Mi, 14-16 Uhr

Modelltheorie

Übung: Montag nachmittag oder Dienstag ?

Kapitel 1: Grundlagen [siehe TZ]

1.1 Strukturen

Def: Eine Sprache $\mathcal{L}$ ist eine Menge von Konstanten, Funktionszeichen und Relationssymbolen. Funktionszeichen und Relationszeichen haben eine Stelligkeit ≥ 1.

Bsp: $\mathcal{L}_\emptyset = \emptyset$ leere Sprache

$\mathcal{L}_{AbG} = \{0, +, -\}$

$\mathcal{L}_{ring} = \mathcal{L}_{AbG} \cup \{1, \cdot\}$

$\mathcal{L}_{order} = \{<\}$

$\mathcal{L}_{ORing} = \mathcal{L}_{ring} \cup \mathcal{L}_{order}$

$\mathcal{L}_{set} = \{\in\}$

Def: Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache. Eine $\mathcal{L}$-Struktur ist ein Paar $\mathfrak{A} = (A, (z^{\mathfrak{A}})_{z \in \mathcal{L}})$ mit $A \neq \emptyset$ Menge und

$z^{\mathfrak{A}} \in A$ für $z \in \mathcal{L}$ Konstantensymb.

$z^{\mathfrak{A}}: A^n \to A$ für $z \in \mathcal{L}$ n-stell. Fktsymb.

$z^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ " Rel.symbol

Die Mächtigkeit (oder Kardinalität) von $\mathfrak{A}$ wird definiert als $|A|$.

Beispiel: $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, (+^{\mathbb{C}}, \cdot^{\mathbb{C}}, 0^{\mathbb{C}}, 1^{\mathbb{C}}, -^{\mathbb{C}}))$ ist $\mathcal{L}_{ring}$-Struktur, $|\mathcal{C}| = 2^{\aleph_0}$.

Beispiel K-VR?

Def: Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-Strukturen. $h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ heißt Homomorph., falls

$h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$ f.a. Konstanten $c \in \mathcal{L}$ und

$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$ ~~f.a.~~

$R^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow R^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$

f.a. n-stell. Fkt.symb. f, Rel.symb. R und

f.a. $a_1, \dots, a_n \in A$.

- Wenn h injektiv ist und
  $R^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow R^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$ gilt,
  heißt h (isomorphe) Einbettung.
- Eine surjektive Einbettung heißt Isomorphismus.
  Schreibe $h: \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

$(\mathbb{Q}, +) \subset (\mathbb{R}, +)$

Bem: Isomorphie ist eine Äq.relation.

Def: Ein Automorphismus ist ein Isom $\mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}$.

Bem: Die Menge der Autom. bildet eine Grp. bzgl. der Komposition.

Def: $\mathfrak{A}$ ist Unterstruktur von $\mathfrak{B}$ falls $A \subseteq B$ gilt und die Inklusion eine Einbettung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist. Schreibe dann $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Wir sagen auch "$\mathfrak{B}$ ist Oberstruktur von $\mathfrak{A}$".

Lemma: Sei $\mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-Struktur, $A \subseteq B$. Dann ist A Universum einer Unterstruktur von $\mathfrak{B}$ gdw.

- A enthält alle $c^{\mathfrak{B}}$ für $c \in \mathcal{L}$ Konstante
- A abg. unter $f^{\mathfrak{B}}$ f.a. $f \in \mathcal{L}$ Fkt.symbol.

Die Struktur $\mathfrak{A}$ ist durch A eindeutig bestimmt.

Bew: (mündlich)

Folgerung: $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ Homom. Dann ist $h(A)$ eine Unterstruktur von $\mathfrak{B}$.

Bew: $f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n)) = h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) \in h(A)$. ☒

Lemma: Sei $h : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}'$ Isom. und $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$.
Dann ex. Erw. $\mathfrak{B}' \supseteq \mathfrak{A}'$ und Isom. $g : \mathfrak{B} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}'$.

Bew: Wähle $B' \supseteq A'$ mit $|B'| = |B|$ und setze h zu Bijektion $g : B \to B'$ fort.
Benutze g, um die $\mathcal{L}$-Struktur auf B' zu def. ☒

Falls noch nicht mehr als ein Drittel der VL um ist:

Def: $(I, \leq)$ heißt partielle Ordnung, falls f.a. $i, j \in I$ ex. $k \in I$ mit $i \leq k$ und $j \leq k$.
Sei $(I, \leq)$ p.O. Eine Familie $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ von $\mathcal{L}$-Strukturen heißt gerichtet, falls

$$i \leq j \Rightarrow \mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_j$$

gilt. Falls I lin. geordnet ist, sagen wir $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ ist eine Kette.

Lemma: Sei $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ eine gerichtete Familie von $\mathcal{L}$-Strukturen. Dann ist $A = \bigcup A_i$ das Universum einer (eind. bestimmten) $\mathcal{L}$-Struktur

$$\mathfrak{A} = \bigcup \mathfrak{A}_i$$

die eine Oberstruktur aller $\mathfrak{A}_i$ ist.

Bew: Sei R n-stell. Relationssymb., $a_1, \dots, a_n \in A$.
I gerichtet $\Rightarrow$ ex. k mit $a_1, \dots, a_n \in A_k$.
Definiere

$$R^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow R^{\mathfrak{A}_k}(a_1, \dots, a_n)$$

Dies ist die einzige Möglichkeit!
Konst & Fktsymb. ebenso ☒

— Keine Zeit —

1.2. Sprache

Bsp: $\mathcal{L}_{ring} = \{0, +, -, 1, \cdot\}$

$\mathcal{L}_{ring}$ - Fml. $\forall v_0 \exists v_1 \; v_0 = v_1 \cdot v_1$

$\mathcal{L}_{ring}$ - Term $v_5 \cdot v_5 \cdot v_6 + v_3$, 0

Def: Ein $\mathcal{L}$-Term ist eine Zeichenreihe, die nach den folgenden Regeln aufgebaut ist:

- jede der Variablen $v_0, v_1, \dots$ ist ein Term
- jede Konstante $c \in \mathcal{L}$ ist -"-
- Wenn f n-stelliges Fkt.symb. ist und $t_1, \dots, t_n$ Terme, dann ist $f t_1 \dots t_n$ ein Term.

Schreibweise: $f(t_1, \dots, t_n)$ und $t_1 + t_2$ statt $+(t_1, t_2)$.

Bem: Terme sind eindeutig lesbar.

Def: Sei $\mathfrak{A}$ $\mathcal{L}$-Struktur, t ein $\mathcal{L}$-Term. Sei $\vec{b} = b_0 b_1 b_2 \dots$ eine "Belegung der Variablen $v_0 v_1 v_2 \dots$", $b_i \in A$.
Dann ist $t^{\mathfrak{A}}[\vec{b}]$ definiert durch

- $v_i^{\mathfrak{A}}[\vec{b}] = b_i$
- $c^{\mathfrak{A}}[\vec{b}] = c^{\mathfrak{A}}$ für $c \in \mathcal{L}$ konst.
- $(f(t_1, \dots, t_n))^{\mathfrak{A}}[\vec{b}] = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\vec{b}], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[\vec{b}])$

[Beachte: Diese rekursive Def. fkt. wegen der eind. Lesbarkeit]

Lemma: $t^{\mathfrak{A}}[\vec{b}]$ hängt nur von der Belegung der Variablen ab, die in t vorkommen.

Schreibweise: $t(x_1, \dots, x_n)$ falls:

- x_i sind paarweise verschiedene Variablen $x_i \in \{v_0, v_1, \dots\}$, $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$.
- höchstens die x_i kommen in t vor.

Wenn $\vec{b}$ die Variable x_i durch a_i belegt,
schreibe $\quad t^{\mathfrak{A}}[a_1,..,a_n] := t^{\mathfrak{A}}[\vec{b}]$.

Lemma (Substitutionslemma)

BSP: $t = v_0 + v_1$

$$t(t_1,..,t_n)^{\mathfrak{A}}[\vec{b}] = t^{\mathfrak{A}}[t_1^{\mathfrak{A}}[\vec{b}],.., t_n^{\mathfrak{A}}[\vec{b}]].$$

$t_1 = v_2 \cdot v_2,\ t_2 = 1$

Terme substituiert für $x_1,..,x_n$

$t(t_1,t_2) = v_2 \cdot v_2 + 1 \quad [\vec{b}] = v_2 \cdot v_2[\vec{b}] + 1[\vec{b}]$

Lemma: Sei $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ Homom., $t(x_1,..,x_n)$ Term.
Dann gilt f.a. $a_1,..,a_n \in A$
$$t^{\mathfrak{B}}[h(a_1),.., h(a_n)] = h(t^{\mathfrak{A}}[a_1,..,a_n])$$
Bew: ÜA.

Def: L-Fml sind Zeichenketten gebildet aus Symbolen aus L, Klammern (und) und den folgenden Symbolen:

Variablen	$v_0, v_1, v_2, \dots$
Gleichheit	$\doteq$
Negation	$\neg$
Konjunktion	$\wedge$
Existenzquantor	$\exists$

mittels der folgenden Regeln

atomar $\begin{cases} 1.\ t_1 \doteq t_2 & \text{für } t_1, t_2\ L\text{-Terme} \\ 2.\ Rt_1 \dots t_n & \text{für } R \text{ n-stelliges Rel.symbol aus } L,\ t_1,..,t_n\ L\text{-Terme} \end{cases}$

3. $\neg\varphi$ — für φ L-Fml.
4. $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ — für φ_1 & φ_2 L-Fmln
5. $\exists x \varphi$ — für φ L-Fml, x Variable.

Komplexität einer Fml: Anzahl der Symbole $\wedge, \neg, \exists$.

$\rightsquigarrow$ Können Induktion über die Komplexität machen!

Abkürzungen und Notationen:

$(\psi_1 \vee \psi_2) = \neg(\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2)$

$(\psi_1 \rightarrow \psi_2) = \neg(\psi_1 \wedge \neg\psi_2)$

$(\psi_1 \leftrightarrow \psi_2) = (\psi_1 \rightarrow \psi_2) \wedge (\psi_2 \rightarrow \psi_1)$

$\forall x\, \psi = \neg\exists x \neg\psi$

Weglassen von Klammern

$\neg, \exists, \forall$ | $+$

$\wedge$ | Bindestärke

$\vee$

$\rightarrow$, $\leftrightarrow$ | $-$

etwa

$\neg x \wedge y \neq \neg(x \wedge y)$

$x \wedge y \vee z = (x \wedge y) \vee z$

Jetzt: $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$, $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ $\mathcal{L}$-Fml, $\vec{b}$ Belegung.

Was heißt "φ gilt für $\vec{b}$"?

In $\mathbb{C}$ gilt $i \cdot i = -1$ und $\exists x\; x \cdot x = -1$

Def: Sei $\mathfrak{A}$ $\mathcal{L}$-Struktur. Für alle $\mathcal{L}$-Fml φ und alle Belegungen $\vec{b}$, definiere

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{b}]$$

rekursiv über den Aufbau von φ:

$\mathfrak{A} \models t_1 \doteq t_2\, [\vec{b}] \iff t_1^{\mathfrak{A}}[\vec{b}] = t_2^{\mathfrak{A}}[\vec{b}]$

$\mathfrak{A} \models R t_1 \dots t_n\, [\vec{b}] \iff R^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\vec{b}], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[\vec{b}])$

$\mathfrak{A} \models \neg\varphi(\vec{b}) \iff \mathfrak{A} \not\models \varphi[\vec{b}]$

$\mathfrak{A} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)[\vec{b}] \iff \mathfrak{A} \models \psi_1[\vec{b}]$ und $\mathfrak{A} \models \psi_2[\vec{b}]$

$\mathfrak{A} \models \exists x\, \psi[\vec{b}] \iff$ ~~∃~~ ex. $a \in A$ so, dass

$$\mathfrak{A} \models \psi[\vec{b}\tfrac{a}{x}]$$

Notation: $\vec{b}\frac{a}{x} = (b_0, b_1, \dots, b_{i-1}, a, b_{i+1}, \dots)$ für $x = v_i$.

Falls $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{b}]$ gilt, sagen wir, dass φ in $\mathfrak{A}$ von $\vec{b}$ erfüllt wird.

Def: Die Variable x ist freie Variable einer Fml. φ wenn x an einer Stelle in φ vorkommt, die nicht durch einen Quantor $\exists x$ gebunden wird. Sonst heißt x gebunden. Formal:

x frei in $t_1 \doteq t_2 \iff x$ kommt in t_1 oder t_2 vor.

x frei in $Rt_1,..,t_n \iff$ -"- einem t_i vor

x frei in $\neg\psi \iff x$ frei in ψ

x frei in $(\psi_1 \wedge \psi_2) \iff x$ frei in ψ_1 oder ψ_2

x frei in $\exists y \psi \iff x \neq y$ und x frei in ψ.

Beispiel $x < y$ (x und y frei)

$\forall z \exists y\ x < y + z$ (x frei)

Lemma: Wenn $\vec{b}$ und $\vec{c}$ die freien Variablen von φ gleich belegen, gilt

$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{b}] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{c}]$.

Notation: Schreibe $\varphi = \varphi(x_1,..,x_n)$ falls höchstens die x_i frei in φ sind, x_i paarw. verschieden.

Definiere $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1,..,a_n]$ durch $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{b}]$ für eine (alle) Belegung $\vec{b}$ mit $\vec{b}(x_i) = a_i$

Für jedes $\varphi(x_1,..,x_n)$ definiert dies n-stellige Relation auf $\mathfrak{A}$ durch

$\varphi(\mathfrak{A}) = \{\bar{a} \in A^n \mid \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})\}$,

dies heißt die Realisierungsmenge von φ.

Solche Mengen heißen $\emptyset$-definierbar.

Lemma (Substitutionslemma):

$\mathfrak{A} \models \varphi(t_1,..,t_n)[\vec{b}] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[t_1^{\mathfrak{A}}[\vec{b}],..,t_n^{\mathfrak{A}}[\vec{b}]]$

Bew: ÜA.

Def: Eine $\mathcal{L}$-Aussage (oder ein $\mathcal{L}$-Satz) ist eine Formel ohne freie Variablen.
Schreibe $\mathfrak{A} \models \varphi$ "$\mathfrak{A}$ ist Modell von φ" und sage φ hält in $\mathfrak{A}$, falls $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{b}]$ für eine (alle) Belegungen ~~φ~~ $\bar{b}$ gilt.
Eine Menge von Aussagen heißt $\mathcal{L}$-Theorie.

Nur mündlicher Ausblick

Beispiele: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ring}$.

$\mathcal{L}$-Aussagen:

$T_{Kp} :=$ [Theorie der Körper:] $= \{(i), \ldots, (x)\}$

(i) $\neg 1 \doteq 0$

(ii) $\forall x \exists y \quad x \cdot y \doteq 1$

(iii) $\forall x \quad x \cdot 1 \doteq x$

(iv) $\forall x \forall y \forall z \quad (x \cdot y) \cdot z \doteq x \cdot (y \cdot z)$

(v) $\forall x \forall y \quad x \cdot y \doteq y \cdot x$

(vi) $\forall x \exists y \quad x + y \doteq 0$

(vii) $\forall x \quad x + 0 \doteq x$

(viii) $\forall x \forall y \forall z \quad (x + y) + z \doteq x + (y + z)$

(ix) $\forall x \forall y \quad x + y \doteq y + x$

(x) $\forall x \forall y \forall z \quad (x + y) z \doteq xz + yz$.

T_{ACF} : $T_{Kp} \cup \{(xi)_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\qquad \mathbb{C} \models T_{ACF}$

$(xi)_n$: $\forall x_0, \ldots, x_n \exists x \quad x_n x^n + x_{n-1} x^{n-1} + \ldots + x_1 x + x_0 \doteq 0$

"Jedes Polynom von Grad n hat Nst."

