Vorlesung Modelltheorie 15.12.14.

Erinnerung

Def: I lin. Ordnung, $\mathcal{I} = (a_i)_{i\in I}$ Folge von k-Tupeln in $\mathcal{M}$.

Sage: $\mathcal{I}$ ununtersch. gdw. $EM(\mathcal{I})$ vollständig.

(1.) $\mathcal{I}$ heißt ununterscheidbar, falls f.a. $\mathcal{L}$-fml. $\varphi(x_1,..., x_n)$ und alle $i_1 < ... < i_n$, $j_1 < ... < j_n \in I$
$$\mathcal{M} \models \varphi(a_{i_1},..., a_{i_n}) \leftrightarrow \varphi(a_{j_1},..., a_{j_n}).$$

(2.) Ehrenfeucht-Mostowski-Typ $\quad A \subseteq M$
$$EM(\mathcal{I}/A) = \{\varphi(x_1,..., x_n) \mid n < \omega,\ \mathcal{M} \models \varphi(a_{i_1},..., a_{i_n}) \text{ f.a. } i_1 < ... < i_n\}$$

Beispiel: $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, <)$, $I = \mathbb{Q}$

(1.) $a_i = i$ f.a. $i \in \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ $x_1 < ... < x_n \in EM(\mathcal{I}/A)$ f.a. n

(2.) $a_i = i$ f.a. $i \in \mathbb{Q} \setminus \{0,1\}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$
$\Rightarrow$ $x_1 < x_2$, $x_2 \leq x_1 \notin EM(\mathcal{I}/A)$
$\rightsquigarrow$ $EM(\mathcal{I}/A)$ nicht notw. vollst.

Lemma 5.3 (Standardlemma): I, J unendl. lin. Ord., $\mathcal{I} = (a_i)_{i\in I}$ Folge von Elementen in $\mathcal{M}$. Dann ex. $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$ und Folge ununtersch. $(b_j)_{j\in J}$ in $\mathcal{N}$, die $EM(\mathcal{I})$ realisiert.

Korollar 5.4. Wenn T ein unendl. Modell hat, dann ex. für jede lin. Ordnung I ein Modell von T mit einer Folge $(a_i)_{i\in I}$ ununt. Elemente, a_i paarweise verschieden.

Satz 5.5 (Ramsey) A unendl., $n, k \in \omega$.
Wenn $[A]^n = \bigcup_{i\leq k} C_i$ dann ex. $B \subseteq A$ unendl. mit $[B]^n \subseteq C_j$ für ein $1 \leq j \leq k$.

Bew. von 5.3.:

Sei C eine geordnete Menge neuer Konstanten mit $(C,<) \cong (J,<)$. Betrachte

$T' := \{\varphi(\bar{c}) \mid \varphi(\bar{x}) \in EM(\mathcal{I})\}$ und

$T'' := \{\varphi(\bar{c}) \leftrightarrow \varphi(\bar{d}) \mid \bar{c}, \bar{d} \subseteq C\}$

wobei φ $\mathcal{L}$-Fml. und alle Tupel $\bar{c}, \bar{d}$ monoton wachs.

z.z.: $T \cup T' \cup T''$ konsistent.

Kompaktheitssatz $\Rightarrow$ genügt, $C_0 \subseteq C$ endl. und Δ endl. Fmlmenge zu betrachten, d.h.

z.z.: $T_{C_0,\Delta} = T \cup \{\varphi(\bar{c}) \in T' \mid \bar{c} \in C_0\}$
$\cup \{\varphi(\bar{c}) \leftrightarrow \varphi(\bar{d}) \mid \varphi \in \Delta, \bar{c}, \bar{d} \in C_0\}$
ist konsistent.

OE: Die Fml. aus Δ haben freie Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und $\bar{c}$ und $\bar{d}$ sind n-Tupel.

Nehme an, (a_i) paarweise verschieden, d.h. sonst nix zu tun!

