Seminarvortrag:

Kombinatorik:

Ramsey & Erdős - Rado (1956)
(1930)
(+1930)

Vorab:

Def:

Seien κ, λ, μ Kardinalzahlen. Dann schreiben wir $\kappa \to (\lambda)^n_\mu$ um auszudrücken, dass es für jede Funktion $f: [\kappa]^n \to \mu$ ein $A \subseteq \kappa$, mit $|A| = \lambda$, gibt, sodass f konstant auf $[A]^n$ ist.

In anderen Worten:

Jede Partition (Aufteilung) von $[\kappa]^n$ in μ Teile hat eine homogene Menge der Größe λ.

[Wenn f eine Färbung der n-elementigen Teilmengen einer Menge der Kardinalität κ, in μ viele Farben ist, dann gibt es eine homogene Menge der Kardinalität λ (alle n-elementigen Teilmengen ~~von~~ ~~A~~ werden durch f in derselben Farbe gefärbt)]

Def: Beth-Funktion

Für jede Kardinalzahl μ def.:

$$\beth_\alpha(\mu) = \begin{cases} \mu, & \text{falls } \alpha = 0 \\ 2^{\beth_\beta(\mu)}, & \text{falls } \alpha = \beta+1 \\ \sup_{\beta<\alpha} \beth_\beta(\mu), & \text{falls } \alpha \text{ Limes-Ordinalzahl} \end{cases}$$

A Menge (unendlich)

Def: $[A]^n$ bezeichne die Menge aller n-elementigen Teilmengen von A

Satz (Ramsey): (1930)

Sei A eine unendliche Menge und $n \in \omega$.
Teile die Menge von n-elementigen Teilmengen $[A]^n$ in Teilmengen $C_1, \dots, C_k$ auf.
Dann gibt es eine unendliche Teilmenge von A, deren n-elementige Teilmengen alle zu der selben Teilmenge C_i gehören.

~~Bew:~~ Wenn man sich die Partition/~~Aufteilung~~ als Färben von $[A]^n$ vorstellt, dann suchen wir eine unendliche Teilmenge $B \subseteq A$, sodass $[B]^n$ einfarbig gefärbt ist

Beweisen werden wir den Satz durch Induktion über n.

$n=1$: "Offensichtlich" mittels des Schubfachprinzips.
Teile die Menge der 1-elementigen Teilmengen auf die endl. vielen $C_1, \dots, C_k$ / ~~auf~~ Farben auf.
Da wir unendlich viele Elemente auf endl. viele ~~Gefäße~~ Farben aufteilen, müssen in mind. ~~1~~ einer ~~Gefäß~~ Farbe unendlich viele Elemente vorhanden sein. (OBdA C_1)

Wähle die Elemente in den 1-elementigen in C_1 Teilmengen als B.
$\Rightarrow$ Per Def. ~~sind dann alle~~ ex. dann eine Teilmenge $B \subseteq A$, deren 1-elementigen Teilmengen alle in der selben Farbe gefärbt sind.

$n \rightsquigarrow n+1$: Nehmen wir also an, der Satz ~~A~~ sei für n gezeigt. Wir wollen zeigen, dass er auch für $n+1$ gilt:

Sei $a_0 \in A$. Dann induziert jede Färbung von $[A]^{n+1}$ eine Färbung der n-elementigen Teilmengen von $A' := A \setminus \{a_0\}$: einfach $x \in [A']^n$ einfärben in der Farbe von $\{a_0\} \cup x \in [A]^{n+1}$.

Nach Ind. Annahme ex. eine unendl. ~~Menge~~ einfarbige Teilmenge B_1 von A' mit der induzierten Färbung. Also haben alle $(n+1)$-elementigen Teilmengen von A, bestehend aus a_0 und n Elementen von B_1 dieselbe ~~F~~ Farbe.

Wählen wir nun ein beliebiges ~~a~~ $a_1 \in B_1$, erhalten wir mit dem selben Argument eine unendliche Teilmenge B_2 von B_1 mit den selben Eigenschaften.

Induktiv konstruieren wir eine Folge $A = B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots$ und Elemente $a_i \in B_i \setminus B_{i+1}$, s.d. die Farbe von jeder $(n+1)$-elementigen Teilmenge $\{a_{i(0)}, \dots, a_{i(n)}\}$ mit $i(0) < i(1) < \dots < i(n)$ nur von dem Wert von $i(0)$ abhängt.

