Marlin H.

Pseudoendliche Körper. Teil 1

15.1.19 **§1 Etwas Körpertheorie und alg. Geometrie**

K Körper, K^{alg} alg. Abschluss, $\mathcal{U} \succ K^{alg}$ Monstermodell von ACF_p ($p = \mathrm{char}(K)$).

Fakt 1.1 (Hilbertscher Basissatz): Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $K[X_1, \ldots, X_n]$ noethersch, d.h. jedes Ideal $I \trianglelefteq K[X_1, \ldots, X_n]$ ist endlich erzeugt.

Def Seien $f_1, \ldots, f_m \in K[X_1, \ldots, X_n]$, $I = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle \trianglelefteq K[\bar{X}]$.

Dann ist $V(I) := \{\bar{a} \in \mathcal{U}^n : f_1(\bar{a}) = \ldots = f_m(\bar{a}) = 0\}$
$= \{\bar{a} \in \mathcal{U}^n : g(\bar{a}) = 0 \text{ f.a. } g \in I\}$

eine affine K-Varietät. Ist I ein Primideal, heißt $V(I)$ irred. K-Varietät. (oder: K-irred. K-Varietät)

Ist $IK^{alg}[\bar{X}] = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle_{K^{alg}[\bar{X}]} \trianglelefteq K^{alg}[\bar{X}]$ prim, heißt $V(I)$ absolut irreduzibel

($\Leftrightarrow I\mathcal{U}[\bar{X}]$ prim).

Bem 1.2 (a) Die K-Untervarietäten von $\mathcal{U}^n = \mathbb{A}^n(\mathcal{U})$ sind die abg. Mengen einer noetherschen Topologie (d.h. DCC auf abg. Mengen), die K-Zariski-Top. Betrachtet man die $\mathcal{U}$-Untervarietäten von $\mathcal{U}^n$, erhält man die Zariski-Topologie.

(b) Eine K-Varietät $V \subseteq \mathcal{U}^n$ ist K-irreduzibel, gdw es keine echten abgeschlossenen Unter-K-Varietäten $W_1, W_2 \subsetneq V$ gibt mit $W_1 \cup W_2 = V$.

(c) Eine K-Varietät ist immer endl. Vereinigung endl. vieler K-irred. Var. $V_1, \ldots, V_n$. Falls $V_i \not\subseteq V_j$ $\forall\, i \neq j$, so sind diese bis auf Perm. eindeutig bestimmt und heißen K-irred. Komponenten.

Def: Ist $V \subseteq \mathfrak{U}^n$ K-irred. Var., so ist ihr generischer Typ über K gegeben durch $p_V^K(\bar{x}) \in S_n^{ACF_p}(K)$ mit $p_V^K(\bar{x}) \vdash f_1(\bar{x}) \doteq 0 \wedge \ldots \wedge f_m(\bar{x}) = 0$ für $V = V(\langle f_1, \ldots, f_m \rangle)$ sowie $p_V^K(\bar{x}) \vdash g(\bar{x}) \neq 0$ f.a. $g \notin \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$
d.h. f.a. g mit $V(\langle f_1, \ldots, f_m, g \rangle) \subsetneq V$.

$\rightsquigarrow$ Nach QE in ACF_p ist p_V^K vollständig.

Sei V irred. Dann ist $\dim_K(V) = \max\{d \in \mathbb{N} :$ es ex. $\emptyset \neq V_0 \subsetneq \ldots \subsetneq V_d = V$ mit V_i K-irred. $\forall i\}$

Für allgemeine K-Var. $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ irred. Komponenten, so $\dim_K(V) \doteq \max \dim_K(V_i)$

Bem: $\dim_K(V) = \dim_{\mathfrak{U}}(V) =: \dim(V)$

Bem. 1.3: Sei V K-irred. Varietät, $V = V(I)$ für $I \trianglelefteq K[\bar{X}]$ Primideal.

