Prof. K. Tent
Dr. M. Bays

Universität Münster
Wintersemester 2016/2017

Modelltheorie
Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{L}$ die Sprache, die für jede endliche 0-1-Folge $s \in 2^{<\omega}$ ein einstelliges Relationssymbol P_s enthält. Sei T_{BB} die $\mathcal{L}$-Theorie der binären Bäume, also:

$$T_{\mathrm{BB}} = \{\forall x\, P_\emptyset(x) \wedge \exists x\, P_s(x) \wedge \forall x\, ((P_{s0}(x) \vee P_{s1}(x)) \longleftrightarrow P_s(x)) \wedge \forall x\, \neg(P_{s0} \wedge P_{s1})\}_{s \in 2^{<\omega}}$$

Zeigen Sie, dass T vollständig ist und Quantorenelimination hat. Zeigen Sie weiter, dass es keine isolierten Typen in T gibt und dass T kein Primmodell hat.

Aufgabe 2. Sei T eine abzählbare und vollständige Theorie und

$$\Sigma_0(x_1, \ldots, x_{n_0}), \Sigma_1(x_1, \ldots, x_{n_1}), \ldots$$

eine (abzählbare) Folge partieller Typen. Zeigen Sie, dass falls keiner der Typen Σ_i isoliert ist, dann hat T ein Modell, welches alle Σ_i auslässt.

Aufgabe 3. Ein *geordneter* $\mathbb{Q}$-*Vektorraum* ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum mit einer linearen Ordnung $<$, sodass

$$\forall x \forall y \forall z (x < y \to x + z < y + z).$$

Sei $\mathcal{L}_{\mathrm{G}\mathbb{Q}\mathrm{VR}} := \mathcal{L}_{\mathbb{Q}VR} \cup \{<\}$, und sei $T_{\mathrm{G}\mathbb{Q}\mathrm{VR}}$ die $\mathcal{L}_{\mathrm{G}\mathbb{Q}\mathrm{VR}}$-Theorie der unendlichen geordneten $\mathbb{Q}$-Vektorräume.

a) Zeigen Sie, dass $T_{\mathrm{G}\mathbb{Q}\mathrm{VR}}$ vollständig ist und Quantorenelimination hat.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R} \models T_{\mathrm{G}\mathbb{Q}\mathrm{VR}}$ keine nicht-konstante unendliche ununterscheidbare Folge hat.

c) Sei $\mathcal{U}$ ein nicht-Hauptultrafilter und sei ${}^*\mathbb{R}$ die Ultrapotenz $\prod_{i \in \omega} \mathbb{R}/\mathcal{U} \models T_{\mathrm{G}\mathbb{Q}\mathrm{VR}}$. Beschreiben Sie eine nicht-konstante unendliche ununterscheidbare Folge in ${}^*\mathbb{R}$.
Hinweis: Sei $\alpha > \mathbb{R}$. Betrachten Sie $(\alpha^n)_{n \in \omega}$.

Aufgabe 4. Sei $\mathfrak{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Zeigen Sie: Wenn $\mathfrak{M}$ κ-saturiert ist, dann wird jede $\mathcal{L}$-Formel in $\mathfrak{M}$ entweder von endlich vielen oder von mindestens κ-vielen Elementen erfüllt.

Abgabe bis Montag, den 19.12., 09:00 Uhr, Briefkasten 168.
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: `https://wwwmath.uni-muenster.de/u/baysm/logikII/`