Prof. K. Tent
Dr. M. Bays

Universität Münster
Wintersemester 2016/2017

Modelltheorie
Übungsblatt 10

Aufgabe 1.

a) Zeigen Sie das Baldwin-Saxl-Lemma für totaltranszendente Theorien: Sei $\mathcal{G}$ eine Gruppe mit einer totaltranszendenten Theorie. Dann existiert keine unendliche strikt absteigende Kette von definierbare Untergruppen

$$\mathcal{G} > G_1 > G_2 > \dots .$$

Hinweis: Betrachten Sie die Nebenklassen.

b) Zeigen Sie, dass jeder totaltranszendente Integritätsbereich R ein Körper ist.
Hinweis: Wenn $a \in R$ nicht invertierbar ist, betrachte die Ideale $a^n R$.

Aufgabe 2. Sei T eine abzählbare total transzendente $\mathcal{L}$-Theorie und $\varphi(x)$ eine $\mathcal{L}$-Formel, so dass T ein Vaught'sches Paar für $\varphi(x)$ hat. Zeigen Sie, dass T für alle überabzählbaren Kardinalzahlen κ ein Modell $\mathcal{M}$ der Größe κ hat, so dass $\varphi(\mathcal{M})$ abzählbar ist.
Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Lachlan.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die $\mathcal{L}_R$-Theorie T_{RG} des Zufallsgraphen ein Vaught'sches Paar hat.
Hinweis: Sei $\mathcal{G}$ der Zufallsgraph und $v_0 \in G$ eine Ecke. Betrachten Sie den Teilgraphen $\mathcal{G}_0$ mit Universum $G_0 = G \setminus \{v_0\}$. Finden Sie nun eine geeignete $\mathcal{L}_R(G_0)$-Formel $\varphi(x)$ mit $\varphi(\mathcal{G}) = \varphi(\mathcal{G}_0)$.

Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $A \subseteq M$. Eine $\mathcal{L}(A)$-Formel $\phi(x)$ heißt *algebraisch*, wenn die Menge $\phi(\mathcal{M}) = \{m \in M \mid \mathcal{M} \models \phi(m)\}$ endlich ist. Ein Typ $p \in S(A)$ heißt *algebraisch*, wenn p eine algebraische Formel enthält.

Aufgabe 4.

a) Zeigen Sie, dass algebraische Typen isoliert sind.

b) Sei $A \subseteq M$ endlich und M ω-saturiert. Zeigen Sie, dass $p \in S_1(A)$ genau dann algebraisch ist, wenn $p(M)$ endlich ist.

Abgabe bis Montag, den 16.01, 09:00 Uhr, Briefkasten 168.
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: `https://wwwmath.uni-muenster.de/u/baysm/logikII/`