Prof. K. Tent
Dr. M. Bays

Universität Münster
Wintersemester 2016/2017

Modelltheorie
Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Sei T eine Theorie in $\mathcal{L}_{ring}$, die die Körperaxiome T_{Kp} enthält. Zeigen Sie:

a) Wenn T Modelle beliebig großer Charakteristik hat, dann hat T ein Modell der Charakteristik 0.

b) Die Theorie der Körper der Charakteristik 0 ist nicht endlich axiomatisierbar. Das heißt, dass keine einzelne Aussage die Theorie axiomatisiert.

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, 0, <, f^{\mathcal{A}})$, wobei f ein einstelliges Funktionssymbol ist. Wir nennen ein Element $x \in \mathcal{A}^* \succ \mathcal{A}$ *infinitesimal*, wenn $-r < x < r$ für alle $r \in \mathbb{R}^{>0}$ gilt.
Zeigen Sie: Wenn $f^{\mathcal{A}}(0) = 0$ gilt, dann ist $f^{\mathcal{A}}$ genau dann in 0 stetig, wenn in jeder elementaren Erweiterung $\mathcal{A}^*$ von $\mathcal{A}$ die Abbildung $f^{\mathcal{A}^*}$ infinitesimale Elemente auf infinitesimale Elemente abbildet.

Aufgabe 3. Sei κ eine überabzählbare Kardinalzahl. Finden Sie zwei nicht-isomorphe dichte lineare Ordnungen ohne Endepunkte mit Kardinalität κ.
(Das heißt, dass die Theorie T_{DLO} nicht κ-kategorisch ist.)
Hinweis: Das lexikographische Produkt von einer beliebigen linearen Ordnung und $(\mathbb{Q}; <)$ ist dicht.

Aufgabe 4.

a) Zeigen Sie, dass die Theorie der K-Vektorräume κ-kategorisch für $\kappa > |K|$ ist.

b)* Betrachten Sie die Sprache der Graphen $\mathcal{L}_R = \{R\}$, wobei R ein zweistelliges Relationssymbol ist. Wir fassen $\mathcal{L}_R$-Strukturen als Graphen auf, wobei $R(x, y)$ heißt, dass es eine Kante von x nach y gibt. Sei

$$\begin{aligned} T_{RG} = & \big\{\forall x, y\big(\big(R(x,y) \leftrightarrow R(y,x)\big) \wedge \neg R(x,x)\big)\big\} \\ & \cup \big\{\forall x_0, \ldots, x_{m-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}\big(\bigwedge_{i \neq j} \neg x_i = y_j \to \\ & \exists z\big(\bigwedge_{i<m} R(z, x_i) \wedge \neg z = x_i\big) \wedge \big(\bigwedge_{j<n} \neg R(z, y_j) \wedge \neg z = y_j\big)\big) \ \big| \ m, n \in \mathbb{N}_{>0}\big\} \end{aligned}$$

die $\mathcal{L}_R$-Theorie des Zufallsgraphen. Zeigen Sie, dass T_{RG} $\aleph_0$-kategorisch ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Back-and-Forth Methode.

Abgabe bis Montag, den 14.11., 09:00 Uhr, Briefkasten 168.
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: `https://wwwmath.uni-muenster.de/u/baysm/logikII/`