isomorphe définissable dans  $K$  sans paramètres.

**Théorème 3.1 (de Borel-Tits, version modèle-théorique).** Soient  $G$  un groupe algébrique simple sur un corps algébriquement clos  $K$ ,  $L$  un corps infini définissable dans  $G$ , et  $\sigma$  un isomorphisme du corps  $K$  vers le corps  $L$  définissable dans  $K$ ; alors l'isomorphisme de groupe  $\sigma^*$  entre  $G = G(K)$  et  $G(L)$  induit par  $\sigma$  est définissable dans la structure de groupe nue de  $G$ .

**Démonstration.** Comme  $G$  est  $L$ -interne, il est définissablement dans  $G$  isomorphe à un groupe  $G_1(L)$  définissable dans  $L$ . Quand nous revenons dans  $K$  en prenant l'image de  $L$  par  $\sigma^{-1}$ , nous voyons que  $G_1(K)$  est isomorphe à  $G$  définissablement dans  $K$ , dans lequel tout est définissable; autrement dit,  $G(K)$  est isomorphe à  $G_1(K)$  définissablement au sens du corps nu  $K$ ; en appliquant  $\sigma$ , on voit que  $G(L)$  est isomorphe à  $G_1(L)$  par un isomorphisme définissable dans  $L$ ; comme  $L$  est définissable dans le groupe  $G$ ,  $\sigma^*$  est composé d'un isomorphisme de  $G$  dans  $G_1(L)$  et d'un isomorphisme de  $G_1(L)$  dans  $G(L)$  qui sont tout deux définissables dans le groupe nu  $G$ . **Fin**

**Corollaire 3.2.** Si  $G$  est un groupe algébrique simple, sur un corps algébriquement clos  $K$ , tout sous-ensemble constructible (c'est-à-dire définissable dans  $K$ ) d'une puissance cartésienne de  $G$  est définissable (avec paramètres) dans le groupe nu  $G$ .

**Démonstration.** Si  $X$  est constructible au sens de  $K$ ,  $\sigma^*(X)$  est constructible au sens de  $L$ , donc définissable dans  $G$ , ainsi que son image réciproque par  $\sigma^*$ . **Fin**

**Notes.** (i) Etant donné le fossé qui sépare Logique et Géométrie<sup>10</sup>, on ne trouve pas dans BOREL-TITS 1973 d'énoncé qui corresponde exactement au théorème ci-dessus; des géomètres pourront même s'offusquer de voir associé un double nom aussi prestigieux à un résultat dont la démonstration demande si peu de connaissance de la structure du groupe. Ils considéreront au mieux le Corollaire 4.7 de la section suivante comme une version misérable du vrai Théorème de Borel-Tits, qui est plus riche (voir STEINBERG 1974), puisqu'il parle en réalité d'isogénies entre groupes quasi-simples et non pas seulement d'isomorphismes entre groupes simples (voir le Theorem 4 de BOROVIK 2023), dans un cadre qui n'est pas limité à celui d'un corps de base algébriquement clos. Cependant, on ne peut guère éviter de mentionner Borel et Tits à propos du Théorème 3.1 car son Corollaire 3.2, grâce à l'introduction du langage du premier ordre, donne un sens mathématique précis à une formulation heuristique vague du résultat (voir ZIL'BER 1984), à savoir que la structure de variété du groupe est déterminée (de quelle manière?) par sa seule loi de groupe.

(ii) J'ai cru opportun de reprendre dans POIZAT 1988 l'essai de ZIL'BER 1984, qui exprimait dans son introduction l'intuition correcte que la Théorie des Modèles

---

<sup>10</sup> Voyez le sous-titre de POIZAT 1987.

avait quelque chose à dire sur le Théorème de Borel-Tits ; mais il la traduisait ensuite dans un Lemma 5 dont l'énoncé m'a semblé insuffisant et la démonstration peu convaincante.

(iii) Le corps  $K$  lui-même ne vit pas dans l'univers de  $G$  ; c'est un objet du second ordre par rapport à  $G$ , c'est-à-dire un corps  $K$  tel que  $G$  soit  $G(K)$  ; il a seulement un sosie, une copie  $L$ , qui est définissable dans  $G$  par une formule du premier ordre.

(iv) L'ingrédient essentiel de la démonstration, celui qui met en jeu la simplicité du groupe, est la notion d'internité de Hrushovski, valable dans des contextes bien plus généraux que la finitude du rang de Morley. Elle est l'aboutissement d'un long cheminement mathématique, car elle s'inscrit dans le prolongement de la Théorie de Galois des équations algébriques (POIZAT 1983), de celle des équations différentielles linéaires, associée aux noms de Liouville, Picard et Vessiot, généralisée ensuite par Kolchin à ce que nous qualifions aujourd'hui d'équations différentielles internes au corps des constantes (POIZAT 1985, Ch. 18), et aussi du groupe de liaison ("binding group") de ZIL'BER 1980 (voir POIZAT 1987, p. 54).

**Exemple 3.3.** L'exemple le plus immédiat d'internité est donné par l'action à gauche  $G_g$  d'un groupe  $G$  sur lui-même, qui est la structure associée à la fonction binaire  $x^{-1}.y$  ;  $G$  et  $G_g$  sont interdéfinissables, chacun ayant une copie définie sans paramètres dans l'autre : celle de  $G$  dans  $G_g$  est obtenue sur le quotient de  $G \times G$  par la relation quaternaire d'équipollence  $x^{-1}.y = u^{-1}.v$ . En fixant un de ses points, on voit que  $G_g$  est  $G$ -interne, avec comme groupe de liaison l'action de  $G$  par translation sur lui-même.

Cette structure  $G_g$ , de même que sa duale  $G_d$ , est plus forte que la version affine  $G_{\text{aff}}$  du groupe  $G$ , définie par l'équipollence, et dont le groupe de liaison est le groupe des translations bilatères, isomorphe au produit de  $G$  par son groupe inverse divisé par le sous-groupe central-diagonal.

Cet exemple très simple nous confronte à une distinction subtile entre le défini et le définissable, qui est au cœur-même de la notion d'internité. Quand nous travaillons dans la structure  $G_g$ , le groupe  $G$  est définissable sans paramètres, étant paramétré par les couples de points de  $G_g$  : il est donc  $G_g$ -interne, avec un groupe de liaison réduit à l'identité ;  $G_g$  est définissablement isomorphe à la structure définie sur  $G$  par la fonction  $x^{-1}.y$ , mais pour témoigner d'un tel isomorphisme il faut fixer un point de  $G_g$ .

**Exemple 3.4.** Autre exemple classique : un plan projectif arguésien  $P$ , dont la relation de colinéation permet de définir un corps  $L$  ;  $P$  est  $L$ -interne, avec  $\text{PSL}_2$  comme groupe de liaison, car on obtient un isomorphisme entre  $P$  et  $P(L)$ , le plan projectif associé au corps  $L$ , en fixant trois points ; ce plan est une structure constructible autonome au sens de la Définition 4.1 à venir.

**Exemple 3.5.** Les multicorps définis dans la Section 4.

Pour élever le débat, et nous placer dans ce qui est à mon avis le véritable cadre convenant au Théorème de Borel-Tits, nous développerons dans la section suivante les conséquences du Théorème 3.1 sur les isomorphismes dans un contexte plus abstrait, où il n'est plus question de groupes ; dans la dernière section, nous reviendrons aux particularités des groupes algébriques simples. En attendant, nous examinons ce que ce résultat nous dit de leurs extensions et restrictions élémentaires.

Si  $G = G(K)$  est un groupe simple infini, défini dans un corps algébriquement clos  $K$  par une formule  $G(\bar{a})$  sans paramètres, comment pouvons-nous décrire la théorie du groupe nu  $G$  ?