$A = \{a_i \mid i \in I\}$ ist geordnete Menge

Wir definieren Äqrelation auf $[A]^n$ durch

$\bar{a} \sim \bar{b} \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}) \leftrightarrow \varphi(\bar{b})$ f.a. $\varphi(\bar{x}) \in \Delta$

wobei $\bar{a}$ und $\bar{b}$ aufsteigende Tupel sind.

Es gibt max. $2^{|\Delta|}$-viele Äq.klassen, also ex. nach Ramsey $B \subseteq A$ unendl., s.d. alle $X \in [B]^n$ äq. sind.

Interpretiere $c \in C_0$ durch $b_c \in B$ in entsprech. Ordnung. $\Rightarrow (\mathfrak{M}, b_c)_{c \in C_0} \models T_{C_0,\Delta}$. ☒

Lemma 5.6. Sei $\mathcal{L}$ abz. und sei $\mathfrak{M}$ eine $\mathcal{L}$-Str., die von einer wohlgeordneten Menge ununtersch. Elemente erzeugt wird. Dann realisiert $\mathfrak{M}$ nur abz. viele Typen über jeder abz. TM von M.

Bew: $A = \{a_i \mid i \in I\}$. Jedes $b \in M$ hat die Form
$b = t^m(\bar{a})$ für einen $\mathcal{L}$-Term t und ein $\bar{a} \in A$.
Sei $S \subseteq M$ abz., $S = \{t_n^m(\bar{a}^n) \mid n \in \omega\}$.
Sei $A_0 = \{a_i \mid i \in I_0\} \subseteq A$ die (abz.) Menge der Elemente, die in den $\bar{a}^n$ vorkommen.
Dann ist der Typ $tp(b/S)$ durch $tp(b/A)$ vollst. bestimmt: Jede $\mathcal{L}(S)$-Fml. $\varphi(x, t_{n_1}^m(\bar{a}^{n_1}), \dots)$ kann durch eine $\mathcal{L}(A)$-Fml. $\varphi(x, t_{n}(\bar{a}^{n_1}), \dots)$ ersetzt werden.
$tp(b/A_0) = tp(t(\bar{a})/A_0)$ hängt nur von $t(\bar{x})$ (abz. viele Möglichkeiten) und $tp(\bar{a}/A_0)$ ab.
Schreibe $\bar{a} = a_{\bar{i}}$ für ein Tupel $\bar{i} \in I$.
Da die a_i ununtersch. sind, hängt $tp(a_{\bar{i}}/A_0)$ nur vom ql. Typ $tp_{ql}(\bar{i}/I_0)$ in der Struktur $(I, <)$ ab.
$tp_{ql}(\bar{i}/I_0)$ wird von $tp_{ql}(\bar{i})$ (endl. viele Mglkeiten) und den Typen $tp_{ql}(i/I_0)$ der Elemente $i \in \bar{i}$ ab.
Es gibt drei Arten solcher Typen:
(1.) i ist größer als alle $i_0 \in I_0$.
(2.) $i = i_0 \in I_0$
(3.) es gibt $i_0 \in I_0$ mit $i < i_0$ und $i > j$ f.a. $j \in I_0$ mit $j < i_0$.
Nur ein Typ der Sorte (1), $|I_0|$-viele Typen der Sorten (2) & (3.)
$\Rightarrow$ abz. viele Möglichkeiten für jede Komp. von $\bar{i}$ $\square$

Def. 5.7: Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache. Eine Skolemtheorie Skolem($\mathcal{L}$) ist eine Theorie in einer Erweiterung $\mathcal{L}_{\text{Skolem}} \supseteq \mathcal{L}$ mit den Eigenschaften:

(a) Skolem($\mathcal{L}$) hat QE

(b) Skolem($\mathcal{L}$) ist universell

(c) Jede $\mathcal{L}$-Struktur kann zu einem Modell von Skolem($\mathcal{L}$) erweitert werden

(d) $|\mathcal{L}_{\text{Skolem}}| \leq \max(|\mathcal{L}|, \aleph_0)$

Satz 5.8: Jede Sprache hat eine Skolemtheorie.