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{AbG}$

T_{DFFAG} : $\{(vi), (vii), (viii), (ix)\} \cup \{(xii)_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{(xiii)_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$(xii)_n \quad \forall x \exists y \quad \underbrace{y + \ldots + y}_{n\text{-mal}} \doteq x$

$(xiii)_n \quad \forall x \quad (\neg x \doteq 0 \to \neg \underbrace{x + \ldots + x}_{n\text{-mal}} \doteq 0)$.

$(\mathbb{Q}, +^{\mathbb{Q}}) \models$ DFFAG

<u>Bsp für Theorien</u>

T_{AG} ab. Gr.

T_{Ring} komm. Ring

T_{Kp} Körper

T_{ACF} alg. abg. Körper

$T_{K\text{-}VR}$

<u>Def</u> 1.15 Eine Theorie heißt kons., wenn sie ein Modell hat. Eine Menge Σ von L-Formeln heißt kons., wenn es eine L-Str. $\mathfrak{A}$ und eine Beleg. $\vec{b}$ gibt mit $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{b}]$ für alle $\varphi \in \Sigma$.

<u>Bem</u>: Ist T eine L-Th., $L' \supseteq L$ eine Spracherw., dann ist T als L-Th. kons. gdw T als L'-Th. kons. ist.

<u>Bew</u>: Jede L-Str. lässt sich als L'-Str. auffassen.

<u>Def</u>. 1.16 Eine Auss. φ <u>folgt</u> aus der Theorie T, falls $\mathfrak{A} \models \varphi$ für alle $\mathfrak{A} \models T$, $T \vdash \varphi$.

Nach der Vorbem. ist das unabh. von der Sprache L.

Es gilt:

<u>Lemma</u> 1.17 (i) Wenn $T \vdash \varphi$ und $T \vdash (\varphi \to \psi)$, dann auch $T \vdash \psi$.

(ii) Wenn $T \vdash \varphi(c_1, .. c_n)$ für Konst. $c_1, .. c_n$, die weder in T noch in $\varphi(x_1, .. x_n)$ vorkommen, dann gilt

$$T \vdash \forall x_1 \dots x_n\, \varphi(x_1, .. x_n).$$

<u>Bew</u>: (i) klar

(ii) Sei $L' = L \setminus \{c_1, .. c_n\}$. Wenn die L'-Str. $\mathfrak{A}$ ein Modell von T ist und $a_1, .. a_n \in A$ bel., dann gilt $(\mathfrak{A}, a_1, .. a_n) \models \varphi(c_1, .. c_n)$ nach Voraus.

Also gilt $\mathfrak{A} \models \forall x_1, \dots x_n\, \varphi(x_1, \dots x_n)$, d.h. $T \vdash \forall x_1, \dots x_n\, \varphi(x_1, \dots x_n)$.

Def 1.18 (i) Für Theorien S, T schreiben wir $T \vdash S$, falls $\mathfrak{A} \models T \Rightarrow \mathfrak{A} \models S$, und $T \equiv S$ falls T und S dieselben Modelle haben, d.h. $T \vdash S$ und $S \vdash T$; dann heißen S und T <u>äquivalent</u>.

(ii) Eine kons. Theorie heißt <u>vollst.</u>, falls für alle Auss. φ gilt $T \vdash \varphi$ oder $T \vdash \neg\varphi$.

(Ob eine Th. vollst. ist, hängt von L ab!)

<u>Bsp</u>: Ist $\mathfrak{A}$ eine L-Str., dann ist $Th(\mathfrak{A}) = \{\varphi \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$ eine vollst. Th.

Jede vollst. Theorie ist von dieser Form!

<u>Lemma</u> 1.19 Eine kons. Th. ist vollst. gdw sie max. kons. ist, d.h. wenn sie äquiv. ist zu jeder kons. Erw.

<u>Bem</u>: Wir sagen, dass φ unabh. von T ist, falls weder φ noch $\neg\varphi$ aus T folgen. D.h. φ ist unabh. von T gdw $T \cup \{\varphi\}$ eine echte kons. Erw. von T ist, also nicht äquiv. zu T.

<u>Def</u>: 1.20 L-Str. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ heißen <u>elem. äquiv.</u>, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, gdw $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$

(gdw für alle L-Auss. φ gilt
$\mathfrak{A} \models \varphi$ gdw $\mathfrak{B} \models \varphi$)

<u>Bem</u>: Isom. Str. sind elem. äquiv.

Die Umkehrung gilt <u>nur</u> für endl. Str.

<u>Lemma</u> 1.21 Sei T kons. Theorie. Dann sind äquiv.

i) T ist vollst.

ii) alle Modelle von T sind elem. äquiv.

iii) $T \equiv Th(\mathfrak{A})$ für eine L-Str. $\mathfrak{A}$.

<u>Bew</u>: i) => iii) Sei $\mathfrak{A} \models T$. Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi$, dann gilt $T \not\vdash \neg\varphi$ und daher $T \vdash \varphi$. Also gilt $T \equiv Th(\mathfrak{A})$.
$T \subseteq Th(\mathfrak{A})$

(iii) => i) ist klar)

iii) => ii) Ist $\mathfrak{B} \models T$, dann ist $\mathfrak{B} \models Th(\mathfrak{A})$, also $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$.

ii) => i) Sei $\mathfrak{A} \models T$. Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi$, dann gilt φ in allen Modellen von T, d.h. $T \vdash \varphi$. Wenn $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$, dann gilt entsprechend $T \vdash \neg\varphi$. Also ist T vollst.

<u>Def</u> 1.22 Eine Klasse von L-Str. ist eine <u>elementare Klasse</u>, wenn es die Klasse aller Modelle einer L-Th. T ist.

<u>Bsp</u>: Die Klasse der ab. Gr., komm. Ringe, etc bildet eine elem. Klasse. Die Klasse der endl. Körper, der aufl. Gr., ... ist <u>keine</u> elem. Kl.

<u>Def</u> 1.23 Ein <u>Filter</u> auf einer Menge I ist eine nicht-leere Menge $F \subseteq P(I)$ mit

(i) $\emptyset \notin F$

(ii) für $A, B \in F$ ist $A \cap B \in F$ und

(iii) für $A \in F$, und $A \subseteq C \subseteq I$ ist $C \in F$.

Ein Filter heißt <u>Ultrafilter</u>, wenn für jede Menge $A \in P(I)$ gilt $A \in F$ oder $I \setminus A \in F$.

Bem: Mit dem Zornschen Lemma lässt sich jeder Filter zu einem Ultrafilter erw.

Def. 1.24 Ist $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von L-Str., F ein Ultrafilter auf I, dann wird das Ultraprodukt $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / F$ wie folgt als L-Str. def.

Def auf $\prod A_i$ eine Äquiv. rel. $\sim_F$ durch

$$(a_i)_{i \in I} \sim_F (b_i)_{i \in I} \Leftrightarrow \{i \in I \mid a_i = b_i\} \in F,$$

d.h. wenn (a_i) und (b_i) fast überall gleich sind.

Dies def. tatsächlich eine Äquiv. rel.; Transit. folgt aus 1.23 (iii), Symm. + Refl. sind klar.

Auf den Äquiv. kl. $(a_i)_F$ def. wir eine L-Str. durch

(a) für Konst. $c \in L$ setze $c^{\prod \mathfrak{A}_i / F} = (c^{\mathfrak{A}_i})_F$

(b) für n-stell. Fkt. symb. $f \in L$ setze

$$f^{\prod \mathfrak{A} / F}((a_i)^1_F, \ldots (a_i)^n_F) = (f^{\mathfrak{A}_i}(a_i^1, \ldots a_i^n))_F$$

(c) für n-stel. Rel. symb. $R \in L$ setze

$$R^{\prod \mathfrak{A}_i / F}((a_i)^1_F, \ldots (a_n)^n_F) \Leftrightarrow \{i \in I \mid R^{\mathfrak{A}_i}(a_i^1, \ldots a_i^n)\} \in F.$$

Dies ist wohldef. und es gilt

Satz 1.25 (Łoś) Für jede L-Formel φ gilt

$$\prod_i \mathfrak{A}_i / F \models \varphi((a_i)^1_F, \ldots (a_i)^n_F)$$

$$\Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi(a_i^1, \ldots a_i^n)\} \in F$$

<u>Bew:</u> Die Wohldef. folgt aus den Eigenschaften eines Ultrafilters: Man sieht induktiv leicht für alle $n \geq 1$

für $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ ist $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{F}$

Durch Ind. über den Aufbau der Formeln folgt der Satz von Łoś: Für atomare ~~Formeln~~ folgt die Beh aus der Def.

Betrachte nun $\varphi = \neg\psi$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\textstyle\prod_i \mathfrak{A}_i/_{\mathcal{F}} \models \neg\psi \quad & \text{gdw} \quad \textstyle\prod_i \mathfrak{A}_i/_{\mathcal{F}} \not\models \psi \\
\text{nach IV} \quad & \text{gdw} \quad \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \psi\} \notin \mathcal{F} \\
\mathcal{F} \text{ Ultraf.} \quad & \text{gdw} \quad \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \neg\psi\} \in \mathcal{F} \\
& \text{gdw} \quad \textstyle\prod_i \mathfrak{A}_i/_{\mathcal{F}} \models \neg\psi
\end{aligned}$$

$\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$

$\prod_i \mathfrak{A}_i/_{\mathcal{F}} \models \psi_1 \wedge \psi_2$ gdw $\prod_i \mathfrak{A}_i/_{\mathcal{F}} \models \psi_1$ und $\prod_i \mathfrak{A}_i/_{\mathcal{F}} \models \psi_2$

nach IV und wegen $\mathcal{F}$ Ultrafilter ($A \cap B \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A, B \in \mathcal{F}$)

gdw $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \psi_1 \wedge \psi_2\} \in \mathcal{F}$

$\varphi = \exists x \psi$

$\prod_i \mathfrak{A}_i/_{\mathcal{F}} \models \exists x \psi$ gdw es ex $(a_i)_i \in \prod_i \mathfrak{A}_i/_{\mathcal{F}}$

mit $\prod_i \mathfrak{A}_i/_{\mathcal{F}} \models \psi((a_i)_i)$

nach IV gdw $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \psi(a_i)\} \in \mathcal{F}$

gdw $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \exists x \psi\} \in \mathcal{F}$.

Anwendungsbeispiel

<u>Satz</u> 1.26 Die Klasse der endlichen Gruppen ist keine elementare Klasse.

<u>Bew:</u> Ang. doch. Sei T die Theorie aller endl. Gr.

und sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf $\mathbb{N}$, der keine endl. Menge enthält (d.h. $\mathcal{F}$ ist kein 'Hauptultrafilter').
Sei C_n zykl. der Ord. n, also $C_n \models T$ und sei

$$\varphi_k = \exists x_1, \dots x_k \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j .$$

Dann gilt $C_n \models \varphi_k$ gdw $n \geq k$.
Daher ist $\{n \in \mathbb{N} \mid C_n \models \varphi_k\} \in \mathcal{F}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Nach dem Satz von Łoś ist dann $G \models T$ und

$$G = \prod_n C_n / \mathcal{F} \text{ ein Modell von } \{\varphi_k \mid k \geq 1\}.$$

Daher ist G unendl. $\lightning$.

§ 2. Elementare Erweiterungen und Kompaktheit

__Def 2.1__ Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ L-Str., dann heißt ein Homom. $h: A \to B$ eine elem. Einbettung, wenn für alle $a_1, \dots a_n \in A$ ~~gilt~~ $\varphi(x_1, \dots x_n)$ gilt

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots a_n] \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{B} \models \varphi[h(a_1), \dots h(a_n)].$$

__Bem__ (i) Weil h die quant. fr. Formeln erhält ist h injektiv

(ii) Die Modelle von $Th(\mathfrak{A}_A)$ sind genau die Strukt. der Form $(\mathfrak{B}, h(a))_{a \in A}$ für elem. Einb. $h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$.

Wir schreiben auch $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.
Eine Unterstr. $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ heißt <u>element. Unterstr.</u>, falls die Ident. $id: A \to B$ eine elem. Einb. ist.
Dann heißt $\mathfrak{B}$ auch element. Erw. von $\mathfrak{A}$.

__Satz__ 2.2 (Tarskis Test) Sei $\mathfrak{B}$ eine L-Str., $A \subseteq B$. Dann ist A der Träger einer elem. UnStr. $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ gdw jede $L(A)$-Formel $\varphi(x)$, die in $\mathfrak{B}$ erfüllbar ist, durch ein Elt in A erfüllt werden kann.

<u>Bew:</u> "$\Rightarrow$" Ist $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \models \exists x \varphi(x)$, dann gilt auch $\mathfrak{A} \models \exists x \varphi(x)$. Daher ex $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$, und damit auch $\mathfrak{B} \models \varphi(a)$.

"$\Leftarrow$" Sei nun umgekehrt $A \subseteq B$ so, dass Tarskis Test erf. ist. <u>Beh:</u> A ist Träger einer Unterstr. $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$.

<u>Bew:</u> Weil '$x=x$' in A erfüllbar ist, ist $A \neq \emptyset$.

Ist f n-stel. Fktsymb., $a_1, .. a_n \in A$, dann ist die Formel $\varphi(x) \Leftrightarrow$ '$f(a_1, .. a_n) = x$' in A erfüllbar, d.h. A ist abg. unter f.

Nun zeigen wir durch Ind. über den Aufbau der Formel ψ

$$\mathfrak{A} \models \psi \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{B} \models \psi. \quad \text{für alle } L(A)\text{-Form. } \psi.$$

Das ist klar für atomare Formeln.

Die Ind.schr. $\psi \Leftrightarrow \neg \varphi$ und $\psi \Leftrightarrow \varphi_1 \wedge \varphi_2$ sind klar.

Sei nun $\psi \Leftrightarrow \exists x \varphi(x)$. Wenn $\mathfrak{A} \models \psi$, dann ex. $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$, nach Indvor. $\mathfrak{B} \models \varphi(a)$, also $\mathfrak{B} \models \psi$.

Ist umgekehrt $\mathfrak{B} \models \psi$, dann ex. nach Tarskis Test $a \in A$ mit $\mathfrak{B} \models \varphi(a)$ und nach Indvor. $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$, d.h. $\mathfrak{A} \models \psi$.

Damit erhält man kleine elem. Unterstr:

<u>Kor</u> 2.3 Sei $\mathfrak{B}$ eine L-Str., $S \subseteq \mathfrak{B}$. Dann hat $\mathfrak{B}$ eine elem. Unterst. $\mathfrak{A}$ mit $S \subseteq A$ und $|A| \leq \max(|S|, |L|, \aleph_0)$

<u>Bew:</u> Mit Tarskis Test konstruieren wir A induktiv als aufst. Kette $S_0 = S \subseteq S_1 \subseteq \ldots$ in $\mathfrak{B}$.

Wenn S_i def. ist, wähle für jede $L(S_i)$-Formel $\varphi(x)$, die in $\mathfrak{B}$ erfüllbar ist, ein $a_\varphi \in B$ und setze

$$S_{i+1} = S_i \cup \{a_\varphi \mid \varphi(x) \text{ in } \mathfrak{B} \text{ erfüllbar}\}.$$

Nach Tarskis Test ist $A = \bigcup S_i$ der Träger einer elem. Unterstr. $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$. So bleibt z.z. dass wir $|\mathfrak{A}| \leq \max |S|, |L|, \aleph_0 = \kappa$ wählen können:

Es gibt genau $|L| + \aleph_0$ viele L-Formeln und entsprechend κ viele $L(S)$-Formeln. Daher ist $|S_1| \leq \kappa$ und induktiv $|S_i| \leq \kappa$ für alle i. Daher ist $|A| \leq \kappa \cdot \aleph_0 = \kappa$. $\square$

Def 2.4 Eine gerichtete Familie von Strukturen $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ heißt element., falls $\mathfrak{A}_i \preceq \mathfrak{A}_j$ falls $i \leq j$.

Eine part. Ord $(I, \leq)$ heißt gerichtet, falls für alle $i, j \in I$ ein $k \in I$ ex. mit $i, j \leq k$.