Nous savons qu'il est possible de définir dans  $G$ , avec l'aide d'un uplet de paramètres  $\bar{a}$ , un corps  $L$  et un isomorphisme entre  $G$  et  $G(L)$ . Cela s'exprime par une formule élémentaire  $\gamma(\bar{x})$  à laquelle  $\bar{a}$  satisfait.

Notons  $\gamma_n(\bar{x})$  la formule déclarant en outre que le corps  $L$  n'a pas d'extension de degré  $\leq n$ , et qui précise si  $p = 0$  ou  $p \neq 0$  suivant que  $p \leq n$  est ou non la caractéristique du corps de base  $K$ . Comme tout corps infini définissable dans  $G$  est isomorphe à  $K$ , notre groupe satisfait  $(\exists \bar{x}) \gamma(\bar{x})$  et  $(\forall \bar{x}) \gamma(\bar{x}) \rightarrow \gamma_n(\bar{x})$ .

Dans un modèle de cette liste d'énoncés  $T$ , on trouve  $\bar{a}$  satisfaisant à tous les  $\gamma_n(\bar{a})$ , si bien que ce modèle est isomorphe à  $G(L)$  où  $L$  est un corps algébriquement clos ; comme  $T$  est  $\omega_1$ -catégorique, ce qui était prévu par ZIL'BER 1977, c'est la théorie de  $G$ .

Si  $G_1$  est une restriction élémentaire de  $G$ , il contient un  $\bar{a}$  satisfaisant à  $\gamma(\bar{x})$ , et cette formule a même sens dans  $G$  et dans  $G_1$  ; réciproquement, si cela a lieu,  $G_1$  est restriction élémentaire de  $G$ , car le plongement de  $G_1$  dans  $G$  correspond au plongement naturel de  $G(k)$  dans  $G(K)$ , où  $k$  est un sous-corps algébriquement clos de  $K$ .

Quand on relit l'énoncé du Theorem 3 de Borovik, on comprend alors que  $G(K_\infty)$  est le modèle premier de la théorie de  $G$ , et que le plongement considéré est élémentaire. On en obtient donc la traduction suivante, qui sonne comme une musique divine aux oreilles des dévots de la Théorie des Modèles :

**Théorème 3.6.** *Si  $G$  est un groupe algébrique simple, sur un corps algébriquement clos, et  $M$  est un sous-groupe de  $G$  contenant une restriction élémentaire de  $G$ , tel que la structure  $(G, M)$  soit de rang de Morley fini, alors  $M = G$ .*

Le géomètre doit pour une fois - et c'est justice - être mis en garde contre un danger de confusion. Le modèle premier de la théorie du corps  $K$ , qui est le corps des nombres algébriques, est un sous-corps de  $K$  bien déterminé, bien que la Théorie de Galois nous donne une pléthore d'endomorphismes de  $K_\infty$  dans  $K$ . Par contraste, le modèle premier de la théorie du groupe  $G$  se plonge de multiples façons dans  $G$ , suivant le choix du paramètre  $\bar{a}$  ; il n'est pas

formé des points de  $G$  algébriques (au sens modèle-théorique) sur  $\emptyset$  car  $G$ , étant simple, n'a pas de sous-groupe caractéristique propre. Par contre les extensions élémentaires de  $G$  ne causent pas de difficulté : elles correspondent aux extensions du corps  $K$ , puisque nous disposons dans  $G$  du paramètre  $\bar{a}$ .

Arrivé à ce point, je ne peux plus éviter la question de la modèl-complétude de la théorie de  $G$  ; elle semble liée à la nature de la formule  $\gamma(\bar{x})$ . D'après MUSTAFIN-POIZAT 2006 la réponse à la question suivante est positive dans le cas de  $\text{PSL}_2$ .

**Question C.** *Si  $G = G(K)$  est un groupe algébrique simple sur le corps algébriquement clos  $K$ , et si  $k$  est algébriquement clos, est-ce-que tout plongement de  $G(k)$  dans  $G(K)$  est élémentaire ? Plus précisément, existe-t'il un sous-corps  $k'$  de  $K$  isomorphe à  $k$  tel qu'il soit conjugué (par un automorphisme intérieur) du plongement canonique de  $G(k')$  dans  $G(K)$  ?*

**Note.** Dans CHERLIN 1979, Gregory Cherlin exprime son admiration pour le naturel et la simplicité de la démonstration de Zil'ber, tout en déclarant qu'il était parvenu à une conclusion semblable qui s'appuyait lourdement sur la structure des groupes algébriques simples ; comme sa démonstration est restée inédite, il est difficile de dire si ce qu'il avait en tête pourrait apporter quelque lumière sur les questions posées ici.

#### 4. Un contexte débarrassé de toute référence à un groupe

Nous poursuivons l'étude du Théorème de Borel-Tits dans le cadre des structures constructives autonomes ainsi définies :

**Définition 4.1.** *Nous dirons que  $S$  est une structure constructible autonome, relativement au corps algébriquement clos  $K$ , si sa base, infinie, est constructible, ainsi que toutes les fonctions et relations nommées dans son langage, supposé fini, et si en outre, pour chaque  $n$ , toute partie constructible de  $S^n$  est définissable, avec paramètres, dans le langage de la structure  $S$ .*

**Exemple 4.2.** Le groupe  $\text{GL}_2(K)$  n'est pas autonome. En effet, il est le produit de son dérivé  $\text{SL}_2(K)$  par son centre, isomorphe à  $K^*$ , qui est formé des matrices diagonales ; on définit une copie  $L$  du corps de base dans le dérivé, mais si on reste au niveau du groupe il n'y a aucun moyen d'établir une corrélation entre  $L$  et le centre. Le groupe  $\text{GL}_2(K)$  est bidimensionnel, pas  $\omega_1$ -catégorique.

D'après le Corollaire 3.2, les groupes algébriques simples sont notre paradigme de structures constructibles autonomes. La Proposition 1.20, p. 122, de ABC 2008 montre, par un argument assez opaque faisant intervenir les groupes radiciels, que les groupes algébriques quasi-simples le sont aussi. En fait, ce type de démonstration est extrêmement flexible, car il y a beaucoup de

façons d'affecter aux points du groupe des coordonnées dans son quotient ; voici la plus simple que j'ai trouvée :

**Théorème 4.3.** (i) *Dans un contexte de rang de Morley fini, un groupe  $G$  quasi-simple, dont le générique n'est pas orthogonal à un ensemble définissable  $A$ , est  $A$ -interne.*

(ii) *Un groupe algébrique quasi-simple, sur un corps algébriquement clos, est autonome.*

**Démonstration.** (i) On note  $H = G/Z(G)$  ; on obtient une surjection de  $H \times H$  sur l'ensemble des commutateurs de  $G$  en associant à  $(x,y)$  le commutateur commun de leurs images réciproques dans  $G$  ; comme il existe un entier  $m$  tel que tout point du dérivé  $G'$  de  $G$  soit le produit de  $m$  commutateurs, cela donne une surjection  $f$  de  $H^{2m}$  sur  $G$  qui est définissable dans  $G$ . En effet, comme  $H$  est son propre dérivé,  $G'$  et  $G$  ont même rang, et  $G = G'$ .

Comme  $H$  est simple, et que son générique est co-algébrique à celui de  $G$ , il est  $A$ -interne, ainsi que  $G = f(H^{2m})$ .