Mithilfe des Schubfachprinzips folgt wieder, dass es unendlich viele Werte von $i(0)$ gibt, für die diese Farben gleich sind.

Diese $a_{i(0)}$ ~~bei~~ liefern dann die gewünschte einfarbige Menge. $\lrcorner$

$\rightsquigarrow$ Schreibweise: $\omega \longrightarrow (\omega)^n_k$

Satz (Ramsey) endliche Version:

Für alle $k, n, m < \omega$ gibt es ein $l < \omega$, sodass gilt:

$$l \longrightarrow (m)^n_k$$

Erst:

Bem: Lemma von König (ohne Beweis)
Sei G ein zusammenhängender Graph mit unendlich vielen Knoten, sodass jeder Knoten endlichen Grad hat, also nur zu endlich vielen anderen Knoten benachbart ist.
Dann ist jeder Knoten von G Teil eines unendlich langen Pfades, auf welchem ein Knoten höchstens einmal besucht wird.
Als Spezialfall für uns nützlich:
Jeder Baum bestehend aus unendlich vielen Knoten endlichen Grades einen unendlichen Pfad besitzt.

Beweis des Lemmas:
~~Angenom~~ Angenommen es gibt kein solches l, sodass $l \to (m)^n_k$.
Für jedes $l < \omega$ sei $T_l = \{f : [\{0, \ldots, l-1\}]^n \to k$: es gibt kein $t \subseteq \{0, \ldots, l-1\}$ der Größe mindestens m, homogen für $f\}$.
Offensichtlich ist T_l endl. und für ein $f \in T_{l+1}$ gibt es ein eindeutiges $g \in T_l$, sodass $g \subset f$.

Wenn wir also $T = \bigcup T_e$ mittels Inklusion ordnen, bekommen wir einen endl. verzweigten Baum. Jedes T_e ist nicht leer, also ist T ein unendlicher endlich verzweigter Baum. Mithilfe des Lemmas von König können wir eine Kette $f_0 \subset f_1 \subset f_2 \subset \ldots$, $f_i \in T_i$ finden.

Sei $f = \bigcup f_i$. Dann ist

$$f : [\mathbb{N}]^n \longrightarrow k.$$

Mit dem Satz von Ramsey gibt es ein unendliches $X \subseteq \mathbb{N}$, welches homogen für f ist.

Seien $x_1, \ldots, x_m$ die ersten m Elemente von X und sei $s > x_m$.

Dann ist $\{x_1, \ldots, x_m\}$ homogen für f_s, was einen Widerspruch ergibt.

<u>Bem</u>: Die endl. Version ist lediglich eine Existenzaussage und bietet keinen Weg an dieses ℓ zu gelangen!

Wir betrachten nun 2-farbige Graphen: (rot, ~~schwarz~~ blau)

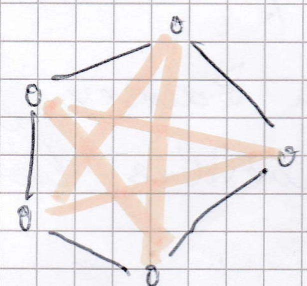
Bezeichne mit $R(m,n)$ die kleinste Anzahl an Knoten, die ein Graph haben muss, damit sich ein roter m-knotiger Teilgraph ~~bzw~~ oder ein ~~schwarzer~~ blauer n-knotiger Teilgraph nicht mehr vermeiden lassen. Auch m-nte Ramsey Zahl.

Anschaulich:

Wie viele Gäste muss man mindestens auf eine Party einladen, damit sich entweder mindestens m Leute kennen oder mindestens n nicht kennen?

Beispiel: $R(3,3)$

Betrachte:

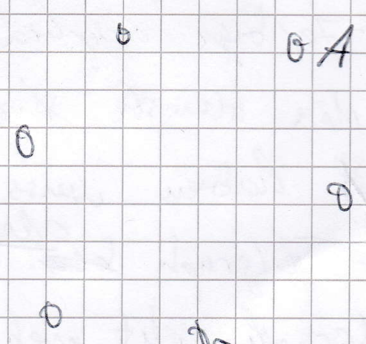


$\rightarrow$ Es ist möglich einen Graphen mit 5 Knoten zu konstruieren, in welchem weder ein rein rotes ~~oder~~ noch ein rein ~~schwarzes~~ blaues Dreieck enthalten ist.

