Nun erweitern wir 1.12 auf 2-Komplexe:

Prop 1.14 Ist C zsh 2-Komplex, $v \in C^0$, $H \leq \pi(C, v)$, dann ex zsh. 2-Komplex C' und Überd. $f : C' \to C$, die Isom. $f^* : \pi(C', v') \to H \leq \pi(C, v)$ induz.

Bew: Nach 1.12 können wir eine Überd f^1 für $H' \leq \pi(C^1, v)$ bauen, wobei H' Urbild von H in $\pi(C^1, v)$.
Wir erweitern C'^1 zu einem 2-Komplex C' und f^1 zu einer Überd. von C' zu C auf folgende Weise:
Ist p' in C'^1 ein geschl. Weg an v' mit $f^1(p') = \partial(D)$, dann fügen wir $D' \in C'^2$ hinzu mit $\partial(D') = p'$ und setzen $f(D') = D$. Dann ist $f : C' \to C$ eine Überdeckung.
Ist nun p ein geschl. Weg in C an v, der ein Elt $h \in H \leq \pi(C, v)$ repräs., betrachte p als Weg in $\pi(C^1, v)$. Nach Konstr. ex $h' \in \pi(C'^1, v')$ mit $f^{1*}(h') = p$, d.h. $f^*(h'/_\sim) = h \in H$, d.h. f^* ist surj, und f^* ist inj. nach 1.11.

Einschub Tietze-Transf. p. 10

Def 1.15 Sei G eine Gr., H_i, $i \in J$, Familie von Ugr von G mit $H_i \cap H_j \neq 1$ für $i \neq j \in J$.
Dann heißt G freies Produkt der H_i, $G = \ast_J H_i$, falls $b_1 b_2 \dots b_n \neq 1$ für alle Prod. mit ~~$b_j \neq k_j$~~ $b_j \in \bigcup_J H_i \setminus \{1\}$, $b_j \in H_i \Rightarrow b_{j+1} \notin H_i$ für alle $i, j \in J$.
und jedes $g \in G$ als Prod. $g = b_1 \cdots b_k$ mit b_i wie oben geschrieben werden kann

<u>Einschub:</u> Tietze-Transformationen

(i) Sei $G = \langle X \mid R \rangle$. (i) Ist $r \in \langle R \rangle^{F(X)}$, dann ist mit $R' = R \cup \{r\}$ offens. $G \simeq \langle X \mid R' \rangle$.

(ii) Ist $x \notin X$, $X' = X \cup \{x\}$, $w \in F(X)$, $R' = R \cup \{r\}$ mit $r = x^{-1}w$, dann ist auch $G \simeq \langle X' \mid R' \rangle$.

Diese beiden Transformationen heißen <u>Tietze-Transf.</u>

<u>Satz</u> 1.15 Sind $G_1 = \langle X_1 \mid R_1 \rangle$, $\langle X_2 \mid R_2 \rangle = G_2$ endl. Präsent. dann ist $G_1 \simeq G_2$ gdw man mit endl. vielen Tietze-Transf. eine Präsent. in die andere überf. kann.

<u>Bew:</u> „$\Leftarrow$" klar.

„$\Rightarrow$" Sei $F_i = F(X_i)$, $N_i = \langle R_i \rangle^{F_i}$, $i = 1, 2$.

OBdA $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Sei $\varphi_i : F_i \twoheadrightarrow G_i$, $\ker \varphi_i = N_i$.

Sei $X = X_1 \cup X_2$, $F = F(X)$. Dann induz. φ_1, φ_2 einen Epim $\varphi : F \to G$. Für $x \in X_1$ sei $w_x \in F_2$ mit $\varphi(x) = \varphi(w_x)$ und $S_1 = \{ s_x = x^{-1} w_x \}$, entspr. für S_2.