(ii)  $H = G/Z(G)$  permet de définir une copie  $L$  du corps de base  $K$ , image d'un isomorphisme  $\sigma$  définissable dans  $K$  ; comme il est autonome, l'application  $\sigma^*$  de  $H(K)$  dans  $H(L)$  est définissable dans sa structure de groupe nue ; comme  $\sigma^*(f)$  est définissable dans  $L$ , l'application  $\sigma^*$  de  $G(K)$  dans  $G(L)$  est définissable dans le groupe nu  $G$ . **Fin**

**Remarque 4.4.** Cette démonstration ne montre pas que, si  $G/Z(G)$  est un groupe algébrique,  $G$  en est un aussi ; en effet, le groupe  $G/Z(G)$  définit un corps nu algébriquement clos  $L$ , et une copie de  $G$  est définissable dans  $L$ , mais il n'est pas sûr que  $L$  reste nu quand il est vu depuis  $G$ .

Nous montrons maintenant, pour les structures constructives autonomes, une sorte de réciproque au Corollaire 3.2, à savoir qu'elles sont  $K$ -internes, ce qui ne pose pas de difficultés car la définition de l'autonomie incorpore en quelque sorte l'internité. Après en avoir tiré quelques corollaires, nous préciserons ensuite la manière de définir en elles des copies du corps de base, ce qui facilitera l'étude de leurs automorphismes.

**Notation.** Soient  $\sigma$  un isomorphisme entre les corps  $K$  et  $L$ , et  $\varphi$  une formule du langage des corps, à paramètres dans  $K$ , définissant une structure  $S$  ; nous notons  $\sigma^*\varphi$  la formule, à paramètres dans  $L$ , obtenue en remplaçant les paramètres de  $\varphi$  par leurs images par  $\sigma$ , et  $\sigma^*S$  la structure définie dans  $L$  par  $\sigma^*\varphi$ . Il faut remarquer que cet isomorphisme  $\sigma^*$  n'a de sens que si on fixe la formule définissant  $S$ .

**Théorème 4.5.** *Soit  $S$  une structure constructible autonome, sur le corps algébriquement clos  $K$  ; alors on peut définir dans  $S$  (ou plutôt  $S^{\text{eq}}$ ) une copie  $L$  du corps  $K$ , isomorphe à  $K$  par un isomorphisme  $\sigma$  définissable*

dans  $K$ . Pour chacun de ces corps  $L$ , l'isomorphisme  $\sigma^*$  induit par  $\sigma$  entre  $S$  et  $\sigma^*S$  est définissable dans  $S$ . En outre, la théorie de  $S$  est  $\omega_1$ -catégorique.

**Démonstration.** Par élimination des imaginaires,  $S$  est isomorphe à une partie constructible d'une puissance cartésienne de  $K$ ; comme elle est infinie, une de ses projections  $P$  est infinie, ce qui donne une copie de  $K$  privée éventuellement d'un nombre fini de points; comme tout point de  $K$  est somme de deux points d'une quelconque de ses parties cofinies, on obtient une copie définissable de  $K$  sur un quotient de  $P \times P$ .

Comme  $\sigma^*S$  est définissable dans  $S$  et  $\sigma^*$  est définissable dans  $K$ , ce dernier est définissable dans  $S$  puisque que c'est une structure autonome.

On décrit la théorie de  $S$  à peu près comme nous l'avons fait dans le cas d'un groupe algébrique simple, sauf que maintenant il faut tenir compte des paramètres  $\bar{b}$  dans  $L$  qui interviennent dans la formule définissant  $\sigma^*(S)$ , en plus des paramètres  $\bar{a}$  dans  $S$  qui interviennent dans la définition de  $\sigma^*$  (par exemple, le corps  $K$  avec un point transcendant nommé dans son langage est une structure constructible autonome). On minimise le degré de transcendance de  $\bar{b}$ , si bien qu'aucun  $\bar{\beta}$  de degré inférieur ne pourra définir un objet constructiblement isomorphe à  $S$ . Ces paramètres seront représentés par des uplets  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  dans la formule  $\gamma(\bar{x}, \bar{y})$ , qui précise que  $\bar{y}$  satisfait un système générateur des équations à coefficients entiers satisfaites par  $\bar{b}$ , et à la théorie on ajoute que si  $\gamma(\bar{x}, \bar{y})$  est satisfait alors  $\bar{y}$  n'annule pas d'équations non satisfaites par  $\bar{b}$ . **Fin**

**Corollaire 4.6.** *Si on ajoute de la structure  $\Sigma$  à une structure constructible autonome  $S$ , sur un corps algébriquement clos  $K$ , de sorte que  $(S, \Sigma)$  reste de rang de Morley fini, alors  $(K, S, \Sigma)$  est de rang de Morley fini.*

**Démonstration.** La structure  $(L, \sigma^*(S), \sigma^*(\Sigma))$ , étant définissable dans  $(S, \Sigma)$ , est de rang de Morley fini, ainsi que son image réciproque par  $\sigma^*$ . **Fin**

**Corollaire 4.7 (Théorème de Borel-Tits sur les isomorphismes).** (i) *Soit  $S$  une structure constructible sur le corps algébriquement clos  $K$  d'une part, et sur le corps algébriquement clos  $K'$  d'autre part. On suppose que  $S$  est autonome relativement à  $K$ ; alors les corps  $K$  et  $K'$  sont isomorphes, et  $S$  est autonome relativement à  $K'$ .*

(ii) *Soient  $S$  une structure constructible autonome, sur le corps algébriquement clos  $K$ , et un isomorphisme  $\tau$  entre  $S$  et une structure  $S'$  constructible sur le corps algébriquement clos  $K'$ ; alors  $S'$  est autonome, et les corps  $K$  et  $K'$  sont isomorphes, par un isomorphisme tel que  $\tau$  se décompose en l'isomorphisme induit associé suivi d'un isomorphisme définissable dans  $S'$ .*

**Démonstration.** (i)  $S$  est à la fois défini par une formule  $S(K)$  et une formule  $S'(K')$ . Comme elle est autonome du côté de  $K$ , on peut y définir une copie  $L$  de ce corps ;  $L$ , étant définissable dans  $K'$ , lui est définissablement isomorphe ; par ailleurs,  $S$  est définissablement, dans  $S$  et a fortiori dans  $K'$ , isomorphe à  $S'(L)$  ; on en déduit que  $S(L)$  et  $S'(L)$ , et aussi  $S(K')$  et  $S'(K')$ , sont définissablement isomorphes au sens de  $K'$ . Or  $S(K')$  est autonome.  
(ii) L'isomorphisme  $\tau$  fait apparaître  $S'$  comme  $S(K_1)$  où  $K_1 = \sigma(K)$  est un corps isomorphe à  $K$  ; autrement dit  $\tau = \sigma^*$ , et le corps  $K_1$  a une copie  $L$  définissable dans  $S'$  : le corps  $L$  est isomorphe à  $K_1$  par  $\theta$  définissable dans  $K_1$ . Le point (i) montre que  $S' = S'(K')$  est autonome, et que l'isomorphisme  $\theta^*$  entre  $S'$  et  $S(L)$  est définissable dans  $S'$  ;  $\tau$  est donc la composition de l'isomorphisme de  $S(K)$  vers  $S(L)$  induit par  $\theta \cdot \sigma$ , suivi de  $\theta^{*-1}$ . **Fin**

**Corollaire 4.8 (Théorème de Borel-Tits sur les automorphismes).** *Soient  $S$  une structure constructible autonome, sur le corps algébriquement clos  $K$ , un corps infini  $L$  définissable dans  $S$ , et un automorphisme  $\tau$  de  $S$  ; alors  $\tau$  se décompose en des homomorphismes constructibles et l'isomorphisme induit  $\sigma^*$  de  $S(L)$  sur  $S(\sigma.L)$ , où  $\sigma$  est l'isomorphisme de corps induit par  $\tau$  sur  $L$  ;  $\tau$  est constructible (c'est-à-dire définissable dans  $S$ , ou de façon équivalente dans  $K$ ) si et seulement si  $\sigma$  l'est.*

