Martin Hils - ~~PA~~ ACFA & Psf II 22.01.2019

Nachtrag.

Satz (sehr tief. Hrushovski 1996):

Sei Q die Menge der Primzahlpotenzen.

Für $q = p^r \in Q$ sei $L_q := (\mathbb{F}_q^{alg}; x \mapsto x^q)$

Sei U NHUF auf Q. Dann ist $\prod_U L_q \models ACFA$.

§3 Pseudoendliche Körper

Def^n: Ein Pseudoendlicher Körper ist ein unendliches Modell der $\mathcal{L}_{Ring}$-Theorie aller endlichen Körper.

(K ist pseudoendlich gdw es U NHUF auf Q gilt mit $K \equiv \prod_U \mathbb{F}_q$)

Def^n: Ein Körper K heißt PAC, falls jede abs. irr^ble K-Varietät $V \subseteq (K^{alg})^n$ einen K-rationalen Punkt enthält (d.h. es gilt $\bar{a} \in V \cap K^n$).

Bem: Nach Satz 1.5 ist PAC $\mathcal{L}_{Ring}$-ux^bar.

Satz (Ax 168) 3.1: Ein Körper K ist pseudoendlich gdw erfüllt sind:

(1) K ist perfekt

(2) $\forall n \geq 1$ hat K genau eine (sep^ble) Körpererw. von Grad n

(3) K ist PAC.

Bew: pseudoendlich $\Rightarrow$ (1),(2): $\left\{ \begin{array}{l} (1): p \neq 0 \rightarrow \forall x \exists y\, y^p = x \quad (p \text{ prim}) \\ (2): \text{ÜA} \end{array} \right.$

" $\Rightarrow$ (3) folgt aus:

Satz 3.2 (Lang-Weil Abschätzungen)

Für alle $N, n, d \in \mathbb{N}$ $\exists\, c = c(N, n, d) \in \mathbb{N}$ sodass in jedem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ gilt:

Ist $V \subseteq (\mathbb{F}_q^{alg})^n$ abs. irr. $\mathbb{F}_q$-Varietät von Dim d, definiert durch Polynome von Grad $\leq N$

so gilt $\left|\#(V \cap \mathbb{F}_q^n) - q^d\right| \leq c\, q^{d-1/2}$

Insbesonderes gilt für $q >> 0$, dass $V \cap \mathbb{F}_q^n \neq \emptyset$

Somit ist jedes pseudoendlicher Körper PAC

Rückrichtung, (1)+(2)+(3) $\Rightarrow$ pseudoendlich (ohne Bew) $\square_{3.1}$

Sei Psf die L_{Ring}-Th^ie der pseudlichen Körper (ex. nach 3.1).

Ziel: ① $F, F' \models Psf$, so $F \equiv F'$ gdw. $Abs(F) \cong Abs(F')$,
wobei $Abs(K) := Prim(K)^{alg} \cap K$

② Allgemeiner $\begin{matrix} K & , & K' \\ \cap & & \cap \\ F & & F' \end{matrix}$ $\models Psf$ mit $K^{(\prime)}$ rel. alg. abg. in $F^{(\prime)}$, $f : K \cong K'$, so ist f elementar.
$F \models Psf$

③ Jede Vervollständigung von Psf ist einfach mit IP.

Alles folgt aus:

Satz 3.3: ① Ist $(L, \sigma) \models ACFA$, so ist $Fix(\sigma) := \{a \in L : \sigma(a) = a\}$ pseudoendlich.

② Umgekehrt ex. zu $F'' \models Psf$ ein $F' \succeq F''$ mit $F' = Fix(\sigma)$ für ein $(L, \sigma) \models ACFA$

zu ①: $F := Fix(\sigma)$ ist perfekt ✓

Lemma 3.4:

(a) Hat der Körper ≤ 1 sep. Körper erw. von Grad n für alle $n \geq 1$,
so ist jede endlich sep. Körper erw Galois mit zyklische ~~Galois Gruppe~~ Galoisgruppe.

(b) Ist jede endlich " " " von K " " "
so hat $K \leq 1$ sep Erw. von Grad n $\forall n \geq 1$.

Beweis: ÜA in Galoistheorie $\square$

zu 3.3①:
sei nun $F = Fix(\sigma)$ und K/F endlich Galois.
Dann gilt $\sigma(K) = K$, denn $\sigma|_{F^{alg}} \in Aut(F^{alg}/F)$

$\leadsto \sigma|K \in Gal(K/F)$. Da $K^{\langle \sigma|_K \rangle} = F \xrightarrow{\text{Galoistheorie}} \langle \sigma_K \rangle = Gal(K/F)$

$\overset{\text{Lemma}}{\Rightarrow}$ F hat ≤ 1 Erw. von Grad n $\forall n \geq 1$

Noch z.z: ≥ 1 Erw. $\forall n \geq 1$. Hierzu. Die Formel $\sigma^n(X) = X \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} \sigma^i(X) \neq X$
hat eine Lösung in $(M, \sigma^*) \supseteq (L, \sigma)$

Denn sind $t_1, \dots, t_n$ alg. unabhgig $/L$, so kann auf $L(t_1, \dots, t_n) =: M$ σ^* definieren durch $\sigma^*|_L = \sigma$, $\sigma^*(t_i) = t_{i+1}$, $i<n$, $\sigma^*(t_n) = t_1$

Man rechnet nach dass $\sigma^* \in Aut(M)$.

Da (L, σ) e.a., ex. $a \in L$ mit $\sigma^n(a) = a \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} \sigma^i(a) \neq a$.