Satz 2.5 (Tarskis Satz über elem. Ketten) Die Verein. einer elem. gericht. Familie $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ ist elem. Erw. von jedem $\mathfrak{A}_i$.

Bew: Setze $\mathfrak{A} = \bigcup \mathfrak{A}_i$. Wir zeigen durch Ind. über dem Aufbau der Formeln $\varphi(\bar{x})$, dass für alle $i \in I$, $\bar{a} \in \mathfrak{A}_i$

$$\mathfrak{A}_i \models \varphi(\bar{a}) \text{ gdw } \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}).$$

Dies ist klar für atom. Formeln, und folgt für Neg. und Konj. aus der Ind.voraus. Für $\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \exists y\, \psi(\bar{x}, y)$: Dann gilt $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$ gdw $b \in A$ ex mit $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{x}, b)$. Weil $(I, \leq)$ gerichtet ist, ex. ein $j \geq i$ mit $b \in A_j$.

Nach Ind. voraus. gilt $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a}, b)$ gdw $\mathfrak{A}_j \models \psi(\bar{a}, b)$.

d.h. $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$ gdw $\mathfrak{A}_j \models \varphi(\bar{a})$.

Wegen $\mathfrak{A}_i \preceq \mathfrak{A}_j$ folgt die Beh.

Def 2.6 Wir nennen eine Theorie T endl. erfüllbar, wenn jede endl. Teilm. $T_0 \subseteq T$ kons. ist (d.h. ein Modell hat.)

Nur vorübergehend, denn:

<u>Satz 2.7</u> (Kompaktheitssatz) Endlich erfüllbare Theorien sind kons.

Oder: Eine Theorie T ist kons. gdw jede endl. Teilm. ein Modell hat.

<u>Bew</u>: Mit Ultraprodukten ist ein einf. Beweis möglich. Aber wir benutzen die Henkin-Konstruktion:

Sei L eine Sprache, C eine Menge von neuen Konst. Eine $L(C)$-Theorie T' heißt <u>Henkin</u>-Theorie, wenn es für jede $L(C)$-Formel $\varphi(x)$ eine Konst. $c \in C$ gibt mit $\ulcorner \exists x\, \varphi(x) \to \varphi(c) \urcorner \in T'$.

Die Elemente von C heißen Henkin-Konst. von T'

Wir nennen (vorübergehend) T endlich vollst, wenn T endl. erfüllbar ist und für jede L-Formel φ entweder $\varphi \in T$ oder $\neg\varphi \in T$. Wir zeigen:

<u>Lemma 2.8</u> Jede endl. erfüllbare L-Theorie T kann zu einer endl. vollst. Henkin-Th. T^* erweitert werden.

<u>Lemma 2.9</u> Jede endl. vollst. Henkin-Theorie T^* hat ein Modell $\mathfrak{A}$, das aus Konst. besteht, d.h.

$$(\mathfrak{A}, a_c)_{c \in C} \models T^* \quad \text{und } A = \{a_c \mid c \in C\}.$$

Der Kompakth.satz folgt aus 2.8 und 2.9.

<u>Bew</u> von 2.8 Bem: Umgekehrt folgt das Lemma aus dem Kompkt.satz! Ist $\mathfrak{A} \models T$, dann ist $Th(\mathfrak{A}_A)$ endl. vollst. Henkin-Th. mit A als Menge der Henkin-Konst.

Bew von 2.8: Wir def. aufst. Kette $\emptyset = C_0 \subseteq C_1 \subseteq \dots$ von neuen Konst., indem wir jeder $L(C_i)$-Formel $\varphi(x)$ eine Konst. $c_{\varphi(x)}$ zuordnen und setzen

$$C_{i+1} = \{c_{\varphi(x)} \mid \varphi(x) \ L(C_i)\text{-Formel}\}.$$

Sei $C = \bigcup C_i$, $T^H = \{\exists x \varphi(x) \to \varphi(c_{\varphi(x)}) \mid \varphi \in L(C)\}$

die Menge der Henkin-Axiome

Jede L-Str. kann zu einem Modell von T^H erw. werden

Daher ist $T \cup T^H$ endl. erf. Henkin-Th.

Offens. ist die Vereinigung einer Kette endl. erfüllb. Th. wieder endl. erfüllbar. Mit Zorns Lemma erhalten wir eine max. endl. erfüllbare $L(C)$-Th. $T^* \supseteq T \cup T^H$

Dann ist T^* endl. vollst: Wenn $\varphi, \neg\varphi \notin T^*$, dann sind $T^* \cup \{\varphi\}$, $T^* \cup \{\neg\varphi\}$ nicht endl. erfüllbar.

Dann ex. eine endl. Teilm. $T_0 \subseteq T^*$, so dass $T_0 \cup \{\varphi\}$ und $\{T_0\} \cup \{\neg\varphi\}$ nicht erfüllbar sind. Dann ist aber schon T_0 nicht konsistent $\lightning$.

<u>Bew</u> von 2.9 Bem: Wenn T^* endl. vollst ist, dann gehört jedes φ mit $T_0 \vdash \varphi$ für $T_0 \subseteq T^*$ endl schon zu T^*. Denn sonst wäre $\neg\varphi \in T^*$, wäre aber inkons. mit T_0.

Def. für $c, d \in C$ $\quad c \sim d$ gdw $\ulcorner c \doteq d \urcorner \in T^*$.

Da '$c = c$' allgem. gültig ist und $d = c \vdash c = d$ und '$c = d \wedge d = e$' $\vdash$ '$c = e$' ist $\sim$ eine Äquiv. rel.

Sei $a_c = [c]_\sim$ und $A = \{a_c \mid c \in C\}$.

Wir def. auf A eine L-Str. $\mathfrak{A}$ durch

$$R^{\mathfrak{A}}(a_{c_1}, \ldots a_{c_n}) \text{ gdw } R(c_1, \ldots c_n) \in T^*$$

$$f^{\mathfrak{A}}(a_{c_1}, \ldots a_{c_n}) = a_{c_0} \text{ gdw } \ulcorner f(c_1, \ldots c_n) = c_0 \urcorner \in T^*.$$

Wir müssen zeigen, dass das wohldef. ist:

Sei $a_{c_1} = a_{d_1}, \ldots a_{c_n} = a_{d_n}$, $R(c_1, \ldots c_n) \in T^*$.

z.z. $R(d_1, \ldots d_n) \in T^*$. Das ist klar, denn wenn in einer $L(C)$-Struktur

$$c_1 = d_1 \wedge \ldots \wedge c_n = d_n \wedge R(c_1, \ldots c_n) \text{ gilt,}$$

dann auch $R(d_1, \ldots d_n)$.

Weil T^* Henkin-Th. ist, ex $c_0 \in C$ mit

$$\ulcorner \exists x \; f(c_1, \ldots c_n) = x \to f(c_1, \ldots c_n) = c_0 \urcorner \in T^*$$

Daher gehört $f(c_1, \ldots c_n) = c_0$ zu T^* und die Unabh. von der Repräs. folgt wie eben.

Sei $\mathfrak{A}^* = (\mathfrak{A}, a_c)_{c \in C}$ diese $L(C)$-Struktur.

Wir zeigen durch Ind. über Aufbau der Formeln $\varphi \in L(C)$

$$\mathfrak{A}^* \models \varphi \quad \text{gdw} \quad \varphi \in T^*.$$

1. Fall: φ atomar: Ist $\varphi \leftrightharpoons c \doteq d$ oder $\varphi \leftrightharpoons R(c_1, \ldots c_n)$, dann folgt dies aus der Konstr. von $\mathfrak{A}$. Wenn φ Terme mit Fktssymb. enthält, machen wir Indukt. über die Anzahl k der Fktssymb. Klar, für $k=0$.

(ii) Sei $\varphi \leftrightharpoons \psi(f(c_1, \ldots c_n))$ für $f \in L$ und $\psi(x) \in L(C)$. Wähle c_0 mit $\ulcorner f(c_1, \ldots c_n) = c_0 \urcorner \in T^*$. Dann gilt nach Konstr. von $\mathfrak{A}^*$ in $\mathfrak{A}^*_{so}$ Daher ist

$$\mathfrak{A}^* \models \varphi \text{ gdw } \mathfrak{A}^* \models \psi(c_0) \underset{\text{I.V}}{\text{gdw}} \psi(c_0) \in T^*$$

$$\text{gdw } (\text{wegen } \ulcorner f(c_1, \ldots c_n) = c_0 \urcorner \in T^*) \;\; \psi(f(c_1, \ldots c_n)) \in T^*.$$

2+3. Fall $\varphi \leftrightharpoons \neg\psi$, $\varphi \leftrightharpoons \varphi_1 \wedge \varphi_2$. klar

4. Fall $\varphi \leftrightharpoons \exists x \, \psi(x)$. Dann gilt

$$\mathfrak{A}^* \models \varphi \text{ gdw } \mathfrak{A}^* \models \psi(c) \text{ für ein } c \in C$$

$$\underset{\text{I.V.}}{\text{gdw}} \;\; \psi(c) \in T^* \text{ für ein } c \in C$$

$$\text{gdw } \;\; \varphi \in T^*$$

T^* endl. vollst. Henkin-Th.

Kor 2.10 Es gilt $T \vdash \varphi$ gdw $\Delta \vdash \varphi$ für eine endl. Teilm. $\Delta \subseteq T$.

Bew: "<=" klar, "=>" $T \vdash \varphi$ gdw $T \cup \{\neg\varphi\}$ inkons.
gdw $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ inkons
für eine endl. $\Delta \subseteq T$.

Kor 2.11 Eine Menge $\Sigma(x_1, .. x_n)$ von Formeln ist kons. mit T, wenn jede endl. Teilm. von Σ kons. mit T ist.

Bew: Wähle neue Konst. $c_1, .. c_n$. Dann ist $\Sigma \cup T$ kons. gdw $T \cup \Sigma(c_1, .. c_n)$ kons. ist. Daher folgt die Beh. aus dem Komp.heitssatz.

Def 2.12 Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Str., $B \subseteq A$. Wir sagen, dass $a \in A$ eine Menge von $L(B)$-Formeln $\Sigma(x)$ __realisiert__, wenn ~~alle Formeln~~ $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$ für alle $\varphi \in \Sigma$.
$\mathfrak{A} \models \Sigma(a)$.

$\Sigma(x)$ heißt endl. erfüllbar in $\mathfrak{A}$, wenn jede endl. Teilmenge von Σ in $\mathfrak{A}$ erfüllbar ist.

Bsp: Betr. $(\mathbb{Q}, <)$, $\Sigma(x) = \{x > b \mid b \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $\Sigma(x)$ endl. erfüllbar in $\mathbb{Q}$, aber nicht erfüllbar.

Lemma 2.13 Eine Menge $\Sigma(x)$ ist endl. erfüllbar in $\mathfrak{A}$ gdw es eine elem. Erw $\mathfrak{B} \succeq \mathfrak{A}$ gibt, in der Σ realisiert ist.

Bew: Nach Bem 2.1 ist Σ in einer elem. Erw. von $\mathfrak{A}$ real. gdw $Th(\mathfrak{A}_A) \cup \Sigma$ kons. ist. Daher folgt das Lemma aus der Tatsache, dass eine endl. Menge Δ von $L(A)$-Formeln kons. mit $Th(\mathfrak{A}_A)$ ist gdw Δ in $\mathfrak{A}$ real. ist.

Def. 2.14 Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Str., $B \subseteq A$. Ein <u>Typ über B</u> ist eine $\overset{\text{max}}{}$ Menge $p(x)$ von $L(B)$-Formeln, die endl. erfüllb. ist in $\mathfrak{A}$.

Wir schreiben $S(B) = S^{\mathfrak{A}}(B)$ Menge der Typen über B.

Jedes Elt $a \in A$ bestimmt einen Typ über B

$$tp(a/B) = tp^{\mathfrak{A}}(a/B) = \{\varphi(x) \mid \mathfrak{A} \models \varphi(a),\ \varphi \text{ B-Form.}\}$$

D.h. a real. einen Typ $p \in S(B)$ gdw $p = tp(a/B)$.

<u>Bem</u>: Ist $\mathfrak{A}' \succeq \mathfrak{A}$, dann ist $S^{\mathfrak{A}}(B) = S^{\mathfrak{A}'}(B)$ und

$$tp^{\mathfrak{A}'}(a/B) = tp^{\mathfrak{A}}(a/B) \quad \text{für } a \in A.$$

Entsprechend bezeichnet $S_n(B) = S_n^{\mathfrak{A}}(B)$ die Menge der <u>n-Typen</u> über B, d.h. die Menge der max. endl. erfüllb. Formelmengen $\Sigma(x_1, .. x_n)$. Ist $\bar{a}$ ein n-Tupel in A, dann ist $tp(\bar{a}/B) = tp^{\mathfrak{A}}(\bar{a}/B)$ entspr. def.

Für eine bel. Menge $C \subseteq A$ def. $tp(C/A)$, indem wir Var. x_c für $c \in C$ betrachten.

<u>Kor</u> 2.15 Jede L-Str. $\mathfrak{A}$ hat eine elem. Erw $\mathfrak{B}$, in der alle Typen über A real. sind.

<u>Bew</u>: Wähle für jeden Typ $p \in S(A)$ eine neue Konst. c_p.
Wir müssen dann ein Modell finden für

$$T = Th(\mathfrak{A}_A) \cup \bigcup_{p \in S(A)} p(c_p).$$

Weil jeder Typ $p \in S(A)$ endl. erfüllb. ist in $\mathfrak{A}$ ist T endl. erf. Nach dem Komp.-satz ex. also ein Modell.

<u>Bem</u>: Wir können auch Lemma 2.13 benutzen und eine elem. Kette bauen.

<u>Satz</u> 2.16 (Löwenheim-Skolem) Sei $\mathfrak{B}$ eine L-Str., $S \subseteq B$ und κ eine unendl. Kard.zahl.

(i) Wenn $\max(|S|, |L|) \leq \kappa \leq |\mathfrak{B}|$, dann hat $\mathfrak{B}$ eine elem. Unterstr. $\mathfrak{A} \supseteq S$ der Mächtigkeit κ.

(ii) Ist $\mathfrak{B}$ unendl und $\kappa \geq \max(|B|, |L|)$, dann hat $\mathfrak{B}$ eine elem. Erw. der Mächtigkeit κ.

<u>Bew</u>: (i) Wähle $S \subseteq S' \subseteq B$ mit $|S'| = \kappa$. Dann folgt die Beh. aus Kor. 2.3

(ii) Wir konstr. zuerst eine elem. Erw $\mathfrak{B}'$ der Mächtigkeit $\geq \kappa$.

Sei C Menge neuer Konst., $|C| = \kappa$. Da $\mathfrak{B}$ unendl. ist, ist $T = Th(\mathfrak{B}_B) \cup \{\ulcorner c = d \urcorner \mid c, d \in C, c \neq d\}$ endl. erfüllb. (in $\mathfrak{B}$). Nach Bem 2.1 ist jedes Modell von T elem. Erw. von $\mathfrak{B}$ der Mächtigkeit $\geq \kappa$.

Mit (i) angewen. auf $S = B$ und $\mathfrak{B}'$ folgt die Beh.

<u>Bem</u>: Die Voraus. $\kappa \geq \max(|S|, |L|)$ ist notw: Die Theorie der $\mathbb{R}$-VR hat keine abz. Modelle.

<u>Kor</u> 2.17 Eine Theorie, die ein unendl. Modell hat, hat Modelle in jeder Mächtigkeit $\kappa \geq \max\{|L|, \aleph_0\}$.

Daher kann eine Theorie höchstens für feste Kard. das Modell bis auf Isom. beschreiben.

<u>Def</u> 2.18 (vorläufig...) Sei κ unendl. Kard.zahl. Eine Th. T heißt κ-kategorisch, wenn alle Modelle der Mächtigkeit κ isom. sind.

<u>Satz</u> 2.19 (Vaught's Test) Eine κ-kat. Th. ist vollst, wenn (i) T kons. ist

(ii) T hat keine endl. Modelle

(iii) $|L| \leq \kappa$.