**Démonstration.** Soit  $\alpha$  un isomorphisme de  $S = S(K)$  dans  $S(L)$  induit par un isomorphisme de  $K$  dans  $L$  définissable dans  $K$  ;  $\tau$  le conjugue sur un isomorphisme  $\alpha'$  entre  $S$  et  $S(\sigma.L)$  ;  $\tau$  se décompose donc en  $\alpha$ ,  $\sigma^*$ , et l'inverse de  $\alpha'$ , les deux extrêmes étant définissables dans  $S$ . Si  $\tau$  est définissable  $\sigma$  l'est aussi, et si  $\sigma$  est définissable  $\sigma^*$  l'est également. **Fin**

#### 4.A. Caractéristique zéro

**Théorème 4.9.** *Soit  $S$  une structure constructible autonome, sur un corps algébriquement clos  $K$  de caractéristique nulle ; alors :*

- (i) *on peut définir sans paramètres dans  $S$  (ou plus exactement dans  $S^{\text{eq}}$ ) une copie  $L$  du corps  $K$  ;*
- (ii) *si  $\tau$  est un automorphisme de  $S$  tel que la structure  $(S, \tau)$  soit superstable,  $\tau$  est constructible (c'est-à-dire définissable dans  $S$ , ou de façon équivalente dans  $K$  !)* ;
- (iii) *si  $\tau$  est un automorphisme d'ordre fini de  $S$ , son carré  $\tau^2$  est constructible ;*
- (iv) *le groupe  $\text{Aut}(S)$  des automorphismes constructibles de  $S$  est lui-même constructible, et c'est le plus grand groupe  $A$  d'automorphismes de  $S$  tel que  $(S, A)$  soit superstable.*

**Démonstration.** (i) Nous avons vu qu'on peut définir dans  $S$  un corps  $L_1$  définissablement isomorphe à  $K$ , avec l'aide d'un uplet de paramètres  $a_1$ , qu'on peut d'ailleurs supposer canonique pour la chose. Soit  $A$  l'ensemble des  $a$  qui permettent de définir un corps infini  $L_a$  de la même façon que  $a_1$  permet de définir  $L_1$ ; comme  $S$  élimine le quanteur "il existe une infinité de ...",  $A$  est définissable dans  $S$ , et sans paramètres (il suffit d'ailleurs de déclarer que le corps est quadratiquement clos, c'est-à-dire satisfait à  $(\forall x)(\exists y) y^2 - y = x$ , pour garantir son infinitude).

Comme  $S$  est autonome, pour tout  $a$  dans  $A$  il existe un isomorphisme  $\sigma_b$  entre  $L_1$  et  $L_a$  définissable dans  $S$  à l'aide d'un uplet de paramètres  $b$ . Montrons, par induction sur le rang et le degré de Morley de  $A$ , que la définition de  $\sigma_b$  peut être obtenue uniformément lorsque  $a$  parcourt  $A$ ; pour cela, on considère (après avoir éventuellement remplacé  $S$  par une extension élémentaire saturée)  $a$  de rang maximum dans  $A$ ; la définition de son  $\sigma_b$  convient pour tout  $a'$  d'une partie  $A'$  de  $A$  de même rang de Morley que  $A$ , si bien que l'induction s'applique à  $A-A'$ ; il ne reste plus qu'à faire un patchwork pour assembler les morceaux, ce qui peut conduire à allonger  $b$  pour pouvoir distinguer des cas. Nous obtenons finalement un ensemble définissable  $B$ , et, pour  $b$  parcourant  $B$ , une famille uniformément définissable d'isomorphismes  $\sigma_b$  entre  $L_1$  et un  $L_a$ , de sorte que chaque  $L_a$  soit l'image d'au moins un  $\sigma_b$ . Naturellement, beaucoup de paramètres interviennent dans la définition de  $B$ , par exemple  $a_1$ , ainsi que les paramètres de la décomposition de  $A$ .

Posant alors  $\tau_c = \sigma_b \cdot \sigma_{b'}^{-1}$ , nous obtenons un ensemble  $C$  paramétrant une famille uniforme, close pour la prise d'inverse, d'isomorphismes entre un  $L_a$  et un  $L_{a'}$ , de sorte que pour chaque couple  $(a, a')$  dans  $A \times A$  il y ait au moins un  $c$  dans  $C$  associé à un isomorphisme entre  $L_a$  et  $L_{a'}$ . En remplaçant  $C$  par la réunion des ensembles semblablement définis et ayant la même propriété, c'est-à-dire en incorporant au paramètre  $c$  ceux qui interviennent dans la définition de l'ensemble  $C$ , nous obtenons un ensemble  $D$ , qui a encore cette propriété, mais qui, lui, est définissable sans paramètres.

Comme nous sommes en caractéristique nulle, le corps  $L_a$  n'a pas d'automorphisme constructible autre que l'identité, et il n'y a qu'un seul isomorphisme définissable entre  $L_a$  et  $L_{a'}$ . Nous considérons alors la réunion disjointe des  $L_a$ , qui est l'ensemble  $U$  des couples  $(a, x)$ ,  $a \in A$ ,  $x \in L_a$ ; sur cet ensemble, la relation  $E$  suivante est définissable sans paramètres:  $(a, x) E (a', y)$  s'il existe  $d$  dans  $D$  tel que  $\tau_d$  soit un isomorphisme entre  $L_a$  et  $L_{a'}$  et que  $\tau_d(x) = y$ ; elle n'est rien d'autre que la relation d'équivalence qui déclare que  $x$  et  $y$  se correspondent par l'unique isomorphisme définissable entre  $L_a$  et  $L_{a'}$ , et le corps  $L$  cherché est le quotient  $U/E$ .

(ii) Comme le corps  $L$  est définissable sans paramètres dans  $S$ ,  $\tau$  induit un automorphisme  $\sigma$  superstable de  $L$ , qui ne peut être que l'identité d'après un résultat de Hrushovski, s'appuyant sur BERLINE-LASCAR 1986 (voir POIZAT 1987, p. 191 ; j'ai écrit "superstable" pour rendre hommage à Hrushovski, mais c'est à peu près évident si on suppose le rang de Morley fini) ;  $\tau$  est donc constructible d'après le Corollaire 4.8.

(iii)  $\tau$  induit un automorphisme  $\sigma$  d'ordre fini du corps algébriquement clos  $L$  ; d'après le Théorème d'Artin, s'il ne vaut pas l'identité, c'est la conjugaison relativement à un sous-corps réel-clos de  $L$  de codimension deux, dont le carré vaut l'identité.

(iv)<sup>11</sup> Comme  $S$  est  $L$ -interne, ses automorphismes qui fixent point par point le corps  $L$  constituent le groupe de liaison, qui est définissable dans  $S$ . **Fin**

#### 4.B. Multicorps

Le traitement de la caractéristique  $p$  est plus délicat, et nécessite la définition suivante.