Insb. liegen die Koeff von $\prod_{i=1}^{n-1} (X - \sigma^i(a))$ in $F = Fix(\sigma)$.

Somit gilt $a \in F^{alg}$.

$\Rightarrow [F(a) : F] = n$.

<u>Noch zz</u>: F ist PAC: Sei V abs. irr. F-Var. Dann gilt $\sigma(V)=V$.

Sei $W := \Delta = \{(x,y) \mid x=y\} \subseteq V \times V = V \times \sigma(V)$

$\pi_1(W) = V = \pi_2(W)$, W abs. irr (da $\cong V$)

ACFA Axiom $\Rightarrow \exists \vec{a} \in L^n$ mit $(\vec{a}, \sigma(\vec{a})) \in W$, somit $a \in V$ mit $\sigma(a)=a$

somit $a \in V \cap F^n$ $\square_{3.3(1)}$

<u>Bew von 3.3(2)</u>:

<u>Lemma 3.5</u>: Ist K PAC und K'/K reguläre Körperw. so ist K e.a. in K' (sogar äquivalent)

<u>Bew</u>: Für jedes $a' \in K'^n$ gilt $V := \mathrm{Locl}(a'/K)$ ist abs. irr K-Var.

Dies gilt sogar für jede offene Untervar $V \setminus W$ wobei $W \overset{a}{\subsetneq} V$.

Formeln der Form $x \in V \setminus W$ sind kofinal in qftp(a'/K).

Da K PAC ist, gilt $(V \setminus W) \cap K^n \neq \emptyset$.

Somit ist $K \subseteq_{e.a.} K'$ $\square$

<u>Lemma 3.6</u>: Sei $M \subseteq N$. Dann ist $M \overset{e.a.}{\subseteq} N$ gdw. es ex. $M^* \succeq M$ mit $M^* \supseteq N$.

<u>Bew</u>: Diagram Lemma $\square$

Sei nun $F' \models Psf$. Wähle $\sigma \in \mathrm{Gal}(F') = \mathrm{Aut}(F'^{alg}/F')$ mit $(F'^{alg})^{\sigma} = F'$.

(endliche Erw. sind zyklisch + Kompaktheit $\Rightarrow \sigma$ ex.)

$(F'^{alg}, \sigma) \subseteq (L_0, \sigma_0) \models$ ACFA, somit $F' \subseteq F_0 := \mathrm{Fix}(\sigma_0)$ rel. alg. abg

somit ist F_0/F' regulär

$\overset{3.5, 3.6}{\Rightarrow}$ Finde $F_0 \subseteq F_1'$ mit $F_1' \succeq F' = F_0'$

Ex $\sigma_1' \in \mathrm{Gal}(F_1')$ mit $(F_1'^{alg})^{\sigma_1'} = F_1'$ und $\sigma_1'|_{F_0^{alg}} = \sigma_0|_{F_0^{alg}}$.

PAPA:

$$\begin{tikzcd}
 & (L_0, \sigma_0) \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & \\
(F_0^{alg}, \sigma_0|_{F_0^{alg}}) \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & /// & (L_1, \sigma_1) \models \text{ACFA} \\
 & (F_1'^{alg}, \sigma_1') \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] &
\end{tikzcd}$$

somit $F_1 = \mathrm{Fix}(\sigma_1) \supseteq F_1'$ regulär, also ex. $F_2' \supseteq F_1$ mit $F_2' \succeq F_1'$

Auf diese Weise finden wir $(L_0, \sigma_0) \leq (L_1, \sigma_1) \leq \ldots$

$F = F_0' \subseteq \underset{F_0}{\mathrm{Fix}(\sigma_0)} \subseteq F_1' \subseteq \underset{F_1}{\mathrm{Fix}(\sigma_1)} \subseteq \ldots$

mit $F_i' \preceq F_{i+1}'$ und $F_i \preceq F_{i+1}$, so $F \preceq F' := \bigcup F_i' = \bigcup F_i = \mathrm{Fix}(\sigma)$; $(L, \sigma) = \bigcup (L_i, \sigma_i) \models$ ACFA $\square$

zu Ziel 2 ($\Rightarrow$ 1):

Ist nun $K \subseteq F$, $K' \subseteq F'$, $F, F' \models PSF$, $f: K \cong K'$

rel. alg. abg.

so ist f elementar:

Nach Satz 3.3, OE $F^{(\prime)} = \mathrm{Fix}(\sigma^{(\prime)})$ für $(L^{(\prime)}, \sigma^{(\prime)}) \models ACFA$.

Aus $f: K \cong K'$ folgt $f^{alg}: (K^{alg}, \sigma|_{K^{alg}}) \cong (K'^{alg}, \sigma'|_{K'^{alg}})$

(K hat ≤ 1 Erw. von Grad n $\forall n$;

Für K_n/K, K'_n/K' von Grad n, wähle Iso $f \subseteq f_n : K_n \xrightarrow{\cong} K'_n$

$f_n \circ \sigma|_{K_n}$ nicht unbedingt $= \sigma'|_{K'_n}$, aber $\sigma^{(\prime)}|_{K_n^{(\prime)}}$ erzeugt $\mathrm{Gal}(K_n^{(\prime)}/K^{(\prime)})$

also $f_n \circ \sigma|_{K_n} = (\sigma'|_{K'_n})^k$ ~~pame~~ $\cancel{k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$

für ein $k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

Finde l geeignet sodass für $\tilde{f}_n := \sigma'^{l} \circ f_n$ gilt $\tilde{f}_n \circ \sigma = \sigma'$)

Nach der letzter Vortrag ist f^{alg} elementar in ACFA

somit ist f elementar in PSF $\square$