$\Rightarrow R(3,3) \geq 6$ ⚡

~~Wegen~~

Betrachte einen Graphen mit 6 Knoten: + wähle einen Punkt A



Wegen

$5 = 5 + 0$

$5 = 4 + 1$

$5 = 3 + 2$

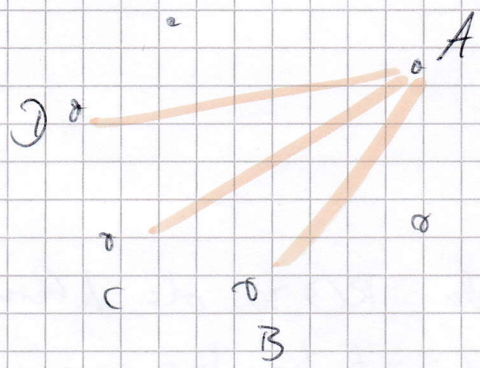
$5 = 2 + 3$

$5 = 1 + 4$

$5 = 0 + 5$

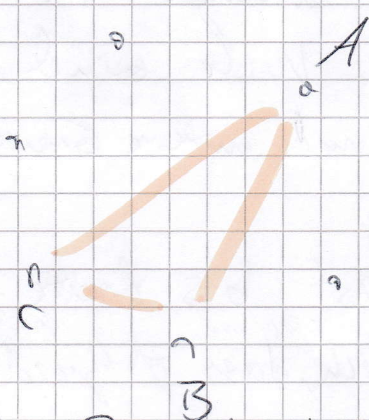
gibt es immer mindestens 3 rote oder mindestens 3 ~~schwarze~~ blaue Kanten, die von A weggehen.

OBdA ~~drei~~ 3 rote zu B, C, D.



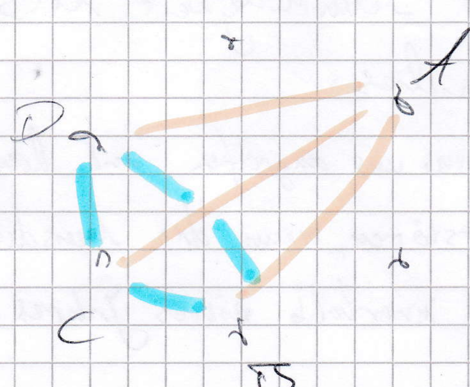
Fall 1: Eine der Kanten BC, CD oder BD ist rot gefärbt

OBdA BC rot:



=> rotes Dreieck bzw. 3 Leute kennen sich

Fall 2: Keine der Kanten BC, CD oder BD ist rot d.h. alle s~~chwarz~~ blau



=> Erhalte ein ~~schwarzes~~ blaues Dreieck, 3 Leute kennen sich nicht

=> Bei 6 Knoten lässt es sich nicht mehr vermeiden, dass entweder ein rotes oder ein ~~schwarzes~~ blaues Dreieck entsteht.
=> Party mind 6 Leute.

Es gilt:
$R(3,3) \geq 6$

Aber auch:
$R(3,3) \leq 6$, da $R(3,3)$ als kleinste Zahl festgelegt ist, bei der es sich nicht mehr vermeiden lässt.

=> $R(3,3) = 6$

Es sind nur wenige $R(m,n)$ ~~fest~~ ~~bek~~ genau bekannt. Viele sind nur durch obere und untere Grenzen beschränkt.
Bsp:
Genaues $R(5,5)$ ist bis heute unbekannt. Man weiß jedoch, dass folgendes gelten muss:

$$43 \leq R(5,5) \leq 48$$

1989 2017

Paul Erdős sagt zur Schwierigkeit diese Zahl zu bestimmen folgendes:
"Stellen Sie sich vor, dass Aliens uns angreifen und damit drohen, die Erde zu zerstören, wenn die Menschheit es nicht schafft $R(5,5)$ innerhalb eines Jahres zu bestimmen."

Wenn wir die klügsten Köpfe und schnellsten Computer ~~zu zusammen~~ versammeln würden, würden wir wahrscheinlich den genauen Wert innerhalb eines

Tabelle / Beweis

Jahres herausfinden.

Wenn die Aliens von uns jedoch $R(6,6)$ [also die Ramsey-Zahl für sechs rot - sechs ~~schwarz~~ blau] fordern würden, blieben uns nichts anderes übrig, als die Aliens zuerst anzugreifen.