**Définition 4.10.** *Nous appelons multicorps une structure constructible dont la base  $M = (L_1, \dots, L_n)$  est la réunion disjointe d'un nombre fini de copies du corps de base (algébriquement clos)  $K$ , et le langage est constitué des quatre relations suivantes :*

- (i) *l'équivalence exprimant que  $x$  et  $y$  appartiennent au même  $L_i$  ;*
- (ii) *le graphe de l'addition des corps, composé des triplets  $(x,y,z)$  appartenant au même  $L_i$  et tels que  $z$  soit la somme de  $x$  et de  $y$  au sens de ce corps ;*
- (iii) *le graphe du produit des corps défini semblablement ;*
- (iv) *et enfin une relation binaire  $\theta(x,y)$  dont la restriction à  $L_i \times L_j$  est le graphe d'un isomorphisme  $\theta_{ij}$  entre les corps  $L_i$  et  $L_j$  ; on supposera que chaque  $\theta_{ii}$  vaut l'identité.*

**Exemple 4.11.** Nous décrivons ici tous les bicorps  $B = (L_1, L_2)$ , en remplaçant la quatrième relation par une fonction  $\theta$  de  $B$  dans  $B$  dont la restriction au premier corps est un isomorphisme  $\theta_1$  de  $L_1$  vers  $L_2$ , et sa restriction  $\theta_2$  au second est un isomorphisme de  $L_2$  vers  $L_1$ . On remarque que  $\theta$  est un automorphisme de la structure, qui échange les deux corps, et que  $B$  est une structure autonome équivalente au corps  $K$  dès qu'on se permet de fixer un paramètre ; nous allons déterminer les circonstances qui font que le bicorps permet de définir *sans paramètres* une copie de  $K$ .

En caractéristique nulle,  $\theta_2 \cdot \theta_1(x)$  est par hypothèse un automorphisme constructible du corps  $L_1$ , qui vaut donc l'identité, et il en est de même de  $\theta_1 \cdot \theta_2(y)$  ; autrement dit  $\theta_2$  et  $\theta_1$  sont inverses l'un de l'autre,  $\theta$  est involutive,

---

<sup>11</sup> Je dois cet argument à Hrushovski, que je remercie très humblement ; en effet, dans la version première de cet article, indigne disciple de Liouville, Picard, Vessiot et Krasner, je n'avais pas reconnu le groupe de Galois !

et on obtient un troisième corps  $L_3$  définissable sans paramètres dans  $B$  en passant au quotient par la relation d'équivalence  $y = x \vee y = \theta(x)$ . Ce cas n'a aucun intérêt, car le bicorps n'est alors rien d'autre qu'une simple duplication du corps de base  $K$ .

En caractéristique  $p$ ,  $\theta_2.\theta_1(x)$  est une puissance, positive ou négative, de l'automorphisme de Frobenius :  $\theta_2.\theta_1(x) = x^{p^n}$ . Symétriquement,  $\theta_1.\theta_2(y) = y^{p^n}$ ; en effet,  $y$  est de la forme  $y = \theta_1(x)$ , et  $\theta_1.\theta_2.\theta_1(x) = \theta_1(x^{p^n}) = y^{p^n}$ .

Supposons dans un premier temps que  $n = 1$ , et montrons que  $B$  n'a pas d'automorphisme involutif  $\sigma$ ; si  $\sigma$  est d'ordre fini et conserve les deux corps, il vaut l'identité d'après le Théorème d'Artin; s'il les échange, c'est une involution, de la forme  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ , où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont inverses l'un de l'autre; comme  $\sigma$  un automorphisme de la fonction  $\theta$ , il doit commuter avec elle, ce qui signifie que  $\varphi = \theta_2.\sigma_1 = \sigma_2.\theta_1$ , si bien que le carré de  $\varphi$  est l'automorphisme de Frobenius  $\theta_2.\theta_1$  du corps algébriquement clos  $L_1$ . Cela est interdit par la théorie de Galois des corps finis, car le groupe des automorphismes du corps à  $p^d$  éléments est cyclique et engendré par le Frobenius; or si  $d$  est pair le générateur du groupe cyclique d'ordre  $d$  n'est pas un carré.

Le même raisonnement vaut si l'exposant  $n$  est impair :  $B$  n'a pas d'automorphismes involutifs, et en fait pas d'automorphismes d'ordre fini autre que l'identité.

Si  $n = 2m$  est pair, l'automorphisme involutif  $(\theta_1(x^{p^m}), \theta_2(y^{p^m}))$  est définissable sans paramètres, et c'est d'ailleurs l'unique automorphisme d'ordre fini de  $B$ . Dans ce cas, un passage au quotient permet de définir sans paramètres une troisième copie  $L_3$  du corps de base  $K$ .

Un automorphisme constructible du bicorps qui fixe ses deux corps vaut une même puissance du Frobenius sur chacun d'eux, si bien que les automorphismes constructibles du bicorps forment le groupe commutatif engendré par  $\theta$  et le Frobenius.

**Lemme 4.12.** *Les automorphismes d'ordre fini d'un multicorps de caractéristique  $p$  sont tous constructibles, et forment un groupe fini.*

**Démonstration.** Soit  $\sigma$  un automorphisme d'ordre fini de notre multicorps. Considérons un cycle de longueur  $q$  de l'action de  $\sigma$  sur ses corps, que nous notons  $(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_q)$  : modulo  $q$ ,  $\sigma(\Lambda_i) = \Lambda_{i+1}$ . Le Théorème d'Artin implique que  $\sigma^q$  agit comme l'identité sur chacun des corps  $\Lambda_i$ .

Si nous renommons  $\theta_i$  l'isomorphisme défini par  $\theta$  entre les corps  $\Lambda_i$  et  $\Lambda_{i+1}$ , l'automorphisme de  $\sigma$  se traduit par  $\sigma.\theta_i = \theta_{i+1}.\sigma$ . La restriction  $\sigma_i$  de  $\sigma$  à  $\Lambda_i$  s'écrit  $\theta_i.\beta_i$  où  $\beta_i$  est un automorphisme du corps  $\Lambda_i$ , et la commutation de  $\sigma$  et de  $\theta$  s'exprime par :  $\theta_{i+1}.\theta_i.\beta_i = \theta_{i+1}.\beta_{i+1}.\theta_i$ , soit encore  $\beta_{i+1}.\theta_i = \theta_i.\beta_i$ .

Par ailleurs  $\theta_q \dots \theta_2 \theta_1$  est un automorphisme  $\alpha$  constructible du corps  $\Lambda_1$ , c'est-à-dire une puissance du Frobenius. Par conséquent, la restriction de  $\sigma^q$  à  $\Lambda_1$  vaut  $\text{Id} = \theta_q \beta_q \dots \theta_2 \beta_2 \theta_1 \beta_1 = \theta_q \dots \theta_2 \theta_1 \beta_1^q = \alpha \beta_1^q$ . Il en suit que  $\beta_1$  est lui aussi une puissance du Frobenius, si bien que l'action de  $\sigma$  sur  $\Lambda_1$  est définissable, et de manière unique.

Comme toute action de  $\sigma$  sur l'un des corps est le début d'un cycle, il est définissable.

Soit  $C$  le groupe des automorphismes constructibles du multicorps. Le groupe de ceux d'entre eux qui fixent chacun des corps est d'indice fini et central dans  $C$ , car c'est le groupe cyclique infini engendré par le Frobenius. Comme  $C$  est central par fini, il n'a qu'un nombre fini de commutateurs, et son dérivé est fini d'après ROSENBLITH 1961 (voir ABC 2008 p. 15) ; un quotient nous ramène au cas où il est abélien. **Fin**

#### 4.C. Caractéristique $p$

**Théorème 4.13.** *Soit  $S$  une structure constructible autonome, sur un corps algébriquement clos  $K$  de caractéristique  $p$  ; alors*

- (i) *on peut définir sans paramètres dans  $S$  un multicorps ;*
- (ii) *si  $\tau$  appartient à un groupe superstable d'automorphismes de  $S$ , il est constructible ;*
- (iii) *si  $\tau$  est un automorphisme d'ordre fini de  $S$ , il est constructible ;*
- (iv) *il y a un et un seul groupe constructible maximal d'automorphismes de  $S$ , que nous notons  $\text{Aut}(S)$  ; c'est aussi le plus grand groupe superstable d'automorphismes de  $S$ .*

**Démonstration.** (i) De même qu'en caractéristique nulle, nous définissons sans paramètres une famille uniforme  $L_a$  de copies de  $K$ , ainsi qu'une famille uniforme, indexée par  $D$ , d'automorphismes les reliant.