<u>Bew</u>: Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$. Weil $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ unendl. sind, haben $Th(\mathfrak{A})$, $Th(\mathfrak{B})$ Modelle $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}'$ der Mächtigkeit κ. Dann sind $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}'$ isom. und daher $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}' \cong \mathfrak{B}' \equiv \mathfrak{B}$.

Bsp 2.20 (i) (Satz von Cantor). Die Theorie T_{DLO} der dichten lin. Ord. ohne Endpkte ist $\aleph_0$-kat und daher nach Vaughts Test vollst.:

Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T_{DLO}$, $A = \{a_i \mid i \in \omega\}$, $B = \{b_i \mid i \in \omega\}$.

Wir def. einen Isom. induktiv wie folgt:

Seien $(c_i)_{i<m}$, $(d_i)_{i<m}$ schon def., so dass $c_i \mapsto d_i$, $i<m$, ein Ord.-isom ist.

Ist $m = 2k$, wähle $c_m = a_j$ mit j min und $a_j \notin \{c_i \mid i<m\}$.

Weil $\mathfrak{B}$ dichte lin. Ord. ohne Endpkte ist, ex ein $d_m \in \{b_i \mid i \in \omega\}$, so dass $(c_i)_{i \leq m}$ und $(d_i)_{i \leq m}$ ord. isom. sind. Für $m = 2k+1$ tauschen wir die Rollen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

'Back-and-Forth'.

(ii) Sei T_{ACF_p} die Theorie der alg. abg. Körper in char p.

Zwei ~~algabg~~ Körper der char p und Mächtigkeit $\kappa > \aleph_0$ haben Transz. basen der Mächtigkeit κ. Bij. zwischen den Tr. basen induzieren Isom. der Körper.

Def. 2.21 T heißt κ-kat., $\kappa \geq \aleph_0$, falls T vollst., $|T| \leq \kappa$ und bis auf Isom. eind. Modell der Kard. κ.

§ 3 Quantorenelimination

Lemma 3.1 (Separationslemma) Seien T_1, T_2 Theorien, $\mathcal{H}$ eine Menge von Aussagen abgeschl. unter $\wedge, \vee$ und $T, \bot \in \mathcal{H}$. Dann sind äquiv.

i) Es gibt ein $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $T_1 \vdash \varphi$, $T_2 \vdash \neg\varphi$

(wir sagen 'φ trennt T_1 und T_2'.)

ii) Für $\mathfrak{A}_1 \models T_1$, $\mathfrak{B}_1 \models T_2$ ex. $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi$, $\mathfrak{B} \models \neg\varphi$.

(φ trennt die Modelle)

Bew: (i) $\Rightarrow$ (ii) Wenn φ T_1 und T_2 trennt, dann auch alle Modelle von T_1 und T_2.

ii) ⇒ i) Sei $\mathfrak{A} \models T_1$ und $H_{\mathfrak{A}} = \{\varphi \in H \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.
Nach Voraus. hat $T_2 \cup H_{\mathfrak{A}}$ kein Modell.
Nach Komp.satz gibt es eine endl. Teilm. von $H_{\mathfrak{A}}$, also eine Aussage $\varphi_{\mathfrak{A}}$ aus $H_{\mathfrak{A}}$, die mit T_2 inkons. ist.
Dann ist $T_1 \cup \{\neg\varphi_{\mathfrak{A}} \mid \mathfrak{A} \models T_1\}$ inkons., denn jedes Modell $\mathfrak{A} \models T_1$ erfüllt gerade $\varphi_{\mathfrak{A}}$.
Wiederum nach dem Komp.satz sind endl. viele der $\neg\varphi_{\mathfrak{A}}$ mit T_1 inkons., d.h. $T_1 \vdash \varphi_{\mathfrak{A}_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{\mathfrak{A}_n}$ für geeignete $\mathfrak{A}_1, \dots \mathfrak{A}_n$. Setze $\varphi \leftrightarrow \varphi_{\mathfrak{A}_1} \wedge \dots \varphi_{\mathfrak{A}_n} \in H$.
Dann gilt $T_1 \vdash \varphi$ und $T_2 \vdash \neg\varphi$

<u>Notation</u> 3.2 Ist Δ eine Menge von Formeln, dann schreiben wir $f : \mathfrak{A} \underset{\Delta}{\rightarrow} \mathfrak{B}$ für Abb, die alle Formeln aus Δ bewahren, und $\mathfrak{A} \underset{\Delta}{\Rightarrow} \mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$ für $\varphi \in \Delta$.

<u>Lemma</u> 3.3 Sei T eine Th., Δ eine Formelmenge, die abg. ist gegen Existenz-Quantif. (d.h. $\varphi \in \Delta \Rightarrow \exists x \varphi \in \Delta$), Konjunkt. und Variablensubstit. Dann sind äquiv. für jede Str. $\mathfrak{A}$:

i) ~~Alle Auss. $\varphi \in \Delta$ mit $\mathfrak{A} \models$~~ $T^* = T \cup \{\varphi \in \Delta \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$ φ Aussage ist kons.

ii) Es gibt ein Modell $\mathfrak{B} \models T$ und eine Abb. $f : \mathfrak{A} \underset{\Delta}{\rightarrow} \mathfrak{B}$.

<u>Bew</u>: ii) ⇒ i) Ist $f : \mathfrak{A} \underset{\Delta}{\rightarrow} \mathfrak{B}$ gegeben, dann gilt für alle $\varphi \in \Delta$
$\mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$, d.h. $\mathfrak{B} \models T^*$

i) ⇒ ii) Sei $T^* = Th_\Delta(\mathfrak{A}_A) = \{\mathfrak{A}_A \models \delta(\bar{a}) \mid \delta(\bar{x}) \in \Delta\}$.
Die Modelle $(\mathfrak{B}, f(a)_{a\in A}) \models T^*$ entspr. genau den Abb $f : \mathfrak{A} \underset{\Delta}{\rightarrow} \mathfrak{B}$. Daher genügt es z.z., dass T^* kons. ist. Ist $D \subseteq T^*$ endl., dann sei $\delta(\bar{a}) = \bigwedge_{\varphi \in \Delta} \varphi(\bar{a})$.

Dann ist $\mathfrak{A} \models \exists \bar{x}\, \delta(\bar{x})$ und nach Voraus. hat T ein Modell $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} \models \exists \bar{x}\, \delta(\bar{x})$; also ex $\bar{b} \in B$ mit $\mathfrak{B} \models \delta(\bar{b})$. $\square$

Bem: Nach Lemma 3.3 angew. auf $T = Th(\mathfrak{B})$ folgt

$\mathfrak{A} \underset{\Delta}{\Rightarrow} \mathfrak{B}$ gdw es $\mathfrak{B}' \equiv \mathfrak{B}$ und $f: \mathfrak{A} \underset{\Delta}{\rightarrow} \mathfrak{B}'$ gibt.

Satz 3.4 Seien T_1, T_2 Theorien. Dann sind äquiv.

i) T_1 und T_2 werden durch eine All-Aussage getrennt.

ii) Kein Modell von T_2 ist Unterstr. eines Modells von T_1.

Bew: i) => ii) Wenn φ All-Auss. ist mit $T_1 \vdash \varphi$, $T_2 \vdash \neg\varphi$, $\mathfrak{A} \models T_1$, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ eine Unterstr. Dann ist $\mathfrak{A} \models \varphi$ und weil φ All-Auss. ist gilt $\mathfrak{B} \models \varphi$. Daher ist $\mathfrak{B} \not\models T_2$.

ii) => i) Wenn T_1 und T_2 sich nicht durch eine All-Auss. trennen lassen, dann gibt es nach 3.1 Modelle $\mathfrak{A} \models T_1$, $\mathfrak{B} \models T_2$, die sich nicht durch All-Auss. trennen lassen, d.h.

$\mathfrak{B} \underset{\exists}{\Rightarrow} \mathfrak{A}$. Nach Lemma 3.3 hat $\mathfrak{B}$ eine Erw.

$\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}' \models T_1$ $\lightning$ (ii).

Def 3.5 Sei T eine L-Th. Dann heißen Formeln $\varphi(\bar{x}), \psi(\bar{x})$ <u>äquiv. modulo T</u>, falls $T \vdash \forall x\,(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$.

Bsp: In $T = T_{acf}$ gilt $\ulcorner \exists y\; y^2 + y + x = 0 \urcorner$ und $\ulcorner x = x \urcorner$ sind äquiv. mod T. In $T_{RCF} \vdash \ulcorner \exists y\; y^2 + x = 0 \leftrightarrow x < 0 \urcorner$

Kor 3.6 Sei T eine Th., $\varphi(x_1, \ldots x_n)$ eine Formel. Dann sind äquiv.

(i) $\varphi(\bar{x})$ ist mod. T zu einer All-Formel äquiv.

(ii) Wenn $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ Modelle von T sind, $a_1, \ldots a_n \in A$, dann gilt

$$\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a}) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}).$$

Bew: (i) => (ii) ist klar,

(ii) => (i) Seien $\bar{c} = c_1, \ldots c_n$ neue Konst. und $T_1 = T \cup \{\varphi(\bar{c})\}$, $T_2 = T \cup \{\neg\varphi(\bar{c})\}$

Nach (ii) können Unterstr. von Modellen von T_1 kein Modell von T_2 sein. Nach Satz 3.5 können T_1 und T_2 durch eine univ.

$L(C)$ - Aussage $\psi(\bar{c})$ getrennt werden.

Nun folgt wegen $T_1 \vdash \varphi(\bar{c})$ auch $T \vdash \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))$ und wegen $T_2 \vdash \neg\psi(\bar{c})$ auch $T \vdash \forall x(\neg\varphi(\bar{x}) \to \neg\psi(x))$.

Daher gilt $T \vdash \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$

Kor 3.7 Eine Theorie heißt universell, wenn sie durch All-Auss. axiom. ist. Eine Th. T ist universell gdw jede Unstr. eines Modells wieder Modell ist.

Bew: "$\Rightarrow$" klar.

"$\Leftarrow$" Sei also T mit dieser Eigenschaft gegeben, $\varphi \in T$.

Seien $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ gegeben. Dann kann nicht gelten

$\mathfrak{B} \models T$ und $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$.

Nach Satz 3.4 gibt es eine All-Auss. ψ mit $T \vdash \psi$ und $\neg\varphi \vdash \psi$. Daher folgen alle Axiome von T aus

$$T_\forall = \{\psi \mid T \vdash \psi,\ \psi \text{ universell}\}.$$

Def. Eine $\forall\exists$-Formel ist von der Form $\forall x_1 \dots x_n \psi$ mit ψ $\exists$-Formel. Dann gilt:

Lemma 3.8 Sei φ eine $\forall\exists$-Auss., $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ gerichtete Fam. von Modellen von φ, $\mathfrak{B} = \bigcup \mathfrak{A}_i$. Dann gilt $\mathfrak{B} \models \varphi$.

Bew: Schreibe $\varphi = \forall \bar{x}\, \psi(\bar{x})$ mit $\psi(\bar{x})$ $\exists$-Formel.

Für alle $\bar{a} \in B$ ex i mit $\bar{a} \in A_i$. Wegen $\mathfrak{A}_i \models \varphi$ gilt $\mathfrak{A}_i \models \psi(\bar{a})$. Da $\psi(\bar{x})$ $\exists$-Formel ist, gilt $\mathfrak{B} \models \psi(\bar{a})$.

Def 3.9 Eine Th. T heißt induktiv, wenn die Vereinig. einer gerichteten Familie von Modellen wieder Modell ist.

Satz 3.10 Seien T_1, T_2 Theorien. Dann sind äquiv.

(i) T_1 wird von T_2 durch eine $\forall\exists$-Auss. getrennt.

(ii) Kein Modell von T_2 ist Vereinigung einer ger. Fam. von Modellen von T_1.

Bew: (i) ⇒ (ii) Sei φ $\forall\exists$-Auss. mit $T_1 \vdash \varphi$, $T_2 \vdash \neg\varphi$. Ist $\mathcal{B} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ mit $\mathfrak{A}_i \models T_1$, I gerichtet, dann gilt $\mathcal{B} \models \varphi$, also $\mathcal{B} \not\models T_2$.

(ii) ⇒ (i) Wir zeigen $\neg$(i) ⇒ $\neg$(ii). Seien $\mathfrak{A} \models T_1$, $\mathcal{B}^0 \models T_2$, die nicht durch eine $\forall\exists$-Auss. getrennt werden können, d.h. $\mathfrak{A} \underset{\forall\exists}{\Rightarrow} \mathcal{B}^0$ und entspr.

$$\mathcal{B}^0 \underset{\exists\forall}{\Rightarrow} \mathfrak{A}.$$

Nach Bem 3.3 ex Abb $f : \mathcal{B}^0 \underset{\forall\exists}{\longrightarrow} \mathfrak{A}^0$ für ein $\mathfrak{A}^0 \equiv \mathfrak{A}$. Wir können annehmen $\mathcal{B}^0 \subseteq \mathfrak{A}^0$ und f die Ident. Dann gilt

$$\mathfrak{A}^0_{B} \underset{\exists}{\Rightarrow} \mathcal{B}^0_{B}$$

Wieder nach Bem 3.3 ex $\mathcal{B}'_B \supseteq \mathfrak{A}^0_B$ mit $\mathcal{B}'_B \equiv \mathcal{B}^0_B$, d.h. $\mathcal{B}^0 \preceq \mathcal{B}'$ und $\underbrace{\mathcal{B}^0 \subseteq \mathfrak{A}^0 \subseteq \mathcal{B}'}_{\preceq}$.

Umgekehrt erhalten wir

$$\mathfrak{A}' \subseteq \mathcal{B}^2, \quad \mathcal{B}' \preceq \mathcal{B}^2, \quad \mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}.$$

Damit erhalten wir eine unendl. Kette

$$\mathcal{B}^0 \subseteq \underbrace{\mathfrak{A}^0 \subseteq \mathcal{B}'}_{\preceq} \subseteq \underbrace{\mathfrak{A}' \subseteq \mathcal{B}^2}_{\preceq} \subseteq \ldots$$

mit $\mathfrak{A}^i \equiv \mathfrak{A}$, $\mathcal{B}^i \preceq \mathcal{B}^{i+1}$. Setze $\mathcal{B} = \bigcup \mathfrak{A}_i = \bigcup \mathcal{B}^i$.

Dann ist $\mathcal{B}^0 \preceq \mathcal{B} \vdash T_2$, also $\neg$(ii).

Kor 3.12 Sei T eine Th, φ Auss. Dann sind äquiv.

(i) $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ mit ψ $\forall\exists$-Auss.

(ii) Wenn $\mathfrak{A}^i \models T$, $i \in \mathbb{N}$, eine aufst. Kette, $\mathfrak{A}_i \models \varphi$ dann $\mathcal{B} = \bigcup \mathfrak{A}_i \models \varphi$.

Bew: Nach Satz 3.10 bleiben $\forall\exists$ - Auss. unter Verein. von Ketten erhalten, daher gilt (i) ⇒ (ii).
(ii) ⇒ (i) Betrachte $T_1 = T \cup \{\varphi\}$, $T_2 = T \cup \{\neg\varphi\}$.
Nach (ii) kann die Verein. einer Kette von Mod. von T_1 kein Modell von T_2 sein. Nach Satz 3.10 können wir T_1 von T_2 durch eine $\forall\exists$ - Auss. ψ trennen, d.h. $T_1 \vdash \psi$ (und daher $T \vdash \varphi \to \psi$) und $T_2 \vdash \neg\psi$ (und daher $T \vdash \neg\varphi \to \neg\psi$).

