Prof. K. Tent
Dr. M. Bays

Universität Münster
Wintersemester 2016/2017

Modelltheorie
Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass eine Theorie T genau dann Quantorenelimination hat, wenn jeder Typ bereits von seinen quantorenfreien Anteil impliziert wird.

Aufgabe 2.

a) Sei $\mathcal{L}$ eine abzählbare Sprache und M eine $\mathcal{L}$-Struktur. Zeigen Sie: Wenn M $\aleph_0$-kategorisch ist, ist der algebraische Abschluss einer endlichen Menge wieder endlich.

b) Zeigen Sie, dass es keine $\aleph_0$-kategorische $\mathcal{L}_{ring}$-Theorie T gibt, die die Körperaxiome T_{Kp} enthält.

Aufgabe 3.

a) Zeigen Sie, dass T genau dann $\aleph_0$-kategorisch ist, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ es nur endliche viele Formeln $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ bis auf Äquivalenz mod T gibt.

b) Geben Sie ein Beispiel einer Theorie T an, so dass $S_1(T)$ endlich ist, aber T nicht $\aleph_0$-kategorisch ist.

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{L} = \{<, c_1, c_2, \ldots\}$. Die $\mathcal{L}$-Theorie T bestehe aus den Axiomen T_{DLO} einer dichten linearen Ordnung vereinigt mit

$$\{\neg\exists x\forall y(x = y \vee x < y) \wedge \neg\exists x\forall y(x = y \vee y < x)\} \cup \{c_i < c_j \mid i < j\}_{i,j\in\mathbb{N}}.$$

Zeigen Sie:

a) T hat Quantorenelimination und ist vollständig.

b) T hat (bis auf Isomorphie) genau drei abzählbare Modelle.
Hinweis: Denken Sie an obere Schranken und Suprema der Menge $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}$

c) Geben Sie eine Sprache $\mathcal{L}'$ und eine abzählbare $\mathcal{L}'$-Theorie T' an, die genau zwei abzählbare Modelle hat.
Anmerkung: Nach dem Satz von Vaught ist jede solche Theorie notwendigerweise unvollständig.

Abgabe bis Montag, den 5.12., 09:00 Uhr, Briefkasten 168.
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: `https://wwwmath.uni-muenster.de/u/baysm/logikII/`