Hrushovskis Fusion

Timo Krisam

WWU Münster

09.07.2020

Setting

Seien T_1 und T_2 streng minimale Theorien in disjunkten Sprachen $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$. Wir nehmen an, dass T_1 und T_2 Quantorenelimination besitzen und $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ relational sind. Sei $\mathcal{K}$ die Klasse aller Modelle von $T_1^{\forall} \cup T_2^{\forall}$ zusammen mit $\emptyset$. Seien $\mathcal{U}_i \models T_i$ Monster.

Notation

Für $i \in \{1, 2\}$ schreiben wir tp_i, acl_i, dcl_i, etc für die jeweiligen Begriffe ausgewertet in der Theorie T_i.

Die δ-Funktion

Erinnerung

Für eine Menge M heißt $\delta : \mathcal{P}_{fin} \to \mathbb{Z}$ eine δ-*Funktion*, falls folgende Eigenschaften gelten:

- $\delta(\varnothing) = 0$
- $\delta(\{a\}) \leq 1$
- $\delta(A \cup B) + \delta(A \cap B) \leq \delta(A) + \delta(B)$.

Weiter setzen wir $\delta(A/B) := \delta(A \cup B) - \delta(B)$.
Es gilt $\delta(A/B) \leq \delta(A/A \cap B)$.

Die δ-Funktion

Definition

- Für endliche $A \in \mathcal{K}$ setzen wir $\delta(A) := dim_1(A) + dim_2(A) - |A|$. Dies ist eine δ-Funktion.
- Falls $A \setminus B$ endlich ist setzen wir $\delta(A/B) := dim_1(A/B) + dim_2(A/B) - |A \setminus B|$. Das verallgemeinert die vorherige Definition.
- $B \subset A$ ist *stark* in A ($B \leq A$), falls $\delta(A'/B) \geq 0$ gilt für alle endlichen $A' \subset A$.
- Ist B eine echte starke Teilmenge von A, so heißt B *minimal*, falls $B \leq A' \leq A$ für kein A' echt zwischen B und A gilt.
- Ein $a \in A$ heißt *algebraisch* über B, falls dies in T_1 oder T_2 gilt.

Die δ-Funktion

Lemma

$A \leq B$ ist minimal genau dann, wenn $\delta(A/A') < 0$ für alle A' echt zwischen B und A.

Beweis.

Falls $A' \leq A$, so gilt per Definition $\delta(A/A') \geq 0$.
Sei andererseits $n = \delta(A/A') \geq 0$ für ein A' wie im Statement.
Wähle dieses A', sodass n maximal wird. Damit ist $A' \leq A$ und $B \leq A$ nicht minimal. $\square$

Die δ-Funktion

Lemma

Seien $A, B \in \mathcal{K}$ mit $B \leq A$ minimal. Dann tritt einer der folgenden Fälle ein:

- $\delta(A/B) = 0$ *und ein $a \in A \setminus B$ ist algebraisch über B. Dann gilt schon $A = B \cup \{a\}$. (Algebraisch minimal)*
- $\delta(A/B) = 0$ *und $A \setminus B$ enthält kein über B algebraisches Element. (Präalgebraisch minimal)*
- $\delta(A/B) = 1$ *und $A \setminus B$ enthält kein über B algebraisches Element. Dann ist A von der Form $B \cup \{a\}$. (Transzendent minimal).*

Im präalgebraischen Fall gilt $|A \setminus B| \geq 2$.

Die δ-Funktion

Beweis.

Falls $A \setminus B$ ein algebraisches Element a enthält, so gilt $\delta(B \cup \{a\}/B) = 0$. Wegen Minimalität also $A = B \cup \{a\}$.
Angenommen $A \setminus B$ enthält kein algebraisches Element.
Falls $\delta(A/B) = 0$ gilt, sind wir im präalgebraischen Fall.
Andernfalls gilt $\delta(A'/B) \geq 1$ für alle $B \subsetneq A' \subset A$. Für $a \in A \setminus B$ gilt also $B \cup \{a\} \leq A$, mit Minimalität folgt $A = B \cup \{a\}$. Das zeigt auch $\delta(A/B) = 1$. □

Die δ-Funktion

Definiere $\mathcal{K}^0 := \{M \in \mathcal{K} \mid \varnothing \leq M\}$.
Diese Unterklasse von $\mathcal{K}$ kann durch universelle $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$-Aussagen beschrieben werden.

