<u>Ziel</u>: Betrachte $G = \langle X \rangle$ mit Wortmetrik und $Y = \mathrm{Cone}(G)$

<u>Erinnerung</u> (i) $\mathrm{Cone}_\mu^R(X)$ ist der metr. Raum, der aus $({}^*X, {}^*d)$ entsteht, wenn man ${}^*d$ ersetzt durch $\frac{1}{R}\,{}^*d$ und auf endl. Werte einschränkt (bzgl $x_0 \in X$), st induz. Metrik, d.h. ${}^*X^{(R)}/_\sim$

(ii) <u>Interne Mengen</u> im Ultraprod. sind von der Form $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Durch "komponentenw. Rechnen" folgt der

<u>Satz von Łoś</u> Eine Eigenschaft Φ gilt für Mengen $W_{1i}, \dots W_{mi}$, $f_1(i), \dots f_n(i)$ μ-fast überall gdw ${}^*\Phi$ für $W_1, \dots W_m$, $f_1/\mu, \dots f_n/\mu$ gilt.

4.18 <u>Bsp</u>: $(\mathbb{R}, \leq)$ ist vollst., d.h. jede nach oben beschr. Menge hat ~~obere Schranke~~ Supremum.
Diese Aussage gilt offens. auch für interne Teilm von ${}^*\mathbb{R}$.

4.19 <u>Bem</u>: Ist $G = \langle X \rangle$ endl. erz., dann ist ${}^*G$ nur im nicht-stand. Sinn von ${}^*X = X$ erz: Jedes $g \in {}^*G$ $g = (g_i)$ ist $g_i = x_{i_1} \dots x_{i_{j_i}}$, $|g| = (j_i) \in {}^*\mathbb{N}$.

4.20 Satz Ist $G = \langle X \rangle$ endl. erz., $Y = \mathrm{Cone}_\mu^R(G)$ bzgl Wortmetrik, dann gilt

(i) Y ist homogen, d.h. für $y_1, y_2 \in Y$ ex Isometr. $g \in \mathrm{Isom}(Y)$ mit $g(y_1) = y_2$.

(ii) Y ist zsh und lok zsh.

(iii) Y ist vollst, d.h. jede Cauchy-Folge konverg.

Bew: (i) ${}^*G^{(R)} = \{ g \in G^* \mid d^*(g,e)/_R \in \mathrm{Fin} \}$ operiert auf Y als Gruppe von Isometrien und diese Wirkung ist transitiv:

Wähle Lifts $\hat{y}_1, \hat{y}_2 \in {}^*G^{(R)}$. Dann ex $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $g_i y_{1i} = y_{2i}$. Wegen $\hat{y}_1, \hat{y}_2 \in {}^*G^{(R)}$ folgt $(g_i) \in {}^*G^{(R)}$.

(ii) Es genügt nach (i) z.z.

Für alle $y \in Y$ mit $d({}^*e, y) = r$, ex. Isometrie $f : [0, r] \to Y$, $f(0) = {}^*e$, $f(r) = y$.

Sei $g \in {}^*G$ ein Lift von y, also ${}^*d(g,e) = r \cdot R$

Sei $t \in [0, r]$, dann setze

$$f(t)_i := x_{i_1} \cdots x_{i_{\lfloor \frac{t}{r} R_i \rfloor}}$$

d.h. $f(t) = x_1 \cdots x_{\lfloor \frac{t}{r} R \rfloor}$. Dann ist f die gewünschte Isometrie

(iii) Sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in Y.

Sei der Einfachheit halber $\hat{g}_n \in {}^*G$ mit $|\hat{g}_n| \leq R$

Wir können $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu einer internen Folge $(g_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ fortsetzen.

Für alle $k\in\mathbb{N}$ ex $M(k)\in\mathbb{N}$ mit $|\hat{g}_m^{-1}\hat{g}_n| < \frac{R}{k}$ für alle $m,n > M(k)$. Die Menge dieser Indizes ist intern, nämlich

$$\{t\in{}^*\mathbb{N} \mid \forall m\in\mathbb{N}\ n\in\mathbb{N}\quad m,n>M(k) \wedge k<t \to |g_m^{-1}g_n| < R/k\}$$

daher ex ein $\omega\in{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ mit $\lim g_n = g_{\omega/\sim} \in Y$.

Nun wollen wir die Wirkung von G auf Y studieren

Wir haben gesehen $G^{(R)} \circlearrowright Y$ durch Isometrien.

Wir betrachten $l: G \longrightarrow \mathrm{Isom}(Y)$.

Sei $G' = \ker(l)$.

~~Lemma 4.~~ ~~Wenn G keine ab. Ugr. von endl. Index hat, dann sind~~

<u>Annahme:</u> $l(G) \subset \mathrm{Isom}(Y)$ ist endl.

Dann hat G' endl. Index in G; daher ist G' endl. erz. Sei $G' = \langle S \rangle$, $S = S^{-1}$ endl.

<u>Lemma 4.2</u> Wenn G keine ab. Ugr von endl. Index hat, dann sind die Längen $|\gamma^{-1}s\gamma|$, $\gamma\in G'$, $s\in S$, unbeschränkt.

Bew: Sonst hätte jedes $s \in S$ nur endl. viele G'-Konjugierte, d.h. der Zentral. von $s \in S$ hat endl. Index in G' und $Z(G') = \bigcap_{s \in S} \mathrm{Cen}_{G'}(s)$ hat endl. Index in G' und daher in G.

Def 4.22. Ist (Y, d) metr. Raum, $e \in Y$, dann wird $\mathrm{Isom}(Y)$ zu einer topol. Gr. durch eine Nachbarschaftsbasis für Id_Y durch

$$U_{K,\varepsilon} = \{\sigma \in \mathrm{Isom}(Y) : d(\sigma y, y) \leq \varepsilon \text{ für alle } y \in B_K(e)\}$$

$K \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$.

Bem: Wenn Y lok cp und homogen ist, ist dies die kp-off. Topol.
[Y ist lok cp, falls für alle $y \in Y$ eine komp. Umgeb. ex, d.h. eine kp. Menge K, offene Menge U mit $y \in U \subseteq K$]

Prop 4.23 Wenn G keine abl. Ugr von endl. Index hat, dann ex für jede offene Menge $U \ni \mathrm{id}_Y$ ein $\beta \in {}^*(G')$ und $s \in S$ mit $\beta^{-1} G' \beta \subset {}^*G^{(R)}$ und $\ell(\beta^{-1} s \beta) \in U \setminus \{\mathrm{id}_Y\}$.

Bew: Für $\gamma \in {}^*G$, $0 < r \in {}^*\mathbb{R}$ setze

$$\delta(\gamma, r) = \max\{d(\gamma a, a) : |a| \leq r\}.$$

Be Dann gilt für $g \in {}^*G$:

$$\delta(g^{-1}\gamma g, r) \leq \delta(\gamma, r) + 2|g|$$

Bew: Sei $|a| \leq r$. Dann ist

$$d(g^{-1}\gamma g a, a) = d(\gamma g a, g a) \leq \delta(\gamma, |g| + r) \underset{(*)}{\leq} \delta(\gamma, r) + 2|g|$$