(a) $\dim(V) \overset{!}{=} \operatorname{trdeg}(\operatorname{Quot}(K[\bar{X}]/I)/K) = \max\{\operatorname{trdeg}(\bar{a}/K) : \bar{a} \in V(\mathfrak{U})\}$
das ist die schwierige Gleichung, siehe Alg. Geom.
$= \operatorname{trdeg}(\bar{a}/K)$ für $\bar{a} \models p_V^K(\bar{x})$

(b) Eine K-def.bare TM (qf-$\mathcal{L}_{ring}(K)$-def.bare) $C \subseteq V$ ist Zariski-dicht in V gdw. $\max\{\operatorname{trdeg}(\bar{a}/K) : \bar{a} \in C(\mathfrak{U})\} = \dim(V)$ (gdw $p_V^K \vdash \bar{x} \in C$)

Def: Sei $\bar{a} \in \mathfrak{U}^n$. Dann ist $\operatorname{Loc}(\bar{a}/K) = V(I(\bar{a}/K))$, wobei $I(\bar{a}/K) = \{g \in K[\bar{X}] : g(\bar{a}) = 0\}$

Bem. 1.4: Nach Konstruktion gilt $p^K_{\operatorname{Loc}(\bar{a}/K)}(\bar{x}) = tp^{ACF}(\bar{a}/K)$.

Satz 1.5 (Herrmann, Seidenberg, van den Dries-Schmidt):
F.a. $n, N, k \in \mathbb{N}$ ex. $\mathcal{L}_{ring}$-Fml $\varphi_{n,N,k}$ in den Koeff. der Polynome $f_1, \ldots, f_k \in K[X_1, \ldots, X_n]$ von Grad $\leq N$, K ein beliebiger Körper, s.d. $\langle f_1, \ldots, f_k \rangle \trianglelefteq K[\bar{X}]$ prim ist gdw. $\varphi_{n,N,k}$ für das Koeff.tupel gilt.

"Gutes Bachelorarbeitsthema"

Korollar 1.6: Für alle $n, N, k \in \mathbb{N}$ ex. ql. $\mathcal{L}_{ring}$-Fml $\chi_{n,N,k}$ in den Koeffizienten von $f_1, \ldots, f_k$ Polynome von Grad $\leq N$ in $X_1, \ldots, X_n$ über einem Körper, s.d. $\chi_{n,N,k}$ gilt gdw. $\langle f_1, \ldots, f_k \rangle$ absolut irred ist.

Bew: Sei $\varphi_{n,N,k}(\bar{z})$ wie in Satz 1.5. Sei $\chi_{N,n,k}(\bar{z})$ ql. mit $ACF_0 \vdash \forall \bar{z}\, (\varphi_{n,N,k}(\bar{z}) \leftrightarrow \chi_{N,n,k}(\bar{z}))$

$\langle f_1, \ldots, f_k \rangle K^{alg}[\bar{X}]$ prim gdw. $K^{alg} \models \varphi_{n,N,k}(\bar{c})$

gdw. $K^{alg} \models \chi_{N,n,k}(\bar{c})$ gdw. $K \models \chi_{N,n,k}(\bar{c})$ ☐

Lemma 1.7: Sei $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ eine $\mathcal{L}_{ring}$-Fml und $d \in \mathbb{N}$. Dann ex. $\theta_d(\bar{y})$ (ql.) $\mathcal{L}_{ring}$-Fml mit $\dim(\overline{\varphi(\mathcal{U}, \bar{b})}^{Zar}) = d$ gdw. $\mathcal{U} \models \theta_d(\bar{b})$.

Bew: ACF_p elim. $\exists^\infty x$ und ist streng min. Somit ist alg. Dim. def.bar (= dim) mittels

$$\dim(\varphi(\mathcal{U}, \bar{b})) \geq d \iff \bigvee_{\substack{\{i_1, \ldots, i_d\} = I \subseteq \{1, \ldots, n\} \\ |I| = d \\ \{1, \ldots, n\} \setminus I = \{j_1, \ldots, j_{n-d}\}}} \exists^\infty x_{i_1} \ldots \exists^\infty x_{i_d} \exists x_{j_1} \ldots x_{j_{n-d}}\, \varphi(\bar{x}, \bar{b})$$

☐

Def: K perfekt. Eine Körpererw. L/K heißt regulär, falls $qftp(L/K) \vdash qftp(L/K^{alg})$

Lemma 1.8: K perfekt.

(a) L/K ist regulär gdw. L_0/K regulär f.a. $K \subseteq L_0 \subseteq L$ mit L_0/K endl. erz.