Kor 3.12 T ist induktiv gdw T $\forall\exists$ - axiomat. ist.
Bew: "⇐" klar nach Lemma 3.8
"⇒" Sei T induktiv, $\varphi \in T$. Ist $\mathcal{B} = \bigcup \mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{A}_i \models T$, dann ist $\mathcal{B} \models \varphi$. Nach Satz 3.10 ex eine $\forall\exists$ - Auss ψ mit $T \vdash \psi$, $\neg\varphi \vdash \neg\psi$, d.h. alle Axiome von T folgen aus $T_{\forall\exists} = \{\psi \mid T \vdash \psi,\ \psi\ \forall\exists\text{ - Auss.}\}$

Def 3.13. Eine Theorie T hat Quantoren-Elimination, wenn jede L-Formel $\varphi(\bar{x})$ mod. T zu einer qu.freien Formel $\rho(\bar{x})$ äquiv. ist, $\bar{x} = x_1 \ldots x_n$.
Für $n = 0$ ist jede Auss. mod T äquiv. zu qu.fr. Aussage. Wenn L keine Konst. hat, sind $\bot$, $\top$ die einz. qu.fr. Auss., daher ist dann T entweder inkons. oder vollst.

Bem: Man kann immer die Sprache so erweitern, dass die Th. T^M QE hat, indem man für jede L-Formel $\varphi(\bar{x})$ ein Rel.symb. R_φ hinzufügt und

$$T^M = T \cup \{\forall\bar{x}\,(R_\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi(\bar{x})) \mid \varphi \in L\}$$

erweitert. T^M heißt die Morley-sierung von T.
Einige wichtige Eigenschaften bleiben dabei erhalten, z.B vollst., Stabilit., κ-Kateger.

<u>Def</u> 3.14 Eine Primstr. für eine Th. T ist eine Str. $\mathfrak{A}$, die sich in jedes $\mathfrak{B} \models T$ einbetten lässt.

<u>Bsp:</u> Für $T_{fields,p}$ ist der Primkörper Primstr.

Für T_{K-VR} ist der 0-VR Primstr.

<u>Lemma</u> 3.15 Eine kons. Th. T mit QE und Primstr. $\mathfrak{A}$ ist vollst.

<u>Bew:</u> Eine qu.fr. Formel φ gilt in $\mathfrak{A}$ gdw $\mathfrak{B} \models \varphi$ für $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.

<u>Def</u> Eine <u>einf. $\exists$-Formel</u> ist von der Form

$\varphi = \exists y \rho$ mit ρ qu.fr.

Ist $\rho \leftrightarrow \bigwedge \rho_i$, ρ_i Basisformel, dann heißt φ <u>primitive $\exists$-Formel</u> (Basisformel = atomar, neg. atom.).

<u>Lemma</u> 3.16 T hat QE gdw jede prim. $\exists$-Formel mod. T äquiv. zu qu. fr. Formel ist.

<u>Bew:</u> Mit Bool. Umformungen können wir jede einf. $\exists$-Formel schreiben als $\exists y \bigvee_{i<n} \rho_i$, ρ_i Konj. von Basisformeln.

D.h. eine einf. $\exists$-Formel ist äquiv. zu $\bigvee \exists y \rho_i$ mit $\exists y \rho_i$ prim. $\exists$-Formel. Daher ist dann jede einf. $\exists$-Formel äquiv. mod T zu qu. fr. Formel.

Ist nun $\varphi \leftrightarrow Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \rho$ in pränex. NF gegeben, $Q_n = \exists$, dann wählen wir qu.fr. ρ_0 mit ρ_0 äquiv. zu $\exists x_n \rho$ mod T, und setzen induktiv fort mit $Q_1 x_1 \ldots Q_{n-1} x_{n-1} \rho_0$.

Ist $Q_n = \forall$, dann wählen wir qu.fr. ρ_0 mit ρ_0 äquiv. mod T zu $\exists x_n \neg \rho$ und setzen fort mit

$Q_1 x_1 \ldots Q_{n-1} x_{n-1} \neg \rho_0$.

Satz 3.17 Für eine Th T sind äquiv.:

(i) T hat QE

(ii) Für alle Modelle $\mathfrak{M} \models T$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$ Unterstr., ist $T \cup \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$ vollständig, d.h. T ist Ustr.-vollst.

(iii) Für alle Modelle $\mathfrak{M}^1, \mathfrak{M}^2 \models T$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}^1, \mathfrak{M}^2$ gem. Ustr. ist $\mathfrak{M}^1_A \equiv \mathfrak{M}^2_A$.

(iv) Für alle $\mathfrak{M}^1, \mathfrak{M}^2 \models T$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}^1, \mathfrak{M}^2$, und für alle prim. $\exists$-Formeln $\varphi(x_1,..x_n)$, $a_1,..a_n \in A$ gilt
$$\mathfrak{M}^1 \models \varphi(a_1,..a_n) \Rightarrow \mathfrak{M}^2 \models \varphi(a_1,..a_n).$$

Falls L keine Konst. enthält, darf $\mathfrak{A}$ auch leer sein.

__Bew:__ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) ist klar

(i) $\Rightarrow$ (iii) Sei $\varphi(\bar a)$ eine $L(A)$-Auss. mit $\mathfrak{M}^1 \models \varphi(\bar a)$.
Sei $\rho(\bar x)$ äquiv. zu $\varphi(\bar a)$ mod T, qu. fr.
Dann gilt $\mathfrak{M}^1 \models \varphi(\bar a)$ gdw $\mathfrak{M}^1 \models \rho(\bar a)$
gdw $\mathfrak{A} \models \rho(\bar a)$ gdw $\mathfrak{M}^2 \models \rho(\bar a)$
gdw $\mathfrak{M}^2 \models \varphi(\bar a)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) klar.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Sei $\varphi(\bar x)$ prim. $\exists$-Formel, $c_1,..c_n$ neue Konst.
Es genügt z.z. dass wir $T \cup \{\varphi(\bar c)\}$ ~~und~~ $T \cup \{\neg\varphi(\bar c)\}$ durch qu.fr. $L(\bar c)$-Auss. $\rho(\bar c)$ trennen können.
Seien $\mathfrak{M}^1, \mathfrak{M}^2 \models T$, $\bar a^1 \subseteq \mathfrak{M}^1$, $\bar a^2 \subseteq \mathfrak{M}^2$. Wir müssen zeigen:
Wenn $(\mathfrak{M}^1, \bar a^1)$, $(\mathfrak{M}^2, \bar a^2)$ dieselben qu.fr. $L(\bar c)$-Auss. erfüllen, dann gilt auch $\mathfrak{M}^1 \models \varphi(\bar a^1) \Rightarrow \mathfrak{M}^2 \models \varphi(\bar a^2)$.
Sei $\mathfrak{A}^i = \langle \bar a^i \rangle^{\mathfrak{M}^i} \subseteq \mathfrak{M}^i$, $i = 1, 2$.
Wenn es einen Isom. $f: \mathfrak{A}^1 \to \mathfrak{A}^2$ gibt mit $f(\bar a^1) = \bar a^2$, dann folgt (i) aus (iv) mit $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^1 = \mathfrak{A}^2$.
Jedes Elt von $\mathfrak{A}^1$ ist von der Form $t^{\mathfrak{M}^1}(\bar a^1)$ für einen L-Term $t(\bar x)$. Ein Isom. $f: \mathfrak{A}^1 \to \mathfrak{A}^2$ muss also erfüllen
$$f(t^{\mathfrak{M}^1}(\bar a^1)) = t^{\mathfrak{M}^2}(\bar a^2). \quad (*)$$

Def. $f : \mathfrak{A}^1 \to \mathfrak{A}^2$ durch $(*)$.

z.z. f ist wohldef. und inj. (surj. ist klar.)

Sei $s^{\mathfrak{M}^1}[\bar{a}^1] = t^{\mathfrak{M}^1}[\bar{a}^1]$. Dann gilt

$s(\bar{c}) = t(\bar{c})$ in $(\mathfrak{M}^1, \bar{a}^1)$ und daher auch in $(\mathfrak{M}^2, \bar{a}^2)$, d.h. $s^{\mathfrak{M}^2}[\bar{a}^2] = t^{\mathfrak{M}^2}[\bar{a}^2]$.

Daher ist f wohldef. Die Injekt. folgt durch die Umkehr. der Rollen. Wir müssen zeigen, dass f ein Homom. ist, d.h. mit Rel.symb. vertauscht: Es gilt:

$$\mathfrak{M}^1 \models R[t_1^{\mathfrak{M}^1}[\bar{a}^1], \ldots t_m^{\mathfrak{M}^1}[\bar{a}^1])$$

gdw $(\mathfrak{M}^1, \bar{a}^1) \models R(t_1(\bar{c}), \ldots t_m(\bar{c}))$

gdw $(\mathfrak{M}^2, \bar{a}^2) \models \ldots$

gdw $\mathfrak{M}^2 \models R[t_1^{\mathfrak{M}^2}[\bar{a}^2], \ldots\ )$

<u>Bsp</u> 3.18 (i) T_∞ Th. der unendl. Mengen über $L = \emptyset$

Axiome: $(\exists_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $\exists x_0, .. x_{n-1} \bigwedge_{i<j<n} \neg x_i = x_j$.

<u>Satz</u>: T_∞ hat QE und ist vollst.

3.19 (ii) T_{DLO} Theorie der dichten Lin. Ord. hat QE (und ist vollst.)

<u>Bew</u>: Seien $O_1, O_2 \models T_{DLO}$, $A \subseteq O_1, O_2$ endl.

$A = \{a_1, .. a_n\}$ mit $a_i < a_{i+1}$. (benutzen 3.17 (iv))

Sei $\exists y\, \rho(y)$ eine einf. $\exists$-Auss. in $L(A)$ mit $O_1 \models \exists y\, \rho(y)$, also etwa $O_1 \models \rho(b_1)$. Dann gibt es vier Fälle i) $b_1 \in A$; setze $b_2 = b_1$, $O_2 \models \rho(b_2)$

(ii) $a_i < b_1 < a_{i+1}$. Dann ex $b_2 \in O_2$ entspr.

(iii) $b_1 < a_1$, (iv) $a_n < b_1$.

3.20 (iii) <u>Satz</u> $T_{K\text{-}VR}$ hat QE und ist vollst.

<u>Bew</u>: Seien $V_1, V_2 \models T_{K\text{-}VR}$, $A \subseteq V_1, V_2$ eine endl. erz Ustr., d.h. A ist endl. dim K-VR.

Sei $\exists y\, \varphi(y)$ eine einf. $\exists$-Auss in $L(A)$ mit $V_1 \models \exists y\, \varphi(y)$; $b_1 \in V_1$ mit $V_1 \models \varphi(b_1)$. Ist $b_1 \in A$, dann gilt $V_2 \models \varphi(b_1)$. Sonst wähle $b_2 \in V_2 \setminus A$ (möglicherw in $V_2' \succeq V_2$). Dann sind $A + Kb_1$, $A + Kb_2$ isom. VR unter einem Isom. $f: A + Kb_1 \to A + Kb_2$, $f|_A = id$, $f(b_1) = b_2$. Daher gilt $V_2 \models \varphi(b_2)$.

$T_{K\text{-}VR}$ ist vollst., weil der 0-VR Primstr. ist.

<u>Satz 3.21</u> T_{ACF} hat QE.

<u>Bew</u>: Seien $K_1, K_2 \models T_{ACF}$ mit $R \subseteq K_1, K_2$ Unterring. Sei $\exists y\, \varphi(y)$ einf. $\exists$-Auss. in $L(R)$ mit $K_1 \models \exists y\, \varphi(y)$. Seien F_1, F_2 die Quot.körper von R in K_1, K_2.

$f: F_1 \to F_2$ ein Isom. mit $f|R = id$. Dann lässt sich f zu Isom. $G_1 \to G_2$ zwischen dem alg. Abschluss von F_i in K_i, $i = 1, 2$, forts.

$$\begin{tikzcd}
K_1 \arrow[d, dash] & K_2 \arrow[dd, dash] \\
G_1(b_1) \arrow[d, dash] & \\
G_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, dash] & G_2 \arrow[d, dash] \\
F_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, dash] & F_2 \arrow[d, dash] \\
R_1 \arrow[r, "id"] & R_2
\end{tikzcd}$$

Nun gibt es zwei Fälle

1. $b_1 \in G_1$: Dann erfüllt $b_2 = g(b_1)$ die Formel $\varphi(y)$ in G_2 und daher in K_2.

2. Fall: $b_1 \notin G_1$, d.h. b_1 ist trans. über G_1. Dann ist $G_1(b_1) \simeq G_1(X)$ dem Körper der rat. Fkt. über G_1 (Quot.körper von $G_1[X]$.) Wenn $G_2 \neq K_2$, wähle $b_2 \in K_2 \setminus G_2$. Dann ist $G_2(b_2) \simeq G_2(X) \simeq G_1(X) \simeq G_1(b_1)$.
Sonst wähle elem. Erw. von G_2 (mit Löw.-Sk.)

Schwächer als QE:

Def. 3.22 T heißt modellvollst., wenn für $\mathfrak{M}^1, \mathfrak{M}^2 \models T$ gilt $\mathfrak{M}^1 \subseteq \mathfrak{M}^2 \Rightarrow \mathfrak{M}^1 \preceq \mathfrak{M}^2$.

M.a.W. T ist modellvollst. gdw $T \cup \mathrm{Diag}(\mathfrak{M})$ ist vollst. für jedes Modell $\mathfrak{M} \models T$.

Bem: QE $\Rightarrow$ modellvollst.

Satz 3.23 (Robinsons Test) Sei T eine Th. Dann sind äquivalent:

(i) T ist modellvollst.

(ii) Jede Formel φ ist mod. T äquiv. zu einer $\forall$-Formel

(iii) Für alle $\mathfrak{M}^1, \mathfrak{M}^2 \models T$, $\mathfrak{M}^1 \subseteq \mathfrak{M}^2$, und $\exists$-Auss. φ in $L(M^1)$ gilt $\mathfrak{M}^2 \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{M}^1 \models \varphi$.

Bew: (i) $\Leftrightarrow$ (iii) ist Tarskis Test

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) ist Kor. 3.6

Kor 3.24 T_{acfp} ist vollst, T_{acf} ist modellvollst.

Def 3.25 Sei T eine Th. Eine Th. T^* ist der Modellbegleiter für T, falls gilt

i) Jedes Modell von T kann zu einem Modell von T^* erw. werden und umgekehrt, $T_\forall = T_\forall^*$

ii) T^* ist modellvollst.

Satz 3.26 Eine Th. T hat höchstens einen Modellbegleiter (bis auf Äquiv.)

Bew. Sind T^+, T^* Modellbegl. von T, dann ist jedes Modell $\mathfrak{A}_0$ von T^+ in einem Modell von T^* enthalten und umgek. Damit erhalten wir eine Kette

$$\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{B}_1 \subseteq \ldots \quad \text{mit } \mathfrak{A}_i \models T^+, \mathfrak{B}_i \models T^*$$

und $\mathfrak{A}_i \preceq \mathfrak{A}_{i+1}$, $\mathfrak{B}_i \preceq \mathfrak{B}_{i+1}$, also $\mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}_i \preceq \bigcup \mathfrak{A}_i = \bigcup \mathfrak{B}_i$.

Daher ist $\mathfrak{A}_0 \models T^+$ und entspr. für $\mathfrak{B}_0 \models T^*$.

Einschub Modellbegleiter

Def. 3.27 Sei T eine Th. Dann heißt $\mathfrak{A}$ T-ex. abg., wenn i) $\mathfrak{A}$ in ein Modell von T eingebettet werden kann
ii) $\mathfrak{A}$ ex. abg. ist in jedem $\mathfrak{M} \models T$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$, $\mathfrak{A} \prec_1 \mathfrak{M}$,
d.h. falls für alle $\exists$-Auss. φ in $L(A)$ gilt

$$\mathfrak{M} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi.$$

Lemma 3.28
Sei $T_\forall = \{\varphi$ $\forall$-Auss. $| T \vdash \varphi\}$. Dann ist $\mathfrak{A}$ T-ex. abg. gdw. $\mathfrak{A}$ $T_\forall$-ex. abg. ist; (T hat Modellbegl. gdw $T_\forall$ einen Modellbegl. hat). ~~Für~~

Bew: Für i): jedes Modell von $T_\forall$ kann in ein Modell von T eingebettet werden. Für ii): $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$, $\mathfrak{A} \prec_1 \mathfrak{M} \Rightarrow$
$\mathfrak{A} \prec_1 \mathfrak{B}$.