Bew: Definiere eine aufsteigende Folge von Sprachen

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq \ldots$

wie folgt: für jede q.f. $\mathcal{L}_i$-Fml. $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ füge eine neue n-stellige Skolemfunktion f_φ ein, setze $\mathcal{L}_{i+1} = \mathcal{L}_i \cup \{f_\varphi \mid \varphi(\bar{x}, y) \text{ q.f. } \mathcal{L}_i\text{-Fml.}\}$

$\mathcal{L}_{\text{Skolem}} = \bigcup_{i \in \omega} \mathcal{L}_i$. Definiere nun Skolem($\mathcal{L}$):

Skolem($\mathcal{L}$) $= \{\forall \bar{x}(\exists y\, \varphi(\bar{x}, y) \leftrightarrow \varphi(\bar{x}, f_\varphi(\bar{x}))) :$
$\varphi(\bar{x}, y) \text{ q.f. } \mathcal{L}_{\text{Skolem}}\text{-Fml.}\}$. ☑

Korollar 5.9.: Sei T abz. Theorie mit unendl. Modellen κ unendl. Kard. Dann hat T ein Modell der Kard. κ, in welchem nur abz. viele Typen über jeder abz. TM realisiert werden.

Bew: Betrachte $T^* = T \cup$ Skolem($\mathcal{L}$). Dann ist T^* abz., hat ein unendl. Modell und QE.

Beh: T^* ist äq. zu einer universellen Theorie.

Bew: Modulo Skolem($\mathcal{L}$) ist jedes $\varphi \in T$ äq. zu φ^* q.f. Also T^* äq. zu Skolem($\mathcal{L}$) $\cup \{\varphi^* \mid \varphi \in T\}$, dies ist univ. ☐

Sei nun I Wohlordnung, $|I| = \kappa$, $\mathcal{M}^* \models T^*$ mit
$(a_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{M}^*$ ununterscheidbar, p.w. verschieden.
Sei $\mathcal{M}^* = \langle (a_i)_{i\in I} \rangle$ erzeugte Unterstruktur.
Beh $\Rightarrow$ $\mathcal{M}^* \models T^*$, $|\mathcal{M}^*| = \kappa$.
T^* hat QE $\Rightarrow$ $\mathcal{M}^* \prec \mathcal{M}^*$ $\Rightarrow$ $(a_i)_{i\in I}$ ununt. in $\mathcal{M}^*$.
Lemma 5.6. $\Rightarrow$ in $\mathcal{M}^*$ werden nur abz. viele Typen über jeder abz. TM realisiert.
~~Bew~~ $\rightsquigarrow$ gleiches gilt für $\mathcal{M} = \mathcal{M}^* \restriction_L$ $\boxtimes$

§5.2. ω-stabile Theorien.

Ab jetzt: T vollst. unendl. Modelle.

§5.1 $\rightsquigarrow$ man kann ununt. Elem. zu einem Modell hinzufügen ohne die Anzahl der real. Typen zu ändern.

Jetzt: zeige: $\aleph_1$-kat. Theorien haben "nicht viele" Typen, d.h. sie sind ω-stabil.

Wenige Typen $\rightsquigarrow$ einfacher saturiert zu sein.
sat. Strukturen gleicher Mächtigkeit isom.
$\rightsquigarrow$ Kategorizität.

Def 5.10. Sei κ unendl. Kard.zahl. T ist κ-stabil, wenn es in jedem Modell von T über jeder Parammenge der Größe max κ und f.a. $n \in \mathbb{N}$ höchstens κ-viele n-Typen gibt, d.h.
$|A| \leq \kappa \Rightarrow |S_n(A)| \leq \kappa$.

Bem: T κ-stabil $\Rightarrow$ $|T| \leq \kappa$ (bis auf log. Äquivalenz).