Die δ-Funktion

Definition

Sei $M \in \mathcal{K}^0$ und $A \subset M$ endlich. Wir setzen
$d(A) := \min_{A \subset A' \subset M} \delta(A')$.
d erfüllt die folgenden Eigenschaften:

1. $d(\emptyset) = 0$
2. $d(\{a\}) \leq 1$
3. $d(A \cup B) + d(A \cap B) \leq d(A) + d(B)$
4. $d(A) \geq 0$
5. $A \subset B \Rightarrow d(A) \leq d(B)$

Damit ist d die Dimensionsfunktion einer Prägeometrie.

Die δ-Funktion

Lemma

Sei $M \in \mathcal{K}^0$ und $A \subset M$ endlich. Sei $A' \supset A$ minimal mit $\delta(A') = d(A)$. Dann ist A' die kleinste starke Teilmenge von M, die A enthält, genannt der Abschluss von A ($cl(A)$).

Beweis.

$A \subset cl(A)$ und Minimalität sind klar. Sei $B \subset M$ endlich. Nach Definition von cl gilt $\delta(cl(A)) \leq \delta(cl(A) \cup B)$. Also $\delta(B/cl(A)) \geq 0$. $\square$

Präalgebraische Codes

Ab jetzt nehmen wir zusätzlich die DMP für T_1 und T_2 an.

Bemerkung

- T_1^{eq} und T_2^{eq} sind bis auf ihre Heimatsorte verschieden.
- Ein Element $b \in dcl^{eq}(B)$ besteht aus einem Paar (b_1, b_2) mit $b_i \in dcl_i^{eq}(B)$, analog für acl^{eq}.
- Eine generischer Realisierung von $\phi_c(x, b)$ (über B) ist eine generische Realisierung von $\phi_{c_i}(x, b_i)$ (über B) in T_i.
- Analog für Morleyfolgen, Pseudomorleyfolgen, etc.

Präalgebraische Codes

Erinnerung

Ein Code c ist eine parameterfreie Formel $\phi_c(x, y)$ mit $n_c := |x|$ und y möglicherweise imaginär, sodass folgendes gilt:

- $\phi_c(x, b)$ ist inkonsistent oder einfach, im zweiten Fall sind die Komponenten einer Lösung paarweise verschieden.
- Ist $\phi_c(x, b)$ konsistent, so gilt $MRD(\phi_c(x, b)) = (k_c, 1)$.
- Für alle $s \subset \{1, ..., n_c\}$ gibt es ein $k_{c,s}$, sodass für jede Realisierung a von $\phi_c(x, b)$ gilt: $dim(a/ba_s) \leq k_{c,s}$.
- $\phi_c(x, b) \sim^{k_c} \phi_c(x, b') \Rightarrow b = b'$ falls beide konsistent.

Weiter gibt es eine Menge C von Codes, die jede einfache Formel codiert und bis auf Äquivalenz unter Permutation abgeschlossen ist.

Präalgebraische Codes

Definition

Sei C_i eine Menge von Codes für T_i wie im Satz. Ein *präalgebraischer Code* $c = (c_1, c_2)$ besteht aus einem $c_1 \in C_1$ und einem $c_2 \in C_2$, sodass folgendes gilt:

- $n_c := n_{c_1} = n_{c_2} = k_{c_1} + k_{c_2}$
- Für alle $s \subsetneq \{1, ..., n_c\}$ gilt $k_{c_1,s} + k_{c_2,s} - (n_c - |s|) < 0$

Setze $m_c = \max(m_{c_1}, m_{c_2})$.
Für jede Permutation σ ist $c^\sigma := (c_1^\sigma, c_2^\sigma)$ auch präalgebraisch.

Präalgebraische Codes

Lemma

Sei $B \leq B \cup \{a_1, ..., a_n\} =: A$ *präalgebraisch minimal,* $a = (a_1, ..., a_n)$*. Dann gibt es einen präalgebraischen Code c und* $b \in acl^{eq}(B)$*, sodass a eine generische Realisierung von* $\phi_c(x, b)$ *ist.*

Beweis.