Bem: $\mathfrak{A} \models T_\forall$ gdw $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \models T$.

Lemma 3.29 Jedes Modell von T kann in eine T-ex. abg. Struktur eingeb. werden.

Bew: Sei $\mathfrak{A} \models T_\forall$, $(\varphi_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ eine Aufzählung der $\exists$-Auss. in $L(A)$. Wir konstr. eine aufst. Kette $(\mathfrak{A}_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ mit $\mathfrak{A}_\alpha \models T_\forall$. Setze $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$ und sei $\mathfrak{A}_\alpha$ schon konstruiert. Wenn φ_α in einer Erw. von $\mathfrak{A}_\alpha$ gilt, setze $\mathfrak{A}_{\alpha+1}$ als diese Erw., sonst $\mathfrak{A}_{\alpha+1} = \mathfrak{A}_\alpha$. Für λ Limeszahl setze $\mathfrak{A}_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathfrak{A}_\alpha$. Dann ist $\mathfrak{A}_\lambda \models T_\forall$. Setze $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_\kappa$.
Dann sind alle $\exists$-Auss. in $L(A)$ in $\mathfrak{A}'$ erfüllt.
Wir iterieren und erhalten eine Kette

$$\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}^1 \subseteq \mathfrak{A}^2 \subseteq \ldots, \text{ mit } \mathfrak{M} = \bigcup \mathfrak{A}^i \text{ } T\text{-ex abg.}$$

Satz 3.30 Für jede Th. T sind äquiv.
i) T hat Modellbegleiter T^*
ii) Die T-ex. abg. Strukturen bilden eine elem. Klasse.

<u>Bew</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei T^* Modellbegl. von T.
Dann ist T^* induktiv. z.z. ist $\mathfrak{M} \models T^*$, dann ist $\mathfrak{M}$ T-ex. abg. Sei $\mathfrak{A} \models T$ mit $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A}$. Dann ex $\mathfrak{N} \models T^*$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N}$. Wegen $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ ist $\mathfrak{M} \prec_1 \mathfrak{A}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei T^* die Th. der Klasse der T-ex. abg. Str. Dann ist nach Lemma 3.29 $T^*_\forall = T_\forall$ und daher T^* modellvollst. nach Robinsons Test und damit Modellbegl. von T.

<u>Bsp</u>: Die Th. T_{Gr} der Gruppen hat <u>keinen</u> Modellbegleiter

<u>Bew</u>: Für jede Gr. G, $a, b \in G$ mit $|\langle a \rangle| = |\langle b \rangle|$ ex. eine HNN-Erw. $H = \langle G, t \mid a^t = b \rangle$.
Ang. die Klasse der T_{Gr}-ex. abg. Gruppen wäre elem. Dann gibt es eine Gr. $G \models T^*$ mit elem. bel. großer endl. Ord. Zwei konj. Elem. in G haben dieselbe Ord., d.h. in G ex Paare von Elten, die nicht konjug. sind und bel. große endl. Ord. haben.
Mit Komp.heit ex. elem. Erw. $G_1 \succeq G$ mit Elem. unendl. Ord., die nicht in G_1 konjug. sind. $\lightning$.

§ 4 Abzählbare Modelle

Def 4.1 Sei T eine L-Th., $\Sigma(x)$ eine Menge von L-Formeln. Ein Modell $\mathfrak{A} \models T$ lässt $\Sigma(x)$ aus, wenn $\Sigma(x)$ nicht in $\mathfrak{A}$ realis. wird. Die Formel $\varphi(x)$ isoliert $\Sigma(x)$, wenn

(i) $T \cup \{\varphi(x)\}$ ist kons.

(ii) $T \vdash \forall x\, (\varphi(x) \to \sigma(x))$ für alle $\sigma(x) \in \Sigma(\bar{x})$.

Wir nennen $\Sigma(x)$ auch part. Typen

Satz 4.2 (Omitting types) Wenn T abz. und kons. ist, $\Sigma(x)$ nicht isol. in T, dann hat T ein abz. Modell, das $\Sigma(x)$ auslässt.

Bew: Sei C abz. Menge neuer Konst. Wir erweitern T zu einer Henkin-Theorie T^* in $L(C)$, With

(i) für $c \in C$ ex $\sigma(x) \in \Sigma(x)$ mit $\neg\sigma(c) \in T^*$

(ii) Für $\psi(x) \in L(C)$ ex. $c \in C$ mit $\exists x\, \psi(x) \to \psi(c) \in T^*$.

Wir konstr. T^* indukt. als Vereinig. einer aufst. Kette

$$T = T_0 \subseteq T_1 \subseteq \dots$$

Sei $C = \{c_i \mid i < \omega\}$, $\{\psi_i(x) \mid i < \omega\}$ die Menge der $L(C)$-Formeln. Ist T_{2i} schon konstr., wähle $c \in C$, das noch nicht in $T_{2i} \cup \{\psi_i(x)\}$ vorkommt und setze $T_{2i+1} = T_{2i} \cup \{\exists x\, \psi_i(x) \to \psi_i(c)\}$.

Dann ist T_{2i+1} kons. und (bis auf Äquiv.) von der Form $T \cup \{\delta(c_i, \bar{c})\}$ für eine L-Formel $\delta(x, \bar{y})$ und Tupel $\bar{c} \in C$ mit $c_i \notin \bar{c}$. Weil $\exists \bar{y}\, \delta(x, \bar{y})$ den part. Typ $\Sigma(x)$ nicht isol., gibt es $\sigma \in \Sigma$ so, dass

$T \cup \{\exists \bar{y}\, \delta(x, \bar{y}) \wedge \neg\sigma(x)\}$ kons. ist.

Setze $T_{2i+2} = T_{2i+1} \cup \{\neg\sigma(c_i)\}$. Dann ist $T^* = \bigcup T_i$ kons. Henkin-Th. Sei $(\mathfrak{A}^*, a_c)_{c \in C} \models T^*$. Dann ist nach Tarskis Test $A = \{a_c \mid c \in C\}$ Träger einer elem. Ust. $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{A}^*$. und $\mathfrak{A}$ vermeidet $\Sigma(x)$. $\square$

Man kann auch abz. viele Typen gleichzeitig vermeiden:

Kor 4.3 Sei T abz., kons., $\Sigma_0(x_1, .. x_{n_0}), \Sigma_1(x_1, .. x_{n_1}), \ldots$ eine Folge part. Typen, die nicht isol. sind in T. Dann hat T ein Modell, das alle Σ_i vermeidet.

Bew: ÜA

Bisher haben Typen def. als max kons. Formelmengen (mit Parametern). Nun:

Def 4.4 Sei T eine Th. Ein n-Typ ist eine max. Menge $\Sigma(\bar{x})$ von Formeln kons. mit T, $\bar{x} = x_1, .. x_n$.

$S_n(T)$ bezeichnet die Menge der n-Typen.

Für ein L-St. $\mathfrak{A}$, $B \subseteq A$ ist $S_n^{\mathfrak{A}}(B) = S_n(Th(\mathfrak{A}_B))$.

$S_n(T)$ wird zu einem top. Raum durch die Menge der $[\varphi] = \{p \in S_n(T) \mid p \ni \varphi\}$ als Basis.

Lemma 4.5 (i) Es ist $[\varphi] = [\psi]$ gdw φ, ψ äquiv. mod T.

(ii) Die Menge $\{[\varphi] \mid \varphi$ L-Formel$\}$ ist unter Bool. Operationen abgeschl.:

$[\varphi] \cap [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$, $[\varphi] \cup [\psi] = [\varphi \vee \psi]$

$S_n(T) \setminus [\varphi] = [\neg\varphi]$, $S_n(T) = [\top]$, $\emptyset = [\bot]$.

Bew: (i) Wenn φ, ψ nicht äquiv. mod T ist, dann ist entweder $\varphi \wedge \neg\psi$ oder $\neg\varphi \wedge \psi$ kons. mit T, also $[\varphi] \neq [\psi]$.

Lemma 4.6 Der top. Raum ist total unzsh. und komp.

Bew: Jede Basis-offene Menge ist clopen.

Für $p \neq q \in S_n(T)$ ex. eine Formel φ mit $\varphi \in p$, $\neg\varphi \in q$, d.h. $p \in [\varphi]$, $q \in [\neg\varphi]$. Daher ist $S_n(T)$ Hausdorffsch. Ist $\bigcap_{i \in I} [\varphi_i] \neq \emptyset$, dann ist

$T \cup \{\varphi_i \mid i \in I\}$ inkons. und es ex. endl. Teilm. $I_0 \subseteq I$ mit $T \cup \{\varphi_i \mid i \in I_0\}$ inkons., d.h. $\bigcap_{i \in I_0} [\varphi_i] = \emptyset$.

<u>Def</u> 4.7 Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ St., $f: A_0 \to B$ eine Abb. für $A_0 \subseteq A$. Dann heißt f <u>elementar</u>, wenn für jede Formel $\varphi(x_0, \dots x_n)$ und $\bar{a} \in A_0$ gilt $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}) \Rightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(f(\bar{a}))$.

<u>Bem</u>: Die leere Abb. ist elem. gdw $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, und $f: A \to B$ ist elem. gdw $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

<u>Lemma</u> 4.8 Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ St., $A_0 \subseteq A$, $B_0 \subseteq B$. Ist $f: A_0 \to B_0$ elem., dann induz. f einen stetige surj. Abb.

$$\tilde{f}: S_n(B_0) \to S_n(A_0),\ q \longmapsto \tilde{f}(q) = \{\varphi(x, \bar{a}) \mid \bar{a} \in A_0,\ \varphi(x, f(\bar{a})) \in q\}.$$

<u>Bew</u>: Offens. ist $\tilde{f}(q) \in S_n(A_0)$ und $\tilde{f}$ ist surj weil $\{\varphi(\bar{x}, f(\bar{a})) \mid \varphi(\bar{x}, \bar{a}) \in p\}$ für alle $p \in S_n(A_0)$ endl. erfüllbar ist. Die Stetigkeit folgt, weil

$$\tilde{f}^{-1}([\varphi(\bar{x}, \bar{a})]) = [\varphi(\bar{x}, f(\bar{a}))].$$

<u>Bem</u>: (i) Ist $f: A_0 \to B_0$ eine elem. Bij (also zusätzl. surj.) dann ist $\tilde{f}: S_n(A_0) \to S_n(B_0)$ ein Homeom.

(ii) Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, $A_0 \subseteq B_0$ und $f: A_0 \hookrightarrow B_0$ elem., dann ist $\tilde{f}: S_n(B_0) \to S_n(A_0)$ die Einschränkung. Wir schreiben $q\restriction_{A_0} = \tilde{f}(q)$ und q heißt Forts. von $q\restriction_{A_0}$.

<u>Lemma</u> 4.9 Ein Typ p ist isol. in T (bzgl Def 4.1) gdw p isol. Punkt in $S_n(T)$ ist, d.h. falls

$[\varphi] = \{p\}$ für eine Formel φ.

<u>Bem:</u> Eine Formel φ heißt <u>vollständig</u>, wenn sie einen (vollst.) Typen isoliert.

<u>Satz</u> 4.1~~0~~ (Ryll-Nardzewski) Sei T eine abz. vollst. Th. Dann sind äquiv.

(i) T ist $\aleph_0$-kat. (i') alle n-Typen sind isol., alle $n \in \mathbb{N}$

(ii) für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es nur endl. viele Formeln $\varphi(x_1, .. x_n)$ bis auf Äquiv. mod T.

(iii) Jedes abz. Modell von T ist ω-sat.

<u>Def:</u> 4.10 Eine L-Str. $\mathfrak{A}$ heißt ω-sat., wenn alle Typen über endl. Teilm. realis. sind.

<u>Bew</u> (4.11) (i) $\Rightarrow$ (ii) ~~Wenn~~ es ~~unendl.~~ viele Formeln mod T ~~für~~ ein $n \in$ ~~$\mathbb{N}$~~ gibt, ~~dann muss~~ Wenn es in $S_n(T)$ einen nicht isol. Typen p geben mit 4.5. Nach Satz 4.2 gibt es ein abz. Modell, das vermeidet. Aber es gibt auch ein abz. Modell, das diesen Typen real., nämlich ein abz. Modell von $T \cup p(c)$ für eine neue Konst. c $\}$ $\Rightarrow$ alle Typen isol. $\overset{\text{Komp}}{\Rightarrow}$ endl. viele Formeln

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sei $\mathfrak{M} \models T$, $A \subseteq M$ mit $|A| = n$. Wenn es N-viele Formeln $\varphi(x_1, .. x_{n+1})$ gibt, dann gibt es bis auf Äquiv. in $\mathfrak{M}$ nur N-viele $L(A)$-Formeln $\psi(x_1)$ und daher ist jedes Typ p durch die 'kleinste' enthaltene Formel $\varphi_p(x)$ isoliert in $S(Th(\mathfrak{M}_A))$. Jedes Elt, das $\varphi_p(x)$ real. real. auch $p(x)$, d.h. $\mathfrak{M}$ ist ω-sat.

(iii) $\Rightarrow$ (i) (Wie Satz von Cantor) Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$ abz., $A = \{a_0, a_1, ..\}$, $B = \{b_0, b_1, ..\}$. Wir konstr. aufst. Kette von endl. elem. Abb. $f_i : A_i \to B_i$, mit $A = \bigcup A_i$, $B = \bigcup B_i$. Setze $f_0 = \emptyset$, weil $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ und sei f_i bereits konstr.

Ist $i = 2n$, setze $A_{i+1} = A_i \cup \{a_n\}$ und betrachte

$p(x) = tp(a_n / A_i)$. Weil $f_i : A_i \to B_i$ elem. ist

ist $\tilde{f}_i(p(x)) \in S(B_i)$. Weil $\mathfrak{B}$ ω-sat. ist, ex. eine

Real. b' für $\tilde{f}_i(p(x))$. Dann gilt für alle $\bar{a} \in A_i$

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_n, \bar{a}) \Rightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(b', f_i(\bar{a})),$$

d.h. $f_{i+1} = f_i \cup \{(a_n, b')\}$ ist elem.

Ist $i = 2n+1$, vertausche $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und verfahre wie eben.

<u>Kor</u> 4.12 Eine ω-sat. St. ist <u>ω-homogen</u>.

<u>Def</u> 4.13 Eine St. $\mathfrak{M}$ ist ω-homogen, wenn für jede elem. Abb. $f_0 : A \to M$ für $A \subseteq M$ endl. und für alle $a \in M$ ein $b \in M$ ex mit $f = f_0 \cup \{(a,b)\}$ elem.

<u>Bem</u>: Offens. ist $f = f_0 \cup \{(a,b)\}$ elem. gdw b real. $f(tp(a/A))$.

<u>Kor</u> 4.14 Sei $\mathfrak{A}$ eine St., $a_1, \ldots a_n \in \mathfrak{A}$. Dann ist $Th(\mathfrak{A})$ ω-kat gdw $Th(\mathfrak{A}, a_1, \ldots a_n)$ ω-kat. ist.

<u>Bsp</u>: T_∞, T_{KVR} K endl., Zufallsgraph, T_{DLO}

folgt aus QE.

Wann ex abz. ω-sat. Modelle?

<u>Def</u> 4.15 Eine Th. T heißt klein, wenn $S_n(T)$ abz. ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

<u>Bem</u>: Eine abz. Th. mit höchstens abz. vielen abz. Modellen ist klein. Die Umkehrung gilt nicht.

Lemma 4.16 Eine abz. vollst. Th. T ist klein gdw wenn sie ein abz. ω-sat. Modell hat.

Bew: OBdA hat T ein unendl. Modell.

"⇐" Wenn T ein abz. ω-sat. Modell hat, dann kann es nur abz. viele Typen geben.