(b) Sei $L_0 = K(\bar{a})/K$ mit $\bar{a}$ endl. Tupel. Dann ist L_0/K regulär gdw $Loc(\bar{a}/K)$ abs. irred. ist.

(c) L/K ist regulär $\iff$ K ist rel. alg. abg. in L, d.h. $L \cap K^{alg} = K$.

§2 ACFA (Wdh. & Neues)

Satz 2.1: ACF_p eliminiert Imaginäre, d.h. für E def-bare Äq.relation auf L^n, $L \models ACF_p$, ex. $f: L^n \to L^m$ def-bar mit $f(\bar{a}) = f(\bar{b})$ gdw $\bar{a} E \bar{b}$
(d.h. $\bar{f}: L^n/E \hookrightarrow L^m$)

Beispiel: Auf L^2 definiere $(a,b) E_2 (a',b')$ gdw $\{a,b\} = \{a',b'\}$
Betrachte $S_2: L^2 \to L^2$ $S_2(x,y) = (x+y, x \cdot y)$

Mithin: ACF und ACF^{eq} sind "dasselbe"

Letzte Woche gesehen: $\mathcal{L}_\sigma = \mathcal{L}_{ring} \cup \{\sigma\}$.
$ACF_\sigma = ACF + \sigma$ ist $\mathcal{L}_{ring}$-Autom
ACFA = Modellbegleiter von ACF_σ existiert (d.h. die ex. abg. Modelle von ACF_σ bilden eine elem. Klasse, und deren Theorie ist ACFA) Es gilt auch $ACFA = T_{K_p}A$

Axiome von ACFA: $(L,\sigma) \models ACFA$ gdw.
(1.) $L \models ACF$
(2.) $\sigma \in Aut(L)$
(3.) Für jede (absolut) irred. Var. $U \subseteq L^n$ und jede abs. irred. $W \subseteq U \times \sigma(U)$ mit $\pi_1(W) \subseteq U$ Zar. dicht und $\pi_2(W) \subseteq \sigma(U)$ Zariski-dicht: ex. $\bar{a} \in L^n$ mit $(\bar{a}, \sigma(\bar{a})) \in W$
π_1 / π_2: Proj. auf Koord.
$\sigma(U)$: Wende σ auf Koeff. an.

Nach Satz 1.5, Lemma 1.7, und Bem 1.3(b) sind dies def-bare Bedingungen.
(für alle N, n, k ein Axiom wie in (3.))

Bew. skizze, warum dies die ex. abg. Modelle axiomatisiert:
* Sei (L,σ) ex. abg. von $T_{K_p}A$. Dann gilt $L = L^{alg}$, da σ auf L^{alg} fortgesetzt werden kann.

$U^\sigma = \sigma(U)$

Sei ein Axiom der Form $U \times U^\sigma \supseteq W \subseteq L^{2n}$ gegeben

$U^{\subseteq n_1}$ $\quad$ $\subseteq U^\sigma$

Sei $p_W^2(\bar x, \bar y) \in S_{2n}(L)$, $(\bar a, \bar a') \models p_W^2 \overset{\text{zar dicht}}{\rightsquigarrow} \bar a \models p_U^L,\ \bar a' \models p_{\sigma(U)}^L$

Somit ex. $\tilde\sigma : L(\bar a) \cong L(\bar a')$ mit $\tilde\sigma\restriction_L = \sigma$ und $\tilde\sigma(\bar a) = \bar a'$.

(Strukturtransport)

$$\begin{tikzcd} & L(\bar a) \arrow[d, "\tilde\sigma"] \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & \\ \sigma \circlearrowright L \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & L(\bar a') & L(\bar a, \bar a')^{alg} \\ & & \end{tikzcd}$$

kp. theorie

$\Rightarrow \exists \tilde{\tilde\sigma} \in Aut(L(\bar a, \bar a')^{alg})$

mit $\tilde{\tilde\sigma}\restriction_{L(\bar a)} = \tilde\sigma$

Es gilt nach Konstruktion $(\bar a, \tilde{\tilde\sigma}(\bar a)) \in W$. Da $(L, \sigma) \subseteq (L(\bar a, \bar a')^{alg}, \tilde{\tilde\sigma})$ gilt und (L, σ) ex. abg. ist, folgt, dass es $\bar b \in L^n$ gibt mit $(\bar b, \sigma(\bar b)) \in W$.