Durch endl. viele Tietze-Transf.$^{(ii)}$ erhalten wir

$$\langle X_1 \mid R_1 \rangle \simeq \langle X \mid R_1 \cup S_2 \rangle.$$

Durch Transf. vom Typ (i) erhalten wir

$$\langle X_1 \mid R_1 \rangle \simeq \langle X \mid R_1 \cup S_2 \cup R_2 \cup S_1 \rangle.$$

Ebenso für $\langle X_2 \mid R_2 \rangle$. Daraus folgt die Beh.

Prop 1.17 (vgl. Seifert-van Kampen)
Sei C_i, $i \in J$, eine Fam. von 2-Kompl. mit $C_i \cap C_j = \{v\}$, $v \in \bigcap C_i^0$, $C = \bigcup C_i$. Dann ist $\pi(C,v) = \ast_J \pi(C_i, v)$.

Bew: Offens. ist $\pi(C^1, v) = \ast_{i \in J} \pi(C_i^1, v)$, also $\pi(C,v)$ (nach 1.4) Quot. von $\ast_{i\in J} \pi(C_i, v)$.

Sei nun $p = q s q^{-1}$ ein geschl. Weg in C, wobei $s = \partial(D)$ für eine Fläche $D \in C^2$. Nach Vorauss. liegt D in genau einem C_i. Nach Def. 1.16 folgt die Beh.

Satz 1.18 (Grushko-Neumann) Sei F endl. erz. freie Gr., $\alpha: F \to G = \ast_{i \in J} G_i$ ein Epim. Dann ist $F = \ast_{i\in J} F_i$ so, dass $\alpha(F_i) = G_i$ für alle $i \in J$.

Bew: Sei S eine Basis für F und C^1 der Graph mit Vertex $v \in C^0$ und Kanten $e_s, \bar{e}_s$ für $s \in S$, $\alpha(e_s) = \omega(e_s) = v$. Ist $\alpha(s) = g_1 \cdots g_t$ mit $g_j \in \bigcup_{i\in J} G_i \setminus \{1\}$ und $g_j \in G_i \Rightarrow g_{j+1} \notin G_i$, unterteile Kante $e_s = e_1 \dots e_t$ und Label g_j für e_j, $\varphi(e_j) = g_j$.
Dieser Graph K induz. Homom. $\varphi^*: \pi(K,v) \twoheadrightarrow G$.
Nun erweitern wir K zu einem 2-Komplex ind. auf folg. Weise: Für $i \in J$ sei $K_i \subseteq K$ mit
$K_i^0 = K^0$, $K_i^1 = \{e \in K^1 \mid \varphi(e) \in G_i\}$, $K_i^2 = \{D \in K^2 \mid \partial D \subseteq K_i$

Für den Ausgangskomplex K gilt nach Konstr.

i) $\pi(K,v) \simeq F$ und $\varphi^* = \alpha$.

ii) $\bigcup K_i = K$

iii) $K_j \cap K_\ell = \bigcap\limits_{i \in I} K_i$, $j \neq \ell \in I$

iv) $\bigcap\limits_{i \in I} K_i$ ist disj. Vereinigung von Bäumen.

Wir modifizieren K induktiv, so dass diese Bedingungen erhalten bleiben und bis in iv) gilt:

$\bigcap K_i$ ist Baum.

Ist $\bigcap K_i$ noch nicht zsh, dann suchen wir einen 'Bindebogen', d.h. einen Weg p ($p \subset K_i$) mit $\varphi(p) = 1$, der Vertices in versch. Zsh.komp. von $\bigcap K_i$ enthält.

<u>Lemma</u> Ist $\bigcap K_i$ nicht zsh., dann ex. ein Bindebogen.