"⇒" Wenn alle $S_{n+1}(T)$ abz. sind, dann ex über n-elem. Teilm. nur abz. viele Typen. Sei $\mathfrak{A}_0 \models T$. Wir konstr. elem. Kette. Ist $\mathfrak{A}_i$ schon konstr., dann benutzen wir Kor. 2.15 und Löw-Skol. abw. um ein abz Modell $\mathfrak{A}_{i+1}$, in dem alle Typen über endl. Teilm. von $\mathfrak{A}_i$ real. sind. Das geht, weil T klein ist.

Durch Iterieren erhalten wir $\mathfrak{A} = \bigcup \mathfrak{A}_i$ ω-sat.

Satz 4.17 (Vaught) Eine abz. vollst. Th. kann nicht genau 2 Modelle (bis auf Isom.) haben.

Bew: Sei T klein, nicht ω-kat. Dann hat T ein ω-sat Modell $\mathfrak{A}$. Es gibt aber auch einen nicht-isol. Typ $p(\bar{x})$, der in einem Modell $\mathfrak{B}$ vermieden wird. Sei $\bar{a} \subseteq A$ Real. für p in $\mathfrak{A}$. Dann ist $Th(\mathfrak{A}, \bar{a})$ nicht ω-kat, hat also ein nicht-sat. Modell $\mathfrak{C} \models Th(\mathfrak{A}, \bar{a})$. Dann ist $\mathfrak{C} \not\cong \mathfrak{A}$, $\mathfrak{C} \not\cong \mathfrak{B}$, weil $p(\bar{x})$ in $\mathfrak{C}$ real. ist.

Bem: Für $n \neq 2$, $n \leq \omega$ ex. abz. vollst. Th. mit n Modellen.

Vaughts Verm. Wenn eine abz. vollst. Th T mehr als abz. viele abz. Modelle hat, dann schon $2^{\aleph_0}$ viele.

Eine der Hauptmethoden, neue Strukturen zu bauen ist die Amalgamierung (Fraïssé, Hrush.)

<u>Def</u> 4.18 (i) Sei $\mathfrak{M}$ eine L-St. Dann ist das <u>Skelett</u> $\mathcal{K}$ von $\mathfrak{M}$ (oder Alter von $\mathfrak{M}$) die Klasse aller endl. erz. L-St., die in $\mathfrak{M}$ eingebettet werden können.

(ii) $\mathfrak{M}$ heißt <u>$\mathcal{K}$-sat.</u>, wenn $\mathcal{K}$ das Skelett von $\mathfrak{M}$ ist und für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$, $f_0 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{M}$, $f_1 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ eine Einb. $g : \mathfrak{B} \to \mathfrak{M}$ ex mit $f_0 = g \circ f_1$.

<u>Satz</u> 4.19 Sei L abz. Dann sind je zwei abz. $\mathcal{K}$-sat. St. isom.

<u>Bew</u>: Seien $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ abz. L-St. mit Skelett $\mathcal{K}$, $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ $\mathcal{K}$-sat. Dann konstr. wir indukt. wie in Bew von 4.11 einen Isom. $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$: Ist $f_1 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{N}$ eine Einbett., $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$ endl. erz., $a \in \mathfrak{M}$, dann ex wegen der $\mathcal{K}$-Saturh. eine Einbettung $g : \mathfrak{A}' = \langle A a \rangle^{\mathfrak{M}} \to \mathfrak{N}$, die f_1 forts. ~~Dann~~ Im nächsten Schritt werden die Rollen von $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ vertauscht.

<u>Bem</u>: Der Bew. zeigt, dass abz. $\mathcal{K}$-sat. St. <u>ultrahomog</u> sind, d.h. jeder Isom. zwischen endl. erz. Unterst. lässt sich zu Autom. fortsetzen.

<u>Satz</u> 4.20 Sei L abz., $\mathcal{K}$ abz. Klasse endl. erz. L-St. Dann ex. genau dann eine abz. $\mathcal{K}$-sat. L-St. $\mathfrak{M}$, wenn

(i) (Erben) $\mathfrak{A}_0 \in \mathcal{K}$, dann ist das Skelett von $\mathfrak{A}_0$ in $\mathcal{K}$ enthalten

(ii) (gem. Einb.) Für $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1 \in \mathcal{K}$ ex $\mathfrak{D} \in \mathcal{K}$ und Einb. $g_i : \mathfrak{B}_i \to \mathfrak{D}$, $i = 0, 1$.

(iii) (Amalg.) Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1 \in \mathcal{K}$, $f_i : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_i$, $i = 0, 1$, dann ex $\mathfrak{D} \in \mathcal{K}$, $g_i : \mathfrak{B}_i \to \mathfrak{D}$ mit $g_0 \circ f_0 = g_1 \circ f_1$.

Falls eine K-sat. Str. ex. ist diese bis auf Isom. eind., der Fraïssé-Limes von K.

<u>Bew:</u> Ist K das Skelett einer abz. K-sat. Struktur, dann gilt (Erben). Für (Amalg) seien $\mathfrak{A}$, $f_i : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_i$ gegeben, $i = 0,1$, OBdA $\mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{M}$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}_1$. Dann ist $g_1 : \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{M}$ die Forts. des part. Isom. $f_0 : \mathfrak{A} \to f_0(\mathfrak{A})$ und erfüllt $f_0 = g_0 \circ f_1$. Sei $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{M}$ die endl. erz. Str. $\langle \mathfrak{B}_0, g_1(\mathfrak{B}_1)\rangle^{\mathfrak{M}}$.
Dann ist $g_0 : \mathfrak{B}_0 \xrightarrow{id} \mathfrak{D}$ und die Bed. erfüllt.

Entspr. für (Gem. Einb.)

Sei nun umgekehrt K eine abz. Klasse, die (i) - (iii) erfüllt. Wir bauen $\mathfrak{M}$ als aufst. Kette $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{M}_i$.
Sei $\mathfrak{M}_i$ schon konstr., $K = (\mathfrak{B}_i)_{i\in\omega}$. Ist $i = 2n$, wähle $\mathfrak{M}_{i+1} \in K$ mit

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{M}_i \arrow[dr, "g_0 = id"] & \\ & \mathfrak{M}_{i+1} \\ \mathfrak{B}_n \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Ist $i = 2n+1$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K$, $f_0 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{M}_i$, $f_1 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ gegeben.
Dann setze

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{M}_i \arrow[dr] & \\ \mathfrak{A} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathfrak{M}_{i+1} \\ & \mathfrak{B} \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad (*)$$

Damit die Vereinigung $\mathfrak{M} = \bigcup \mathfrak{M}_i$ K-sat. ist, müssen wir in den ungeraden Schritten die richtigen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K$ versorgen. Klar ist K das Skelett von $\mathfrak{M}$; daher ist für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K$, $f_0 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{M}$, $f_1 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ also
$f_0(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{M}_j$ für ein j. Wir müssen dann für ein ungr
$i > j$ gerade diese f_0, f_1 in $(*)$ benutzen.

Für jedes j gibt es aber nur abz. viele solche Möglichkeiten. D.h. wir können alle Möglichkeiten in $i > j$ realisieren.

Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 4.19

Bsp: (i) K die Klasse der endl. Graphen
$\mathfrak{M}$ der Zufallsgraph.

(ii) K die Klasse der endl. Körper der Char p
$\mathfrak{M}$ $\tilde{\mathbb{F}}_p$ alg. Abschluss von $\mathbb{F}_p$.

Def Eine Sprache L heißt relational, wenn sie kein Fktsymb. enth.
$\Rightarrow$ jede Teilm. ist Unterstr.

Lemma 4.21 Eine vollst. Th. T in einer endl. relat. Sprache und mit QE ist ω-kat. Insbes. sind alle Modelle ω-homog.

Bew: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es nur endl. viele nicht-äquiv. qufr. Formeln $\varphi(x_1, \dots x_n)$ und alle Formeln sind mod T äquiv. zu einer dieser Formeln. Also folgt die Beh. aus Ryll-Nardz. (4.11).

Wenn T QE hat, dann ist jedes Isom. zwischen Ustr. schon elem. Für relat. Sprachen gilt

Lemma 4.22 Sei T vollst. Th. in einer rel. Sprache, $\mathfrak{M} \models T$ unendl. Dann sind äquiv.

i) T hat QE
ii) Jedes Isom. zwischen endl. Ustr. ist elem.
iii) Jeder Isom. zwischen endl. Unterstr. lässt sich auf ein weiteres Elt fortsetzen.

Bew: (i) $\Rightarrow$ (ii) klar

(ii) $\Rightarrow$ (i) Wenn jedes Isom. zwischen endl. Ustr. elem. ist, dann erfüllen alle n-Tupel $\bar{a}$, die denselben

qufr. Typ haben auch dieselben einf. $\exists$-Formeln.
Wir zeigen: Dann ist jede einf. $\exists$-Formel
$\varphi(\bar{x}) = \exists y\, \rho(\bar{x}, y)$ mod T zu einer qufr. Formel äquiv.
Seien $q_1(\bar{x}), \dots q_{k-1}(\bar{x})$ die qufr. Typen aller
n-Tupel, die $\varphi(\bar{x})$ erfüllen, und sei $\rho_i(\bar{x}) = \bigwedge_{\psi \in q_i} \psi(\bar{x})$

Dann gilt $T \vdash \forall \bar{x}\, (\varphi(\bar{x}) \longleftrightarrow \bigvee_{i<k} \rho_i(\bar{x}))$.

(i) $\Rightarrow$ iii) T ist ω-kat und daher sind alle Modelle ω-homog. Weil jeder Isom. zwischen endl. Ustr. elem. ist (i) $\Leftrightarrow$ ii)), folgt die Beh.

iii) $\Rightarrow$ ii) Wenn sich jeder part. Isom. forts. lässt, dann ist jeder part. Isom. elem.

Kor: 4.23 Sei L eine rel. Sprache, $\mathbb{K}$ Klasse endl. L-Str. Wenn der Fraïssé-Limes $\mathfrak{M}$ von $\mathbb{K}$ ex, dann ist $Th(\mathfrak{M})$ ω-kat und hat QE.

Bew: $\mathfrak{M}$ ist $\mathbb{K}$-sat, also ω-sat. Daher hat T dann QE nach 4.22 und ist ω-kat nach 4.21

Bsp: $\mathbb{K}$ = Klasse der endl. lin. Ord. in $L = \{<\}$.
$\mathfrak{M}$ ist dichte lin. Ord. ohne Endpkte.
Also: T_{DLO} hat QE und ist ω-kat.
(wussten wir schon...)

▶ T immer abz. mit unendl. Modellen, T vollst.

Def. 4.24 Sei T abz (nicht notw. vollst.) mit unendl. Modellen. (i) $\mathfrak{A}_0 \models T$ heißt Primmodell, wenn $\mathfrak{A}_0$ sich in jedes Modell von T elem. einb. lässt.

(ii) Eine Str. $\mathfrak{A}$ heißt atomar, wenn alle real. n-Typen isoliert sind in $S_n^{\mathfrak{A}}(\emptyset)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bem (i) Primmodelle müssen nicht ex (Bsp: T_{ACF}) auch nicht bei vollst. Th.

(ii) Ein Tupel $\bar{a}$ heißt atomar, wenn $tp(\bar{a})$ isol. ist.

Satz: 4.25 $\mathfrak{A} \models T$ ist Primmodell gdw $\mathfrak{A}$ abz. und atom. ist.

Bew: "⇒" Weil T abz. Modelle hat, muss $\mathfrak{A}$ abz. sein. Weil nicht-isol. Typen vermieden werden können, muss $\mathfrak{A}$ atomar sein

"⇐" Sei $\mathfrak{M}_0 \models T$ abz. und atomar, $\mathfrak{M} \models T$ bel. Wir konstr. elem. Einbettung $\mathfrak{M}_0 \to \mathfrak{M}$ als aufst. Kette elem. Abb. $f: A \to B$, $A \subseteq \mathfrak{M}_0$ endl., $B \subseteq \mathfrak{M}$.

$f = \emptyset$ ist elem., da T vollst. Wir setzen $f: A \to B$ fort zu $A \cup \{a\}$. Sei $p(x) = tp(a/A)$, $f(p) \in S(B)$.

z.z. $f(p)$ ist in $\mathfrak{M}$ real., dann ist $f \cup \{(a,b)\}$ elem.

Sei $\bar{a} = A$, $\varphi(x, \bar{x})$ eine Formel, die $tp(a\bar{a})$ isol. Dann ist $p(x)$ isol. durch $\varphi(x, \bar{a}) \in tp(a/\bar{a})$, denn es ist $\rho(x, \bar{a}) \in tp(a/\bar{a})$ wenn $\rho(x, \bar{y}) \in tp(a\bar{a})$.

Daher gilt $\mathfrak{M}_0 \models \forall x, \bar{y} (\varphi(x, \bar{y}) \to \rho(x, \bar{y}))$ und daher $\mathfrak{M} \models \forall x (\varphi(x, \bar{a}) \to \rho(x, \bar{a}))$ nach Ind voraus. Daher ist $f(p)$ isol. durch $\varphi(x, f(\bar{a}))$ und daher in $\mathfrak{M}$ realisiert.

<u>Satz</u> 4.26 Alle Primmodelle einer Th. T sind isom.

<u>Bew:</u> Seien $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}' \models T$ Primmodelle. Da Primmodelle atomar sind, kann jede elem. Abb. zwischen endl. Teilen von $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$ zu allen endl. Teilmengen fortgesetzt werden. Daher können wir einen Isom. bauen, wie in Thm 4.11

<u>Kor</u> 4.27 Primmodelle sind ω-homogen.

<u>Bew:</u> Sei $\mathfrak{M}_0$ Primmodell, $\bar{a} \in M_0$. Nach Satz 4.25 ist $(\mathfrak{M}_0, \bar{a})$ Primm. für $Th(\mathfrak{M}_0, \bar{a})$ und die Beh. folgt aus 4.26

<u>Def.</u> 4.28 Die isol. Typen sind <u>dicht</u> in T, wenn jede kons. L-Formel $\psi(x_1, .. x_n)$ zu einem isol. Typ $p(\bar{x}) \in S_n(T)$ gehört.

<u>Bem:</u> Äquiv. dazu für jedes $\psi(\bar{x})$ ex. eine vollst. Formel $\varphi(\bar{x})$ mit $T \vdash \forall \bar{x} (\varphi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x}))$.

<u>Satz</u> 4.29 T hat ein Primmodell gdw die isol. Typen dicht sind.

<u>Bew:</u> „$\Rightarrow$" Wenn $\mathfrak{M} \models T$ Primmodell ist, dann ist $\mathfrak{M}$ atomar. Weil kons. Formeln immer real. sind, ist jede Formel durch ein atomares Tupel real., m.a.W. die Formel liegt in einem isol. Typen.

„$\Leftarrow$" $\mathfrak{M}_0$ ist atomar gdw für alle $n \in \mathbb{N}$

$\Sigma_n(x_1, .. x_n) = \{\neg \varphi(x_1, .. x_n) \mid \varphi(x_1, .. x_n)$ vollst.$\}$ nicht real. ist in $\mathfrak{M}_0$. Nach Kor 4.3 genügt es z.z. dass die Σ_n nicht isol. sind in T. Damit Σ_n nicht isol. ist gdw für jede kons. Formel $\psi(\bar{x})$ eine vollst. Formel $\varphi(\bar{x})$ ex mit $T \nvdash \forall \bar{x} (\psi(\bar{x}) \rightarrow \neg\varphi(\bar{x}))$. Weil $\varphi(\bar{x})$ vollst. ist,
$\varphi \rightarrow \psi$ oder $\varphi \rightarrow \neg\psi$
ist dies äquiv. zu $T \vdash \forall \bar{x} (\varphi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x}))$, d.h. die isol. n-Typen sind dicht.

Umgekehrt zeigt dies schon die Äquivalenz, denn wenn Σn isol. ist, dann ist Σn immer real. und es kann kein atomares Modell geben.