Sei $i \in \{1, 2\}$ und $d_i \in acl_i^{eq}(B)$ mit $tp(a/Bd_i)$ stationär. Sei $\chi_i(x, d_i) \in tp_i(a/Bd_i)$ mit Morleygrad 1 und $MR_i(\chi(x, d_i)) = MR_i(a/Bd_i)$. Nach Wahl von d_i ist auch A/Bd_i nicht algebraisch, daher ist $\chi_i(x, d_i)$ einfach.

Seien $c_i \in C_i$ und $b_i \in dcl_i^{eq}(d_i)$ mit $\chi_i(x, d_i) \sim^{k_{c_i}} \phi_{c_i}(x, b_i)$.

Aus $\delta(A/B) = 0$ folgt $k_{c_1} + k_{c_2} = n_c$. Minimalität gibt uns $k_{c_1,s} + k_{c_2,s} - (n - |s|) < 0$. □

Präalgebraische Codes

Lemma

Sei $B \in \mathcal{K}$, c ein präalgebraischer Code und $b \in acl^{eq}(B)$. Sei $a = (a_1, ..., a_{n_c})$ eine generische Realisierung von $\phi_c(x, b)$ über B. Dann ist $B \cup \{a\}$ eine minimale präalgebraische Erweiterung von B.

Beweis.

Aus $k_{c_1} + k_{c_2} = n_c$ folgt $\delta(B \cup \{a\}/B) = 0$.
$k_{c_1,s} + k_{c_2,s} - (n - |s|) < 0$ liefert Minimalität. Da $n_c \geq 2$ ist die Erweiterung nicht algebraisch. □

Präalgebraische Codes

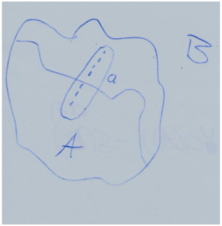
Lemma

Seien $A, B \in \mathcal{K}$, $B \subset A$, c ein präalgebraischer Code, $b \in acl^{eq}(B)$ und $a \in A$ eine Realisierung von $\phi_c(x, b)$. Wir nehmen an, dass a nicht komplett in B liegt. Dann gilt

- $\delta(a/B) \leq 0$.
- *Falls Gleichheit gilt, so ist a eine generische Realisierung von $\phi_c(x, b)$ über B.*

Präalgebraische Codes

Beweis.



Sei $s = \{i \mid a_i \in B\}$. Dies ist eine echte Teilmenge von $\{1, ..., n_c\}$. Dann gilt
$\delta(a/B) = dim_1(a/B) + dim_2(a/B) - (n_c - |s|) \leq k_{c_1,s} + k_{c_2,s} - (n_c - |s|)$. Falls $s \neq \emptyset$ ist das kleiner 0. Falls $s = \emptyset$ gilt
$\delta(a/B) = dim_1(a/B) + dim_2(a/B) - n \leq k_{c_1} + k_{c_2} - n = 0$. Für
$\delta(a/B) = 0$ gilt also $dim_i(a/B) = k_{c_i}$ und die Lösung ist generisch. $\square$

Präalgebraische Codes

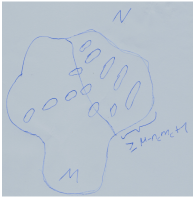
Lemma

Sei $M \leq N$ in $\mathcal{K}$. Sei $e_0, ..., e_\mu$ eine Pseudomorleyfolge von c in N über b. Dann tritt einer der folgenden Fälle ein:

- $b \in dcl^{eq}(M)$
- *Es liegen mindestens $\mu - n_c m_c + 1$ der e_i in $N \setminus M$.*

Präalgebraische Codes

Beweis.



Wir permutieren die Folge so, dass es r_0, r_1 gibt mit $e_0, \ldots, e_{r_0-1}$ in M und $e_{r_1}, \ldots, e_\mu$ in $N \setminus M$. Sei $b \notin dcl^{eq}(M)$. Dann ist $r_0 < m_c$, sonst $b \in dcl^{eq}(e_0, \ldots, e_{r_0-1}) \subset dcl^{eq}(M)$. Wir zeigen: $r_1 \leq m_c n_c$. Sei $\delta(i) := \delta(e_i / M e_0 \ldots e_{i-1})$. Angenommen $m_c \leq r_1$. Für $i < r_1$ gilt dann $\delta(i) \leq (n_c - 1)$. Mit dem vorherigen Lemma folgt für $m_c \leq i < r_1$, dass $\delta(i) < 0$.