Lemma 5.11: T ist κ-stabil gdw. T κ-stabil für 1-Typen ist, d.h.

$$|A| \leq \kappa \Rightarrow |S_1(A)| \leq \kappa.$$

Bew: Ang. T κ-stabil für 1-Typen.
Zeige T κ-stabil für n-Typen per Ind über n.
Sei $M \models T$, $A \subseteq M$, $|A| \leq \kappa$.
OBdA: Alle Typen $/A$ realisiert in M.
Betrachte die Einschränkungsabbildung

$$\pi: S_n(A) \to S_1(A)$$

Annahme $\Rightarrow |S_1(A)| \leq \kappa$.
Jedes $p \in S_1(A)$ hat Form $tp(a/A)$ für ein $a \in M$.
Blatt 5, A4 $\Rightarrow \pi^{-1}(p)$ steht in Bijektion mit $S_{n-1}(aA)$.
$\Rightarrow |\pi^{-1}(p)| \leq \kappa$ nach I.V. $\Rightarrow |S_n(A)| \leq \kappa$. ☒

Beispiel 5.12: ACF_p (p prim oder $p=0$) ist κ-stabil für alle κ.

Bew: Sei $F \models ACF_p$, $K \subseteq F$ Unterkörper.
QE $\Rightarrow tp(a/K)$ ist durch den Isom.typ der Erweiterung $K[a]/K$ vollst. bestimmt.
a transz. $/K \Rightarrow K[a] \cong K[X]$
a alg. mit Mipo $f \Rightarrow K[a] \cong K[X]/(f)$
$\Rightarrow$ # 1-Typen $/K$ = # irred. normierte Polynome $/K$ $+1$. ☒

Direkter Bew. für ACF_p κ-stabil für n-Typen:
Isomtyp von $K[a_1,..,a_n]/K$ ist durch das Verschw.ideal $I = I(a_1,..,a_n)$ vollst. best. Hilberts Basissatz $\Rightarrow I$ endl. erz.
$|K| = \kappa \Rightarrow$ höchstens κ-viele solche Ideale in $K[X_1,..,X_n]$ ☒

Satz 5.13. Eine abz. Theorie, die in einer überabz. Kardinalzahl kategorisch ist, ist ω-stabil [Synonym für $\aleph_0$-stabil]

Bew: Sei $\mathcal{N} \models T$, $A \subseteq N$ abz., mit $S(A)$ überabz.,
$(b_i)_{i \in I}$ Folge von $\aleph_1$-vielen Elementen mit p.w. unterschiedlichen Typen $/A$.
OBdA werden alle Typen $/A$ in $\mathcal{N}$ realisiert.
Wähle $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{N}$ mit $|\mathcal{M}_0| = \aleph_1$, $A \subseteq \mathcal{M}_0$, $(b_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{M}_0$.
Wähle $\mathcal{M} \succ \mathcal{M}_0$, $|\mathcal{M}| = \kappa$.
$\Rightarrow$ $\mathcal{M}$ real. überabz. viele Typen über der abz. Teilmenge A.
Korollar 5.9. $\Rightarrow$ ex. $\mathcal{M}' \models T$, $|\mathcal{M}'| = \kappa$, über jeder abz. Teilmenge von $\mathcal{M}'$ werden nur abz. viele Typen realisiert.
$\Rightarrow$ $\mathcal{M}' \not\cong \mathcal{M}$, d.h. T nicht κ-kat. $\boxtimes$

Def 5.14. Eine abz. Theorie ist total transzendent, wenn es kein Modell $\mathcal{M}$ mit einem binären Baum konsistenter $\mathcal{L}(M)$-Fml gibt.

Satz 5.15. (1.) ω-stabile Theorien sind total transz.
(2.) total transz. Theorien sind κ-stabil f.a. $\kappa \geq |T|$.

$\rightsquigarrow$ T abz.: ω stabil $\Leftrightarrow$ total transzendent.

In Beispiel 5.12: genügt zu zeigen, dass ACF_p ω-stabil. "Rückrichtung" gilt auch:

Satz (Macintyre): Sei K unendl. Kp., ang. Th(K) ω-stabil in $\mathcal{L}_{ring}$ $\Rightarrow$ $K \models ACF$.