<u>Bew:</u> Sei $v \in K_i$, $x \in K_j$ in versch. Zshkomp von $\bigcap K_i$, und sei p ein Weg in K von x nach v. Weil α surj. ist, ex ein geschl. Weg q an x mit $\varphi(p) = \varphi(q)$, d.h. $r = \bar{q}p$ ist Weg von x nach v mit $\varphi(r) = 1$. Weil $\bigcup K_i = K$, ist $r = r_1 \cdots r_k$ mit $r_j \in K_{i(j)}$ und $\underbrace{r_j \in K_i \Rightarrow r_{j+1} \notin K_i}_{k \text{ min.}}$. Wegen $\varphi(r) = 1$, folgt nach Def. des freien Prod., dass $\varphi(r_j) = 1$ für ein j. Liegen $\alpha(r_j), \omega(r_j)$ in versch. Zsh.komp. von $\bigcap K_i$, dann ist r_j Bindebogen und wir sind fertig. Sonst liegen $\alpha(r_j), \omega(r_j)$ in derselben

Zshkomp. Dann ex ein Weg τ_j' in dieser Zshkomp, der von $\alpha(\tau_j)$ nach $\omega(\tau_j)$ geht, und es gilt $\varphi(\tau_j') \in \bigcap G_i = \{1\}$. Daher können wir τ_j durch τ_j' in p ersetzen und $\varphi(\tau)$ erhalten. Weil τ_j' in $\bigcap K_i$ enthalten ist, können wir die Anzahl der Faktoren in der Darst. von τ verringern. $\lightning$ k min.

Nun modifizieren wir K folgendermaßen: Ist p ein Bindebogen, dann fügen wir eine Kante e_p mit $\alpha(e_p) = \alpha(p)$, $\omega(e_p) = \omega(p)$ und eine Fläche D_p mit $\partial(D_p) = p e_p^{-1}$ hinzu und setzen $\varphi(e_p) = 1$. Dieser erweiterte Komplex erfüllt immer noch 1)-4) und $\bigcap K_i$ hat eine Zshkomp. weniger.

Nach endl. vielen Schritten ist $\bigcap K_i$ zsh. Wegen $K^0 \subseteq \bigcap K_i$ ist jeder K_i zsh und nach Seifert-van Kampen folgt $\pi(K, v) = \ast_{i \in I} \pi(K_i, v)$.

Mit $F_i = \pi(K_i, v)$ gilt dann

$F = \ast F_i$ mit $\varphi(F_i) \subseteq G_i$. Weil φ surj. ist, folgt $\varphi(F_i) = G_i$.

Für eine Präsentierung $G=\langle X|R\rangle$ haben wir in Prop 1.8 einen Komplex $K(X|R)$ mit genau einem Vertex v, Kanten x_x, $x\in X\cup X^{-1}$, Flächen D_r, $r\in R\cup R^{-1}$, mit $\pi(K(X|R),v)\cong G$ konstr.

Nun konstr. wir einen weiteren natürl 2-Komplex zu $G=\langle X|R\rangle$, der den Cayley-Gph als Skelett enth.

<u>Def</u> 1.21 (Cayley-Komplex) Sei $G=\langle X|R\rangle$ wobei $X\cap X^{-1}=\emptyset$ und alle $r\in R$ zykl. reduz. Dann ist der <u>Cayley-Komplex</u> $C(X|R)$ der 2-Komplex mit Vertexm. $C^0=G$, Kantenmenge $C^1=G\times L$, $L=X\cup X^{-1}$, $\alpha(g,x)=g$, $\omega(g,x)=gx$, $x\in L$, $g\in G$, und Kantenfärbung $\varphi(g,x)=x$. Diese Färbung induz. Färbung auf Wegen und es gilt für einen Weg p:

p ist geschl. Weg gdw $\varphi(p)\in\langle R\rangle^{F(X)}$.

Als Flächen fügen wir ~~alle~~ Flächen $D(g,r)$, $g\in G$, $r\in R\cup R^{-1}$ ein, wobei $\partial(D(g,r))$ der (eind.) geschl. Weg an g mit Färbung r ist.

Ist $r=t^m$, $m\geq 2$ max, $r,t\in R\cup R^{-1}$, dann identifiz. wir die Flächen für $(g,r),(gt,r),\ldots(gt^{m-1},r)$, weil sie ohnehin dieselben Rand haben.

<u>Def</u>. 1.22 Ist C ein Cayley-Komplex mit Färbung φ, dann ist ein Autom. α von C ein Autom. der