En caractéristique  $p$  les automorphismes définissables du corps  $K$  sont les puissances du Frobenius, et si  $\sigma$  et  $\tau$  sont deux isomorphismes entre  $L_a$  et  $L_{a'}$ , on doit avoir  $\sigma.x = (\tau.x)^q = \tau.(x^q)$ , où  $q = p^n$  pour un certain entier relatif  $n$ . Pour chaque  $a$ , nous considérons l'ensemble définissable des automorphismes  $y$  de  $L_a$  qui s'obtiennent par composition d'un isomorphisme de  $L_a$  vers un  $L_{a'}$  et d'un isomorphisme de ce  $L_{a'}$  vers  $L_a$ , tous deux paramétrés dans  $D$ . Ils forment une famille discrète, chacun d'eux étant de la forme  $y = x^{p^n}$ , où  $n$  est un entier relatif ; par compacité, ils sont en nombre fini, et si on fixe  $a$  la relation exprimant que  $x$  et  $y$  dans  $L_a$  se correspondent par un de ces automorphismes s'écrit  $(y-x^{q_1}).(y-x^{q_2}). \dots .(x-y^{r_1}).(x-y^{r_2}). \dots = 0$ , où les  $q_i$  et les  $r_j$  sont des puissances positives de la caractéristique. Par élimination des quantificateurs dans  $K$ , le degré de ce polynôme est borné (je ne vois pas pour cela de démonstration basée sur l'absence de propriété de

recouvrement fini), et il existe un entier  $N$ , indépendant de  $a$ , tel que  $-N \leq n \leq N$  pour tous les exposants  $n$  décrivant cette famille d'automorphismes de  $L_a$ .

On voit que, quels que soient  $a$  et  $a'$  dans  $A$ , il y a au plus  $2N+1$  isomorphismes distincts entre  $L_a$  et  $L_{a'}$  qui sont paramétrés par  $D$ . Nous pouvons les individualiser en les ordonnant, en décrétant que  $\sigma \leq \tau$  si  $\tau.x = (\sigma.x)^{p^n}$  pour un  $n \geq 0$ ; l'existence de  $N$  permet de distinguer le plus petit, et obtenir une famille uniforme  $\sigma_{aa'}$ , indexée par  $A \times A$ , d'automorphismes de  $L_a$  dans  $L_{a'}$ .

Fixons maintenant un type  $\pi$  dans  $A$  de rang de Morley maximum. Nous définissons sur l'ensemble  $U$  la relation  $E_\pi$  suivante :  $(a,x) E_\pi (a',y)$  si pour tout  $g$  dans  $\pi$ , indépendant de  $\{a, x, a', y\}$ ,  $\sigma_{ag}(x) = \sigma_{a'g}(y)$ .  $E_\pi$  est une relation d'équivalence : pour vérifier qu'elle est transitive, on prend  $g$  dans  $\pi$  indépendant de tout le monde. Et elle est définissable car le type  $\pi$  l'est, mais sa définition demande l'emploi du paramètre (imaginaire) canonique de  $\pi$ , lequel est algébrique sur  $\emptyset$ . Posons  $L_\pi = U/E_\pi$ ; les conjugués de  $L_\pi$  forment un ensemble fini, définissable sur  $\emptyset$ , de copies de  $K$ .

(ii) Ce point nous renvoie à une question ouverte depuis longtemps, antérieure à la Conjecture d'Algébricité, puisqu'elle est posée dans MACINTYRE 1971, et met en scène un corps de Wagner avant l'heure : *un corps de rang de Morley fini peut-il avoir un automorphisme définissable non constructible, c'est-à-dire autre qu'une puissance du frobenius ?* En caractéristique  $p$ , le résultat de Hrushovski cité plus haut affirme seulement qu'un groupe  $A$  d'automorphismes de  $K$  tel que  $(K,A)$  soit superstable est réduit à l'identité.

Notons  $\sigma$  l'action de  $\tau$  sur un multikorps  $M = (L_1, \dots, L_n)$  définissable sans paramètres dans  $S$ ; comme  $c$ 'est un automorphisme pour la relation  $\theta$ ,  $\sigma.\theta_{ij} = \theta_{i'j'}. \sigma$  quand  $\sigma(L_i) = L_{i'}$  et  $\sigma(L_j) = L_{j'}$ . Si  $\sigma$  fixe l'un de ces corps, l'hypothèse implique qu'il le fixe point par point, et  $\tau$  est constructible d'après le Corollaire 4.8; s'il échange deux d'entre eux, l'étude des bicorps que nous avons faite montre qu'il les fixe tous les deux, ou bien fixe un troisième corps, et on conclut de même.

Dans le cas général, l'hypothèse implique que  $\sigma^{n!}$  fixe chacun des corps point par point;  $\sigma$  est donc d'ordre fini, et définissable d'après 4.12. Considérons un cycle  $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_q)$  de son action, ainsi que son quotient  $\Lambda$  par le groupe cyclique d'ordre  $q$ : il s'agit de quotienter par la relation disjonction des  $x \in \Lambda_i \wedge y \in \Lambda_{i+j} \wedge y = \sigma^j(x)$ , qui est bien une équivalence car on retombe sur l'identité après avoir fait un tour complet. Ce quotient est un corps fixé par  $\tau$ , qui est constructible d'après le Corollaire 4.8.

(iii) On peut reprendre la démonstration du point précédent, car le Théorème d'Artin implique que  $\tau$  fixe chaque point du corps  $\Lambda$ .

(iv) Soient  $M = (L_1, \dots, L_n)$  un multikorps définissable sans paramètres dans  $S$ , et  $A$  la composante connexe du groupe (constructible car  $c$ 'est un groupe de

liaison) des automorphismes de  $S$  qui fixent point par point chacun des corps  $L_1, \dots, L_n$ .

Si  $\tau$  appartient à un groupe constructible d'automorphismes de  $S$ , il est d'ordre fini modulo  $A$ ; réciproquement, les automorphismes qui induisent un automorphisme d'ordre fini du multicorps forment le groupe constructible  $\text{Aut}(S)$  d'après 4.12.

Si  $\tau$  appartient à un groupe superstable d'automorphismes de  $S$ , nous avons vu qu'il fixe point par point l'un des corps obtenu par quotient de l'un des cycles de son action sur le multicorps; il est donc dans  $\text{Aut}(S)$ . **Fin**

## 5. Retour aux groupes algébriques simples

L'idéologie gouvernant cet article, c'est qu'on peut démontrer des résultats subtils de Géométrie Algébrique par des arguments triviaux de Théorie des Modèles. Ce genre de sport a ses limites, et, quand il est question d'un groupe algébrique simple  $G$ , pour trouver des applications concrètes à ces résultats il est souvent nécessaire d'aller voir de plus près la structure de  $G$ .

Pour pouvoir préciser de quoi on parle, nous introduisons la définition suivante :

**Définition 5.1.** *Un groupe constructible autonome est un groupe algébrique infini, considéré dans un langage constructible qui lui confère l'autonomie et qui contient sa loi de groupe.*

On peut se demander si, ici comme ailleurs, la présence d'une loi de groupe a un effet de redressement sur les frobenius :

**Question D.** *Dans un groupe constructible autonome sur un corps algébriquement clos de caractéristique  $p$ , peut-on définir sans paramètres une copie du corps de base ?*

Nous commençons par quelques cas particuliers, qui donnent l'impression que la question se pose principalement pour les variétés abéliennes.