* Sei $(L, \sigma) \models$ Axiome (1), (2), (3)

Z: (L, σ) ist ex. abg.: Sei hierzu $(L, \sigma) \subseteq (M, \sigma)$ und $\bar a \in M^n$, $\varphi(\bar x)$ qf $\mathcal{L}_\sigma(L)$-Fml mit $(M, \sigma) \models \varphi[\bar a]$. Z: $(L, \sigma) \models \exists \bar x\, \varphi(\bar x)$.

OE $\varphi(\bar x) \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} f_i(\bar x, \sigma(\bar x), \dots, \sigma^\ell(\bar x)) = 0 \wedge g(\bar x, \sigma(\bar x), \dots, \sigma^\ell(\bar x)) \neq 0$

für $f_i, g \in K[\bar X_0, \dots, \bar X_\ell]$

(disjunktive Normalform)

Trick: $x \neq 0 \Leftrightarrow \exists y\ x \cdot y - 1 = 0$

- OE: kein g ($\exists \bar x y\ \tilde\varphi(\bar x, y)$ statt $\exists \bar x\, \varphi(\bar x)$)
- OE $\ell = 1$ setze $\tilde X = X, \sigma(X), \dots, \sigma^{\ell-1}(X)$

  $\tilde\varphi = \varphi(\bar X_0, \dots, \bar X_{\ell-1}, \bar X_\ell) \wedge \bigwedge_{i=0}^{\ell-1} \sigma(\bar X_i) = \bar X_{i+1}$
- Sei nun $\bar a \in M^n$ mit $\models \varphi[\bar a, \sigma(\bar a)]$

  φ Konjunktion von Polynomgleichungen

  Setze $W := Loc(\bar a, \sigma(\bar a)/L)$, $U = Loc(\bar a/L)$

  $\Rightarrow \sigma(U) = Loc(\sigma(\bar a)/L)$

  $L^{2n} \supseteq$ $\quad$ $L^n \supseteq$

Dies ist eine Instanz von (3.), also ex. $\bar b \in L^n$ mit $(\bar b, \sigma(\bar b)) \in W$

Da $\varphi[M] = \{\bar{b} \in M^n : (\bar{b}, \sigma(\bar{b})) \in W\}$, folgt
$(L, \sigma) \models \varphi[\bar{b}]$ ☑

Warum hat ACFA IP?

Satz 22: (Jede Vervollst. von) ACFA hat IP.

Bew: (char $\neq 2$) $\varphi(x, y) \equiv \sigma(x) = x \wedge \sigma(y) = y$
$\wedge \exists z (z^2 = x + y \wedge \sigma(z) = z)$

Beh: $\varphi(x, y)$ hat IP.

Sei dazu $(L, \sigma) \models$ ACFA, $F = Fix(\sigma) = \{a \in L : \sigma(a) = a\}$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wähle Variablen $X_1, \ldots, X_n$, $(Y_I)_{I \subseteq \{1, \ldots, n\}}$

$W_{i,J} := X_i + Y_J \in L(\bar{X}, \bar{Y}) = M$

$W_{i,J}$ sind multiplikativ unabh. in $M^\times / (M^\times)^2$ (einfach)

Für $z_{i,J} \in M^{alg}$ mit $z_{i,J}^2 = W_{i,J}$ gilt dann

$z_{i,J} \notin M[z_{j,K} : (j, K) \neq (i, J)]$

$N := M[z_{i,J} : i \in \{1, \ldots, n\}, J \subseteq \{1, \ldots, n\}]$

Ex. $\tilde{\sigma} \in Aut(N)$ mit $\tilde{\sigma} \restriction_L = \sigma$, $\tilde{\sigma}(X_i) = X_i$,
$\tilde{\sigma}(Y_I) = Y_I$, $\tilde{\sigma}(z_{iJ}) = z_{iJ}$ gdw. $i \in J$

(L, σ) ex. abg. (Galoistheorie) ☑

$\Rightarrow$ finde 'Zeugen für IP' in L.