Indiscernables, Beispiele, Lemmata

Christoph Kesting

23.10.2018

Literatur: K. Tent, M. Ziegler: A course in model theory

Definition 1 (ununterscheidbare Folge)**.** *Sei $(I, <)$ eine lineare Ordnung und $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Dann heißt eine Familie $(a_i)_{i \in I}$ von Tupeln aus M^k, wobei $k \in \mathbb{N}$ ist, ununterscheidbare Folge oder* indiscernable sequence*, falls für alle $\mathcal{L}$-Formeln $\phi(x_1, \dots, x_n)$ und allen $i_1 < \dots < i_n$ und $j_1 < \dots < j_n$ aus I gilt:*

$$\mathcal{M} \models \phi(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \leftrightarrow \phi(a_{j_1}, \dots, a_{j_n})$$

Ist $(a_i)_{i \in I}$ mit jeder linearen Ordnung eine ununterscheidbare Folge, so nennen wir $(a_i)_{i \in I}$ auch ununterscheidbare Menge.

Beispiel 2.

1. *Konstante Folgen sind ununterscheidbar.*
2. *Sei $\mathcal{M} \models DLO$, $\mathcal{L} = \{<\}$. Dann sind die ununterscheidbaren Folgen:*
   streng monoton wachsend, gegeben durch $\phi(x, y) \equiv x < y$.
   konstant, gegeben durch $\phi(x, y) \equiv x = y$.
   streng monoton fallend, gegeben durch $\phi(x, y) \equiv x > y$.
3. *Sei $\mathcal{M} \models T_{K-VR}$ in $\mathcal{L}_{K-VR}$ für einen Körper K. Dann sind die nicht-konstanten ununterscheidbaren Folgen linear unabhängige Elemente. Zudem sind sie immer ununterscheidbare Mengen. Wären sie linear abhängig, wären sie gegenseitig eindeutig definierbar und somit konstant.*
4. *Sei $\mathcal{M} \models ACF$. Dann sind die nicht-konstanten ununterscheidbaren Folgen genau die, deren Folgenglieder transzendent übereinander sind. Damit sind diese Folgen sogar total ununterscheidbar.*

Die Beobachtung aus Beispielen 3 und 4 motiviert die erste der folgenden Bemerkungen.

Bemerkung 3. *Sei $(a_i)_{i \in I}$ A-ununterscheidbar in $\mathcal{M}$.*

1. *Ist für ein $i \in I$ das zugehörige $a_i \in acl(A)$, so ist die ununterscheidbare Folge konstant.*

   Es gilt $a_i \in acl(A)$ nach Definition des acl genau dann, wenn für eine endliche A-definierbare Menge D gilt, dass $a_i \in D$ ist. Dann muss die ganze Folge im endlichen D liegen.

2. *Ist $J \subseteq I$ unendlich, dann ist $(a_i)_{i\in J}$ ebenfalls A-ununterscheidbar. Sind J und I ordnungsisomorph, so haben $(a_i)_{i\in I}$ und $(a_i)_{i\in J}$ den selben Typ über A. Insbesondere ist für einen Ordnungsisomorphismus $f : J \to I$ die Abbildung mit $a_i \mapsto a_{f(i)}$, die A festhält, partiell elementar.*

   Für $\subseteq$ ist die Aussage klar nach Einschränkung und f bildet Elemente des selben Typs auf den selben Typ ab.

3. *Ist f eine A-definierbare Funktion, so ist $(f(a_i))_{i\in I}$ auch A-ununterscheidbar.*

   Angenommen nicht. Wäre $(f(a_i))_{i\in I}$ A-unterscheidbar, gäbe es eine eine Formel die das bezeugt. Da f A-definierbar ist, können wir also auch Folgenglieder aus $(a_i)_{i\in I}$ unterscheiden. Widerspruch.