Erdős-Rado-Theorem 1956 (erweitert Ramsey auf
$\beth_n(\kappa)^+ \longrightarrow (\kappa^+)^{n+1}_\kappa$ überabzählbare Mengen)

Beweis:

Induktion über n:

$n=0$: $\kappa^+ \longrightarrow (\kappa^+)^1_\kappa$

Schubfachprinzip

Sei der Satz also für $n-1$ bewiesen.

Sei $\lambda = \beth_n(\kappa)^+$ und sei $f: [\lambda]^{n+1} \longrightarrow \kappa$.

Für $\alpha < \lambda$ sei $f_\alpha : [\lambda \setminus \{\alpha\}]^n \longrightarrow \kappa$.

def. durch
$$f_\alpha(A) = f(A \cup \{\alpha\}).$$

Wir konstruieren
$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_\alpha \subseteq \dots$$
für $\alpha < \beth_{n-1}(\kappa)^+$, sodass $X_\alpha \subseteq \beth_n(\kappa)^+$
und jedes X_α eine Mächtigkeit von
höchstens $\beth_n(\kappa)$.

Sei $X_0 = \beth_n(\kappa)$.

Falls α Limes-Ordinalzahl ist, dann ist
$$X_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta$$

Angenommen wir haben X_α mit $|X_\alpha| = \beth_n(\kappa)$.

Wegen
$$\beth_n(\kappa)^{\beth_{n-1}(\kappa)} = \left(2^{\beth_{n-1}(\kappa)}\right)^{\beth_{n-1}(\kappa)} = 2^{\beth_{n-1}(\kappa)} = \beth_n(\kappa)$$

gibt es $\beth_n(\kappa)$ Teilmengen von X_α
der Mächtigkeit $\beth_{n-1}(\kappa)$.

Bem: Wenn $Y \subset X_\alpha$ und $|Y| = \beth_{n-1}(\kappa)$, dann gibt es $\beth_n(\kappa)$ Funktionen

$$g : [Y]^n \to \kappa,$$

denn $$\kappa^{\beth_{n-1}(\kappa)} = 2^{\beth_{n-1}(\kappa)} = \beth_n(\kappa).$$

Also können wir $X_{\alpha+1} \supseteq X_\alpha$ finden, sodass $|X_{\alpha+1}| = \beth_n(\kappa)$.
Und für $Y \subset X_\alpha$ mit $|Y| = \beth_{n-1}(\kappa)$ und $\beta \in \lambda \setminus Y$ gibt es dann $\gamma \in X_{\alpha+1} \setminus Y$ s.d.

$$f_\beta|[Y]^n = f_\gamma|[Y]^n.$$

Sei $X = \bigcup_{\alpha < \beth_{n-1}(\kappa)^+} X_\alpha$. Für $Y \subset X$ mit $|Y| \leq \beth_{n-1}(\kappa)$ ist $Y \subset X_\alpha$ für ein $\alpha < \beth_n(\kappa)^+$.
Für $\beta \in \lambda \setminus Y$ gibt es dann $\gamma \in X \setminus Y$, s.d.
$$f_\beta|[Y]^n = f_\gamma|[Y]^n$$

Wähle $\delta \in \lambda \setminus X$ fest.
Induktiv konstruiere
$$Y = \{y_\alpha : \alpha < \beth_{n-1}^+(\kappa)\} \subseteq X.$$
Vorausgesetzt wir haben $Y_\alpha = \{y_\beta : \beta < \alpha\}$
Wähle $y_\alpha \in X$ so, dass
$$f_{y_\alpha}|[Y_\alpha]^n = f_\delta|[Y_\alpha]^n.$$

Nach Induktionshypothese gibt es $Z \subseteq Y$ sodass $|Z| \geq \kappa^+$ und Z ist homogen für f_δ.
Sagen wir

$$f_\delta(B) = \delta \text{ für alle } B \in [Z]^n.$$

Wir ~~[illegible]~~ behaupten, dass Z homogen für f ist. Sei $A \in [Z]^{n+1}$. Es ~~gibt~~ ex. $\alpha_1 < \dots \alpha_{n+1}$ sodass

$$A = \{y_{\alpha_1}, \dots, y_{\alpha_{n+1}}\}$$

Dann ist:

$$f(A) = f_{y_{\alpha_{n+1}}}(\{y_{\alpha_1}, \dots, y_{\alpha_n}\})$$
$$= f_\delta(\{y_{\alpha_1}, \dots, y_{\alpha_n}\}) = \delta$$

Also ist Z homogen für f.