**1.** Le groupe  $G$  est le groupe additif  $K^+$  du corps de base; en caractéristique nulle, les automorphismes définissables de  $G$  sont de la forme  $x \rightarrow a.x$ ; en caractéristique  $p$  il y en a d'autres, de la forme  $a.x^{p^n}$ , mais tout groupe infini définissable d'automorphismes de  $G$  correspond à l'action d'une copie du corps de base (voir POIZAT 1987, Chapitre 3.b). L'autonomie permet de définir, à l'aide d'un uplet  $a$  de paramètres, une copie  $K_a$  de l'action du corps  $K$  sur son groupe additif  $G$ ; en quotientant la réunion des  $K_a$  par la relation d'équivalence "avoir même action sur  $G$ ", on définit sans paramètres un groupe  $A$  d'automorphismes de  $G$ ; l'anneau engendré par  $A$  est une copie du corps de base définie sans paramètres: sur  $A \cup \{0\}$ , l'addition se fait point par point et la multiplication est la composition.

La même démonstration vaut pour un "groupe vectoriel"  $G$ , isomorphe à  $(K^+)^n$ ; en effet, l'anneau des endomorphismes linéaires de  $G$  est définissable grâce à un uplet de paramètres comprenant une base de  $G$ ; c'est en fait le plus grand anneau définissable d'endomorphismes de  $G$ , le seul à être de dimension  $n^2$ ; la définissabilité du rang de Morley permet d'obtenir une famille uniforme de copies de cet anneau, que le quotient par l'équivalence "avoir même action sur  $G$ " pourvoit d'une définition sans paramètres; le corps  $K$  est son centre.

**2.**  $G$  est le groupe multiplicatif  $K^*$  du corps  $K$ . Quels sont alors les corps constructibles dont  $G$  est le groupe multiplicatif? Comme ces corps sont définissablement isomorphes, ce sont les images du corps  $K$  par les automorphismes constructibles de  $G$ . Comme  $G$  est une variété affine, un endomorphisme constructible de  $G$  s'écrit comme une composition d'un polynôme multiplicatif en  $x$  et  $x^{-1}$  et d'une puissance du Frobenius; ce dernier conserve les corps, et les seules applications  $x^n$  qui soient bijectives sont  $x$  et  $x^{-1}$ . Autrement dit, il n'y a que deux corps constructibles  $K_1$  et  $K_2$ , dont  $G$  soit le groupe multiplicatif: leurs additions se correspondent par conjugaison par l'inversion de  $G$ , et un nouveau quotient définit sans paramètres une copie du corps  $K$ .

**3.** Si  $G$  est le groupe  $SL_2(K)$ , on définit une copie du corps de base grâce au groupe vectoriel  $V$  dérivé d'un de ses Borels  $B$ ;  $V$  est conjugué de ses semblables puisque les Borels le sont. Mais les conjugaisons sont des morphismes algébriques, qui ne peuvent introduire de puissances du Frobenius, si bien qu'en caractéristique  $p$  comme en caractéristique nulle elles ne peuvent définir qu'un unique isomorphisme entre deux corps de la famille; un passage au quotient donne alors la copie du corps de base cherchée.

En généralisant ce dernier exemple, on répond à la Question D dans un cas significatif:

**Théorème 5.1.** *Un groupe algébrique simple (infini) permet de définir sans paramètres une copie du corps de base, même en caractéristique  $p$ .*

**Démonstration.** Les Borels du groupe sont conjugués, ainsi que les composantes connexes des groupes des éléments d'ordre  $p$  des centres de leurs dérivés, qui sont des groupes vectoriels (non triviaux!) d'après HUMPHREYS 1981, Proposition 20.2 p. 127 et Corollary 20.4 p. 130. **Fin**

Par ailleurs le Corollaire 4.7 appliqué aux groupes donne ceci:

**Corollaire 5.2.** *Tout isomorphisme entre un groupe algébrique simple  $G = G(K)$ , sur le corps  $K$  algébriquement clos, et un groupe  $H = H(L)$  algébrique sur le corps algébriquement clos  $L$ , lorsque ces deux groupes sont munis de leur structures de variétés respectives, envoie constructible sur constructible et fermé de Zariski sur fermé de Zariski.*

**Démonstration.** Tout isomorphisme échange les ensembles définissables, qui sont dans le cas présent les constructibles ; quand on considère les groupes comme des variétés algébriques, les transports de structure échantent les fermés de Zariski ; il en est de même des automorphismes de groupe constructibles, car ce sont des morphismes en caractéristique nulle, et des quasi-morphismes en caractéristique  $p$  (combinaisons de morphismes et de puissances négatives du frobenius). **Fin**

Ce Corollaire 5.2 enveloppe d'un mystère ténébreux la Conjecture d'Algébricité : si elle est vérifiée, il y aura une façon intrinsèque de distinguer les fermés de Zariski parmi les ensembles définissables dans les groupes simples nus ! Une réciproque est donnée par HRUSHOVSKI-ZIL'BER 1996.

D'autre part, nous avons montré que, si  $A$  est un groupe de rang de Morley fini (ou même seulement superstable) d'automorphismes de  $G$ , il est composé d'automorphismes constructibles. Mais, pour les applications, on a besoin d'un résultat plus fort : sa composante connexe  $A^\circ$  est formée d'automorphismes intérieurs, comme il est montré - un peu rapidement à mon goût<sup>12</sup> - dans ABC 2008, Fact 2.25 p. 134, qui s'appuie sur un théorème de HUMPHREYS 1981 qu'il vaut la peine de citer in extenso :

**Theorem** (HUMPHREYS 1981, p.160). *Let  $G$  be semisimple.*

(a)  $\text{Aut } G = (\text{Int } G)D$ .

(b) *The natural map  $D \rightarrow \Gamma$  induces a monomorphism  $\text{Aut } G/\text{Int } G \rightarrow \Gamma$  ; in particular,  $\text{Int } G$  has finite index in  $\text{Aut } G$ .*

Chez Humphreys,  $\text{Aut } G$  désigne le groupe des automorphismes du groupe  $G$  qui sont, ainsi que leurs inverses, des *morphismes* de la variété de  $G$  : ce sont des applications polynomiales puisque la variété de  $G$  est affine. En caractéristique nulle, ils sont identiques aux automorphismes constructibles du groupe  $G$ . En caractéristique  $p$ , les automorphismes constructibles de  $G$  sont des quasi-morphismes ; comme  $G$  est un groupe affine définissable sans paramètres, ils sont de la forme  $\alpha.\varphi$  où  $\alpha$  est un polynôme et  $\varphi$  l'automorphisme induit par une puissance du frobenius ; en minimisant son degré, on peut supposer que  $\alpha$  n'est pas un polynôme en les puissances  $p^\circ$  des inconnues ; l'inverse de  $\alpha$  est alors de la même forme  $\beta.\varphi'$  ;  $\alpha.\beta.\varphi'^{-1} = \text{Id}$ , et en différentiant on voit que  $\varphi'$  est l'identité, si bien que  $\alpha$  est un isomorphisme au sens géométrique.

---

<sup>12</sup> Que signifie "As  $F$  can be interpreted in a Borel  $B$  and the action of  $\text{Aut}(F)$  on  $F$  can be interpreted via its action on  $B$ , ..." ? Le contexte subtil à l'extrême de cette démonstration force à remarquer que la citation de Humphreys n'est pas conforme à l'original.

On voit que  $\text{Aut } G$  est normal dans le groupe des automorphismes constructibles de  $G$ , car  $\varphi.\alpha = \alpha'.\varphi$ , où le polynôme  $\alpha'$  est obtenu en faisant agir  $\varphi$  sur les coefficients du polynôme  $\alpha$ .

$\text{Int } G$  est le groupe des automorphismes intérieurs, isomorphe à  $G$ ,  $D$  est le groupe des automorphismes qui fixent un borel et un tore maximal donnés, et  $\Gamma$  est le groupe (fini) des automorphismes du système de racines associé.