Also $0 \leq \delta(e_0 \ldots e_{r_1-1}/M) = \sum\limits_{i<r_1} \delta(i) = \sum\limits_{i<m_c} \delta(i) + \sum\limits_{m_c \leq i < r_1} \delta(i) \leq$

$m_c(n_c - 1) - (r_1 - m_c)$. $\square$

$\mathcal{K}^\mu$

Wir definieren eine Funktion μ^*, die jedem präalgebraischen Code ein $\mu^*(c) \in \mathbb{N}$ zuordnet, sodass folgendes gilt:

- $\mu^*(c) \geq m_c - 1$
- Für alle $l, m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > 0$ gibt es nur endlich viele Codes c mit $\mu^*(c) = l$, $m_c = m$ und $n_c = n$.
- $\mu^*(c) = \mu^*(d)$ gilt, falls c zu einer Permutation von d äquivalent ist.

Definiere $\mu(c) := m_c n_c + \mu^*(c) \geq m_c$.
Pseudomorleyfolgen haben ab jetzt Länge $\mu(c) + 1$.
Die Klasse $\mathcal{K}^\mu$ besteht aus den $M \in \mathcal{K}^0$, die keine Pseudomorleyfolgen enthalten.

Lemma

Sei $M \in \mathcal{K}^\mu$, $B \leq M$ endlich und A/B eine präalgebraisch minimal. Dann enthält M nur endlich viele B-isomorphe Kopien von A.

Beweis.

Sei a ein Tupel mit $A = B \cup \{a\}$. Sei $d \in acl^{eq}(B)$ mit $tp_i(a/Bd_i)$ stationär. Wir müssen zeigen, dass $tp_1(a/Bd_i) \cup tp_2(a/Bd_i)$ nur endlich viele Realisierungen in M hat.
Seien c ein präalgebraischer Code und $b \in acl^{eq}(B)$ so, dass a generische Realisierung von $\phi_c(x, b)$ ist. Angenommen, $\phi_c(x, b)$ hätte unendlich viele Realisierungen in M. Dann gibt es $\mu(c) + 1$-viele solcher Realisierungen e_i mit $e_i \notin B \cup \{e_0, ..., e_{i-1}\}$. Diese e_i bilden eine Morleyfolge in $\phi_c(x, b)$ über B, daher eine Pseudomorleyfolge von c über b. Widerspruch zu $M \in \mathcal{K}^\mu$.
Da es nur endlich viele mögliche stationäre Fortsetzungen von $tp_i(a/B)$ gibt (durch Morleygrad beschränkt), sind wir fertig. $\square$

Korollar

Sei $B \leq M \in \mathcal{K}^\mu$ und $B \subset A$ endlich mit $\delta(A/B) = 0$. Dann gibt es nur endlich viele A' mit $B \leq A' \subset M$ die B-isomorph zu A sind.

Beweis.

Da A/B endlich ist, können wir diese Erweiterung als endlich Folge von minimalen Erweiterungen darstellen. Mit dem Lemma folgt die Aussage. $\square$

Korollar

Sei $M \in \mathcal{K}^\mu$ und $B \subset M$ endlich. Dann ist $cl_d(B) := \{x \in M \mid d(Bx) = d(B)\}$ abzählbar.

Beweis.

$cl_d(B)$ ist die Vereinigung aller $A' \subset M$ endlich, sodass $cl(B) \subset A'$ und $\delta(A'/cl(B)) = 0$. Da T_i streng minimal, also insbesondere ω-stabil ist, gibt es für jede Kardinalität nur abzählbar viele Isomorphieklassen. Mit der letzten Folie ist jede dieser Klassen endlich, damit gibt es nur abzählbar viele A'. $\square$

Lemma

Sei $M \in \mathcal{K}^\mu$. Sei $M \leq N$ mit $|N \setminus M| = 1$. Dann folgt $N \in \mathcal{K}^\mu$.

Beweis.

Angenommen nicht. Sei $(e_i)_{i<\mu(c)}$ eine Pseudomorleyfolge in einem präalgebraischen Code c über d in N. Da $\mu(c) \geq m_c$ ist $b \in dcl^{eq}(M)$. Damit liegt jedes e_i entweder komplett in $N \setminus M$ oder in M. Nun gilt $n_c \geq 2$, daher ist jedes e_i in M. Widerspruch zu $M \in \mathcal{K}^\mu$. $\square$