4. *Wir können uns aus einer ununterscheidbaren Folge in $\mathcal{M}$, ununterscheidbare Folgen in $\mathcal{M}^n$ erhalten. Wir konstruieren eine Folge J von aufsteigen Tupeln $\bar{i} = (i_1 < \cdots < i_n)$ mit $\bar{i} < \bar{j} :\Leftrightarrow i_n < j_1$. Dann sind die Tupel $(\bar{a}_{\bar{i}})_{i\in J}$ eine ununterscheidbare Folge in $\mathcal{M}^n$.*

   Klar, nach Einschränkung.

Definition 4 (Ehrenfeucht-Mostowsky-Typ)**.** *Sei $(I,<)$ eine unendliche lineare Ordnung und $(a_i)_{i\in I}$ eine Folge im M^k und $A \subseteq M$. Dann ist der Ehrenfeucht-Mostowsky-Typ*

$$\mathrm{EM}((a_i)_{i\in I}/A) = \left\{ \begin{matrix} \phi(x_1,\ldots,x_n) \\ \mathcal{L}(A)\text{-}Formel \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \mathcal{M} \models \phi(a_{i_1},\ldots,a_{i_n}) \textit{ für alle} \\ i_1 < \cdots < i_n \in I \textit{ und } n \in \mathbb{N} \end{matrix} \right\}.$$

Bemerkung 5. *Im allgemeinen ist der EM-Typ einer folge ein partieller Typ. Genauer ist der EM-Typ einer Folge genau dann vollständig, wenn die Folge ununterscheidbar ist.*

Betrachten wir beispielsweise $\mathbb{Q} \models DLO$ und eine eine Folge, die mit $2, 5, 2, \ldots$ beginnt, so wird der $EM(2, 5, 2, \ldots)$ von $\phi(x) \equiv x = x$ impliziert.

Lemma 6 (Standard Lemma)**.** *Es seien I und J zwei unendliche lineare Ordnungen und $(a_i)_{i\in I}$ eine Folge von Elementen in M. Dann existiert eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$ mit einer ununterscheidbaren Folge $(b_j)_{j\in J}$, die $\mathrm{EM}((a_i)_{i\in I})$ realisiert.*

Beweis. Sei C eine Konstantenmenge mit einer zu J isomorphen Ordnung. Es seien

$$T' = \{\phi(\bar{c}) | \phi(\bar{x}) \in \mathrm{EM}((a_i)_{i\in I})\}$$
$$T'' = \left\{\phi(\bar{c}) \leftrightarrow \phi(\bar{d}) | \bar{c}, \bar{d} \in C\right\},$$

wobei $\bar{c}$ und $\bar{d}$ aufsteigend angeordnet sind.

zz: $T \cup T' \cup T''$ ist konsistent.

Mit Kompaktheit reicht es zu zeigen, dass

$$T_{C_0,\Delta} = T \cup \{\phi(\bar{c}) \in T' | \bar{c} \in C_0\} \cup \left\{\phi(\bar{c}) \leftrightarrow \phi(\bar{d}) | \phi(\bar{x}) \in \Delta, \bar{c}, \bar{d} \in C_0\right\}$$

für endliche Mengen $\Delta \subseteq \mathrm{EM}((a_i)_{i\in I})$ und $C_0 \subseteq C$ mit angeordneten Tupeln der Länge n gilt.

Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass die a_i paarweise verschieden sind, und somit $A = \{a_i | i \in I\}$ eine geordnete Menge ist. Wir definieren eine

Äquivalenzrelation auf $[A]^n$ durch $\bar{a} \sim \bar{b}$ genau dann, wenn $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) \leftrightarrow \phi(\bar{b})$ für alle $\phi(\bar{x}) \in \Delta$, wobei $\bar{a}, \bar{b}$ aufsteigend angeordnet sind. Dann ergeben sich maximal $s^{|\Delta|} \in \mathbb{N}$ viele Äquivalenzklassen und mit dem Satz von Ramsey erhalten wir $B \subseteq A$, wobei B unendliche mit allen n-elementigen Teilmengen in der selben Äquivalenzklasse. Wir interpretieren dann die $c \in C_0$ als $b_c \in B$ mit der selben Ordnung wie die C. Es folgt, dass $(\mathcal{M}, b_c)_{c \in C_0} \models T_{C_0,\Delta}$. Wir schließen mit Kompaktheit und vergessen danach die Konstanten wieder. $\square$

Sei nun T abzählbar und vollständig mit unendlichen Modellen.