On en déduit, suivant Altinel, Borovik et Cherlin, que  $\text{Aut } G$  est définissable dans le corps  $K$ . La suite demande à être précisée :

**Théorème 5.3.** *Soient  $G$  un groupe algébrique simple sur un corps algébriquement clos  $K$ , et  $A$  un groupe d'automorphismes de  $G$  tel que la structure  $(G,A)$  soit superstable ; alors les éléments de  $A$  sont des morphismes géométriques.*

**Démonstration.** D'après le Corollaire 4.8,  $A$  est formé d'automorphismes de groupe constructibles. En caractéristique nulle, ce sont des morphismes.

En caractéristique  $p$ , ce sont des composés de morphismes et d'action d'une puissance du Frobenius sur une représentation linéaire à coefficients entiers du groupe  $G$ . Comme  $\text{Aut } G$  est définissable, on peut l'inclure dans  $A$  en préservant la superstabilité ; et alors le quotient  $A/\text{Aut } G$ , s'il n'était pas trivial, serait cyclique infini. C'est clairement impossible dans le cas  $\omega$ -stable ; pour obtenir l'impossibilité dans le cas superstable, on vérifie que l'hypothèse est conservée quand on remplace  $(G,A)$  par une extension élémentaire saturée.

**Fin**

**Remarque finale 5.4.** Au bout du compte, nous aboutissons à une cohérence de notations, car le groupe, noté  $\text{Aut } G$  par Humphreys, des automorphismes géométriques de  $G$  est bien le plus grand groupe constructible et le plus grand groupe superstable d'automorphismes de  $G$ , constitué de ceux qui fixent point par point le corps du Théorème 5.1 : c'est celui que nous avons noté  $\text{Aut}(G)$  ! C'est à la fois rassurant et troublant, car, si la notion de constructible se suffit à elle-même au niveau de  $G$ , celle de morphisme n'a de sens que vue de  $K$ .

Les automorphismes de  $K$  agissent de façon évidente sur  $G$ , une fois qu'on a fixé une définition sans paramètres de ce dernier (considéré comme un groupe *défini* dans  $K$ ), mais ce qui est véritablement intrinsèque, c'est l'action que nous avons décrite des automorphismes de  $G$  (considéré comme un objet *définissable* dans  $K$ ) non pas sur  $K$ , mais sur une copie  $L$  de  $K$ , dont le noyau est formé des automorphismes géométriques de  $G$ .

L'amour de la généralité, et celui de ma spécialité mathématique favorite, m'invitent à conclure par une dernière question :

**Question E.** *Peut-on trouver une raison purement modèle-théorique expliquant pourquoi la composante connexe de  $\text{Aut}(G)$  est formée des automorphismes*

*intérieurs, c'est-à-dire expliquant pourquoi le groupe  $\text{Aut}(G)$  a même dimension que  $G$  ?*

**Exercice final.** La citation ouvrant cet article est extraite de l'édition de 1932 du Larousse du XX<sup>e</sup> siècle ; j'invite mes lectrices et mes lecteurs à essayer de la placer dans la conversation.

## Références

- ABC 2008            Tuna Altinel, A.V. Borovik & Gregory Cherlin, *Simple Groups of Finite Morley Rank*, American Mathematical Society
- BERLINE-LASCAR 1986        Chantal Berline & Daniel Lascar, *Superstable Groups*, *Annals of Pure and Applied Logic*, 30.1, 1-41
- BHMPW 2009            Andreas Baudisch, Martin Hils, Amador Martín Pizarro & Frank Wagner, *Die böse Farbe*, *Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu*, 8, 415-443
- BMPZ 2007            Andreas Baudisch, Amador Martin-Pizarro & Martin Ziegler, *Red Fields*, *the Journal of Symbolic logic*, 72, 207-225
- BOREL 1970            Armand Borel, *Properties and linear representations of Chevalley groups*, *Lecture Notes in Mathematics* 131
- BOREL-TITS 1973        Armand Borel & Jacques Tits, *Homomorphismes "abstrait" de groupes algébriques simples*, *Annals of Mathematics*, 97, 499-571
- BOROVIK 1984            Aleksandr Vasil'evič Borovik, *Théorie des groupes finis et groupes incomptablement catégoriques* (en russe), prépublication n° 511, Novosibirsk
- BOROVIK 2024            Id., *Finite group actions on abelian groups of finite Morley rank*, à *Model Theory*, Vol. 3, nb 2, 539-569
- BOROVIK-NESIN 1994        Aleksandr Vasil'evič Borovik & Ali Azizoglu Nesin, *Groups of Finite Morley Rank*, Clarendon Press, Oxford
- CACEYDO-HILS 2015        Juan Diego Caceydo & Martin Hils, *Bad fields with torsion*, *the Journal of Symbolic Logic*, 80, 221-233
- CHERLIN 1979            Gregory Cherlin, *Groups of small Morley rank*, *Annals of Mathematical Logic*, 17, 1-23
- HRUSHOVSKI-ZIL'BER 1996    Ehud Hrushovski & Boris Zil'ber, *Zariski geometries*, *Journal of the American Mathematical Society*, 9, 1-56
- HUMPHREYS 1981        James E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, Springer
- MACINTYRE 1971        Angus Macintyre, *On  $\omega_1$ -categorical theories of fields*, *Fundamenta Mathematicae*, 71, 1-25
- ROSENLICHT 1961        Maxwell Rosenlicht, *On a result of Baer*, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 12, 984-988
- MUSTAFIN-POIZAT 2006        Yerulan Mustafin & Bruno Poizat, *Sous-groupes superstables de  $SL_2(K)$  et de  $PSL_2(K)$* , *Journal of Algebra*, 297, 155-167

- POIZAT 1983 Bruno Poizat, *Une théorie de Galois imaginaire*, the Journal of Symbolic Logic, 48, 1151-1170
- POIZAT 1985 Id., *Cours de Théorie des Modèles*, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah
- POIZAT 1987 Id., *Groupes Stables*, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah
- POIZAT 1988 Id., *MM. Borel, Tits, Zil'ber et le Général Nonsense*, the Journal of Symbolic Logic, 53, 124-131
- POIZAT 2001 Id., *Quelques modestes remarques à propos d'une conséquence inattendue d'un résultat surprenant de Monsieur Frank Olaf Wagner*, the Journal of Symbolic Logic, 66, 1637-1646
- ROCHE 2017 Olivier Roche, Thèse de doctorat, Université Claude Bernard (Lyon-I)
- STEINBERG 1974 Robert Steinberg, *Abstract homomorphisms of simple algebraic groups*, Séminaire Bourbaki, n° 435, 307-426
- THOMAS 1983 Simon Thomas, *The classification of simple periodic linear groups*, Archiv der Math., 41, 103-116
- WAGNER 2001 Frank Wagner, *Fields of finite Morley rank*, the Journal of Symbolic Logic, 66, 703-706
- WAGNER 2003 Id., *Bad fields in positive characteristic*, Bulletin of the London Mathematical Society, 35, 499-502
- WEIL 1948 André Weil, *Foundations of Algebraic Geometry*, American Mathematical Society
- ZIL'BER 1977 Boris Iosifovič Zil'ber, *Groupes et anneaux de théorie catégorique (en russe)*, Fundamenta Mathematicae, 55, 173-188
- ZIL'BER 1980 Id., *Totally categorical theories; structural properties and the non-finite axiomatizability*, Lecture Notes in Mathematics, 834, 381-410
- ZIL'BER 1984 Id., *Some model theory of simple algebraic groups over algebraically closed fields*, Colloquium Mathematicum, 48, 173-180

13 novembre 2024