Lemma 7 (Shelah). *Für alle A existiert ein λ, sodass für alle linearen Ordnungen I von Kardinalität λ und für jede Familie $(a_i)_{i \in I}$ eine A-ununterscheidbare Folge $(b_j)_{j<\omega}$ besitzt, sodass für alle $j_1 < \cdots < j_n < \omega$ eine Folge $i_1 < \cdots < i_n \in I$ existiert mit $tp(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}/A) = tp(b_{j_1}, \ldots, b_{j_n})$.*

Beweis. Sei $\tau = \sup_{n<\omega} |S_n(A)|$. Wir fordern, dass λ das folgende erfüllt:

1. $cf(\lambda) > \tau$
2. Für alle $\kappa < \lambda$ und alle $n < \omega$ existiert ein $\kappa' < \lambda$ mit $\kappa' \to (\kappa)^n_\tau$.

Mit Erdös-Rado können wir $\lambda = \beth_{\tau^+}$ wählen.

1. τ^+ ist eine Nachfolgerkardinalzahl, somit regulär, also $cf(\lambda) \geq cf(\tau^+) = \tau^+ > \tau$.
2. Für τ endlich folgt alles aus Ramsey. Sei also τ unendlich. Mit Erdös-Rado gilt $\kappa' = \beth_{n-1}(\kappa)^+ \to (\kappa^+)^n_\kappa$ und impliziert die Zerlegung für $\kappa \geq \tau$ direkt. Für $\kappa < \tau$ wählen wir die Lösung für τ.

Unser Ziel ist es, eine Folge von Typen $p_1(x_1) \subseteq p_2(x_1, x_2) \subseteq \ldots$ mit $p_n \in S_n(A)$ zu konstruieren, sodass für alle $\kappa < \lambda$ ein $I \subseteq I'$ mit $|I'| = \kappa$ existiert, sodass $tp(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}/A) = p_n$ für alle $i_1 < \cdots < i_n$ aus I' gilt. Wir werden daraufhin $(b_i)_{i<\omega}$ als die Realisierung von $\bigcup_{i<\omega} p_i$ wählen.

Für $n = 1$ wählen wir einen Typen $p_1 \in S_1(A)$ mit kofinal vielen Realisierungen in den $(a_i)_{i \in I}$. Dies ist möglich, da $cf(\lambda) > \tau$.

Für $(n-1) \to n$ wählen wir zu p_{n-1} und zu beliebigem $\kappa < \lambda$ das $\kappa' < \lambda$ mit $\kappa' \to (\kappa)^n_\tau$. Wir erhalten außerdem ein $I' \subseteq I$ mit $|I'| = \kappa'$, sodass $tp(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n-1}/A) = p_{n-1}$ für alle $i_1 < \cdots < i_{n-1}$ aus I' gilt.

Wir können die Abbildung tp, die einem Tupel einen Typ zuordnet, als Färbung verstehen und Erdös-Rado darauf anwenden.

Dann existiert $I'' \subseteq I$ und ein p^κ_n mit $tp(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}/A) = p^\kappa_n$ für alle $i_1 < \cdots < i_n$ aus I''. Da $cf(\lambda) > \tau$ gilt, ist ein $p_n = p^\kappa_n$ für kofinal viele κ.

Wir schließen damit, dass wir die Realisierungen wählen. $\square$

Beispiel 8. *Wir betrachten $\mathcal{M} \models T_{\mathbb{Q}-VR}$ und $A \subseteq M$. Dann sei $(a_i)_{i \in I}$ eine entsprechend genügend große Familie von Punkten und $(I, <)$ eine unendliche lineare Ordnung.*

Dann erhalten wir mit dem Lemma von Shelah eine abzählbare ununterscheidbare Folge, von Elementen aus $(a_i)_{i \in I}$, die konstant oder linear unabhängig von A ist.