Bsp 4.30 Sei $L = \{P_s \mid s \in {}^{<\omega}2\}$, P_s 1-stel. Präd.
Die Theorie T_{Baum} sagt, dass die P_s, $s \in {}^{<\omega}2$, eine binär-Baum-Struktur bilden:

(i) $\forall x \; P_\emptyset(x)$

(ii) $\exists x \; P_s(x)$, $s \in {}^{<\omega}2$

(iii) $\forall x \; (P_s(x) \Leftrightarrow (P_{s0}(x) \vee P_{s1}(x)))$, $s \in {}^{<\omega}2$.

(iiii) $\forall x \; \neg (P_{s0}(x) \wedge P_{s1}(x))$, $s \in {}^{<\omega}2$.

Die Th. T_{Baum} ist vollst. mit QE, aber es gibt keine isol. Typen und kein Primmodell.

Bew wie für K-VR: Seien T_0, T_1 endl. isom. Bäume in Modellen $\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T}_1 \models T_{Baum}$. Eine einf. ~~F~~Formel ist auf beiden Seiten realbar, wenn sie kons. ist $\Rightarrow$ QE.
T_{Baum} hat als Primstr. den abz. Baum, oder einen Pkt.
Aber diese Typen sind (offensichtlich) nicht isol. ∎

Def. 4.31 Eine Familie $\varphi_s(\bar{x})$, $s \in {}^{<\omega}2$ hat ein binäres Baum für T, wenn für alle $s \in {}^{<\omega}2$ gilt

i) $T \vdash \forall x \; ((\varphi_{s0}(\bar{x}) \vee \varphi_{s1}(\bar{x})) \rightarrow \varphi_s(\bar{x}))$

ii) $T \vdash \forall \bar{x} \neg (\varphi_{s0}(\bar{x}) \wedge \varphi_{s1}(\bar{x}))$.

Satz 4.32 Sei T vollst. Th.

i) Wenn T klein ist, gibt es keinen binären Baum kons. Formeln. Ist T abz., dann gilt auch die Umkehrung

ii) Wenn T keinen binären Baum kons. Formeln hat, dann sind die isol. Typen dicht.

Bew (i) Wenn $\{\varphi_s(\bar{x})\}$ bin. Baum kons. Formeln ist, dann ist für $\eta \in {}^{\omega}2$ die Menge $\{\varphi_s(\bar{x}) \mid s \subseteq \eta\}$ kons. und daher in einem Typ $p_\eta \in S_n(T)$ enthalten. Die Typen p_η sind pw. versch. und daher ist T nicht klein.

(ii) Wenn die isol. Typen nicht dicht liegen, dann ex eine kons. Formel $\varphi(\bar{x})$, die in keinem isol. Typ liegt. Eine solche Formel heißt perfekt. Jede perfekte Formel kann in disj. kons. Formeln zerlegt werden, die wieder perfekt sind. Auf diese Weise erhalten wir einen binären Baum perf. Formeln.

(iii) Sei T abz, nicht klein. Dann gibt es überabz. viele Typen, also gibt es eine kons. Formel $\varphi(\bar{x})$ mit $[\varphi(\bar{x})]$ $[\neg\varphi(\bar{x})]$ überabz: ~~Wir können $\varphi(\bar{x})$ zerlegen~~ Denn sonst ist $p(x) = \{\varphi(x) \mid [\varphi(x)] \text{ überabz.}\}$ ein vollst. Typ, und $S_n(T) = \bigcup_{[\varphi(x)] \text{ abz}} [\varphi(x)] \cup \{p(x)\}$ abz. $\lightning$.

Auf diese Weise erhalten wir einen bin. Baum kons. Formeln.

§5 $\aleph_1$-kat. Theorien

Ziel: Satz von Morley: Eine abz Th. T ist κ-kat. für ein $\kappa > \aleph_0$ gdw κ-kat für alle $\kappa > \aleph_0$.

Bem: Nicht richtig für ω-kat:

$T_{DLO} \models (\mathbb{R}, <) \not\cong (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, <)$.

Dazu müssen wir die innere Str. der $\aleph_1$-kat. Th. verstehen.

<u>Def</u> 5.1 Sei I eine lin. Ord., $\mathfrak{A}$ eine L-Str. Dann heißt $(a_i)_{i\in I}$ mit $a_i \in A$ (oder auch $a_i \in A^k$) eine Folge ununterscheidb. Elemte (oder Ordnungs ununtersch.) wenn für jede L-Formel $\varphi(x_1, .. x_n)$, $n\in\mathbb{N}$, und $i_1 < ... < i_n$, $j_1 < ... < j_n$ in I gilt

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_{i_1}, .. a_{i_n}) \longleftrightarrow \varphi(a_{j_1}, .. a_{j_n})$$

Wenn $i \neq j \in I$ ex mit $a_i = a_j$, dann ist die Folge konst. Daher nehmen wir an, dass alle a_i pw. versch. sind.

<u>Def</u> 5.2 Sei I eine unendl. lin. Ord., $\mathcal{I} = (a_i)_{i\in I}$ Folge von k-Tupeln in $\mathfrak{M}$, $A \subseteq M$. Der Ehrenfeucht-Mostowski Typ $EM(\mathcal{I}/A) = \{\varphi(x_1, .. x_n) \mid n<\omega, \varphi(a_{i_1}, .. a_{i_n}), i_1 < .. < i_n\}$

<u>Lemma</u> 5.3 (Standardlemma) Sind I, J unendl. lin. Ord., $\mathcal{I} = (a_i)_{i\in I}$ Folge von Elten in $\mathfrak{M}$, dann ex eine Str. $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{M}$ mit einer Folge ununtersch. Elte $(b_j)_{j\in J}$, die $EM(\mathcal{I})$ realisiert.

Als Korollar erhalten wir daraus:

<u>Kor</u> 5.4 Wenn T ein unendl. Modell ist, I eine lin. Ord., dann hat T ein Modell mit einer Folge ununtersch. Elte $(a_i)_{i\in I}$ pw. versch. Elte.

Für den Beweis von 5.3 brauchen wir

<u>Satz</u> 5.5 (Ramsey) Sei A unendl., $n, k \in \omega$, und $[A]^n$ die Menge der n-elt. Teilm. von A.

Wenn $[A]^n = \dot\bigcup_{i \leq k} C_i$, dann ex ein unendl. Menge $B \subseteq A$ mit $[B]^n \subseteq C_j$ für ein $1 \leq j \leq k$.

Bew: Ind. über n. Klar für n=1. Sei die Beh. für n bewiesen, $a_0 \in A$. Jede Färbung f von $[A]^{n+1}$ induz. eine Färbung f' auf $[A']^n$ mit $A' = A \setminus \{a_0\}$ durch $x \in [A']^n$ bekommt die Farbe $f'(x) = f(x \cup \{a_0\})$. Nach Ind. ex. einfarb. unendl. Teilm. $B_1 \subseteq A'$ bzgl f'; d.h. ~~alle~~ $f(x \cup \{a_0\})$ ist konst. für $x \in [B_1]^n$. Wähle $a_1 \in B_1$ und wir erhalten unendl. $B_2 \subseteq B_1$ mit

$f(y \cup \{a_0, a_1\})$ konst. für $y \in [B_2]^{n-1}$.

Induktiv finden wir eine Folge

$$A \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$$

und $a_i \in B_i \setminus B_{i+1}$ mit der Eigenschaft, dass für jede $(n+1)$-Elem. Teilm. $\{a_{i(0)}, a_{i(1)}, \dots, a_{i(n)}\}$, $i(j) < i(j+1)$ die Färbung nur von $i(0)$ abhängt. Für $i(0)$ gibt es nur k viele Möglichkeiten. Also gibt es $(n=1)$ unendl. viele $a_{i(0)}$, die dieselbe Farbe ergeben. Die Menge dieser $a_{i(0)}$ ergibt eine einfarb. Menge.

Bew von 5.3 Sei C eine Menge neuer Konst. mit einer Ordn. so, dass $(C,<) \cong (I,<)$. Betrachte

$$T' = \{\varphi(\bar{c}) \mid \varphi(\bar{x}) \in EM(I)\} \text{ und}$$

$$T'' = \{\varphi(\bar{c}) \leftrightarrow \varphi(\bar{d}) \mid \bar{c}, \bar{d} \subseteq C\},$$

wobei φ L-Formel und alle Tupel monot. wachs. Wir müssen zeigen, dass $T \cup T' \cup T''$ kons. ist. Nach dem Kompaktheitssatz genügt es für endl. Mengen $C_0 \subseteq C$ und Δ z.z. $T_{C_0,\Delta} = T \cup \{\varphi(\bar{c}) \in T' \mid \bar{c} \subseteq C_0\} \cup \{\varphi(\bar{c}) \leftrightarrow \varphi(\bar{d}) \mid \varphi \in \Delta, \bar{c}, \bar{d} \subseteq C_0$

kons. ist. Wir können annehmen, dass die Formeln aus Δ freie Var. $x_1, \dots x_n$ haben und $\bar{c}, \bar{d}$ n-Tupel sind. Wir nehmen an, dass die a_i pw. versch. sind, so dass

$A = \{a_i \mid i \in I\}$ geord. Menge ist. Wir def. Äquiv. auf $[A]^n$ durch $\bar{a} \sim \bar{b} \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}) \leftrightarrow \varphi(\bar{b})$, $\varphi(\bar{x}) \in \Delta$, $\bar{a}, \bar{b}$ aufst. Tupel. Es gibt höchstens $2^{|\Delta|}$-viele Äquiv.kl., also ex. nach Ramseys Satz eine unendl. Menge $B \subseteq A$, so dass alle $x \in [B]^n$ äquiv. sind. Interpret. $c \in C_0$ durch $b_c \in B$ in entspr. Ordnung. Dann ist $(\mathfrak{M}, b_c)_{c \in C_0} \models T_{C_0, \Delta}$

<u>Kor</u> 5.9 Sei T abz. Th. mit unendl. Modellen, $\kappa \geq \aleph_0$. Dann hat T ein Modell $\mathfrak{M} \models T$, $|M| = \kappa$, in dem nur abz. viele Typen über jeder abz. Teilm. real. werden.

$\rightsquigarrow$ Wenn T κ-kat. ist für $\kappa > \aleph_0$, dann kann es nur abz. viele Typen über abz. Teilm. geben; denn es sollte ein Modell der Mächtigkeit κ geben, in dem <u>alle</u> Typen über abz. Teilm. ~~Teilm.~~ real. werden und andererseits gibt es das Modell aus 5.9.

· Im Folgenden sei T immer vollst. mit unendl. Modellen.

<u>Def</u> 5.10 Sei $\kappa \geq \aleph_0$. T heißt <u>κ-stabil</u>, wenn für alle $\mathfrak{M} \models T$, $A \subseteq M$, $|A| \leq \kappa$ gilt $|S_n(A)| \leq \kappa$.

<u>Bem</u>: Dann ist $|T| \leq \kappa$ (bis auf log. Äquiv.)

Es genügt 1-Typen zu zählen:

Lemma 5.11 T ist κ-stabil gdw $|S_1(A)| \leq \kappa$ für $|A| \leq \kappa$.

Bew: Wir zeigen $|S_n(A)| \leq \kappa$ für $|A| \leq \kappa$ durch Ind. über n.

Sei $\mathfrak{M}$ so, dass alle Typen über A in $\mathfrak{M}$ real. sind und betrachte die Einschr. $\pi : S_n(A) \to S_1(A)$. Nach Ann. ist $|S_1(A)| \leq \kappa$ und jedes $p \in S_1(A)$ ist von der Form $tp(a/A)$ für ein $a \in M$.

Blatt 5, Aufg 4 zeigt auch $\pi^{-1}(p)$ lässt sich bij. auf $S_{n-1}(aA)$ abbilden, d.h. auch die Fasern haben Mächtigkeit $\leq \kappa$ nach IV. $\Rightarrow |S_n(A)| \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa$.

Bsp 5.12 ACF_p ist κ-stabil für alle $\kappa \geq \omega$.

Bew: es genügt $\kappa = \omega$ zu beweisen (später)

Umgekehrt gilt: jeder ω-stab. Körper ist alg. abg.

Bew Sei $K \leq \tilde{K}$ ~~Unterkörper~~ körper. Wegen QE ist $tp(a/K)$ bestimmt durch den Isomorphietyp $K[a]/K$. Ist a transz. $/K$, dann ist $K[a] \cong K[X]$, sonst ist $K[a] \cong K[X]/(f)$ für $f = \text{minpol}(a/K)$.

D.h. es gibt einen 1-Typ für jedes irred. Polynom und zusätzl. den transz. Typ.

Satz 5.13 Eine abz. Th. T, die κ-kat. ist für $\kappa > \aleph_0$, ist ω-stabil.

Bew: Sei $\mathfrak{N} \models T$ mit $A \subseteq N$, $|A| \leq \aleph_0$, $|S(A)| > \aleph_0$.

Sei $(b_i)_{i \in J}$ Folge mit $|J| = \aleph_1$ von Elten mit pw. versch. Typen $/A$. (Wir können annehmen, alle Typen sind in $\mathfrak{N}$ real.) Dann sei $\mathfrak{M}_0 \preceq \mathfrak{N}$, $|M_0| = \aleph_1$ mit $b_i \in M_0$, $A \subseteq M_0$ und dann eine elem. Erw. $\mathfrak{M}_1 \succeq \mathfrak{M}_0$, $|M_1| = \kappa$. Dann sind in $\mathfrak{M}_1$ $\aleph_1$-viele Typen real. Nach 5.9 ex. auch ein Modell der

Mächtigkeit κ, indem nur $\aleph_0$-viele Typen real. sind }.

Def 5.14 Eine abz. Th. T heißt total transz., wenn es kein Modell M mit einem binären Baum von $L(M)$-Formeln gibt.

Bem: Es genügt würde 1-Formeln zu betrachten.

Satz 5.15 (i) ω-stabile Th. sind t.t.

(ii) Total transz. Th. sind κ-stabil für alle $\kappa \geq |T|$.

d.h. T abz.: ω-stabil gdw t.t.

Bew: (i) Sei M ein Modell mit bin. Baum kons. $L(M)$-Formeln. Sei A die Menge der in dem Baum vorkomm. Param. Dann ist $|A| \leq \aleph_0$, aber $|S_n(A)| = 2^{\aleph_0}$ (vgl. Satz 4.32 1)).

(ii) (wie 4.32 (iii)) Sei φ groß, falls $|[\varphi]| = \kappa$. Sei $|A| = \kappa$, $|S_n(A)| > \kappa$. Dann ex. große Formeln über A. Wenn φ groß ist, dann ex. wie im Bew. von 4.32 Typen $p \neq q$, die nur große Formeln enthalten. Dann können p, q durch große Formeln $\psi, \neg\psi$ getrennt werden, also zerlegen wir φ in $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \wedge \neg\psi$ und iterieren, um einen binär Baum zu erhalten.

Def 5.16 Sei $\kappa \geq \aleph_0$. Eine L-St. $\mathfrak{A}$ ist <u>κ-sat.</u>, wenn für alle $A_0 \subset A$, $|A_0| < \kappa$, alle 1-Typen über A_0 in $\mathfrak{A}$ real. sind.

$\mathfrak{A}$ heißt <u>saturiert</u>, wenn $\mathfrak{A}$ $|\mathfrak{A}|$-sat. ist.

Lemma 5.17 Sind $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}|$ beide satur., dann sind $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Bew: genau wie Satz 4.11 (iii) $\Rightarrow$ (i)

Wähle Aufzählungen $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$, $(b_\alpha)_{\alpha<\kappa}$, $\kappa = |\mathfrak{A}|$ und konstr. aufst. Kette von elem. Abb $f_\alpha: A_\alpha \to B_\alpha$

wobei $|A_\alpha| = |B_\alpha| < \kappa$

Lemma 5.18 Sei T κ-stabil, $\lambda \leq \kappa$ regulär, dann ex ein λ-sat Modell $\mathfrak{M} \models T$, $|\mathfrak{M}| = \kappa$.

Bew: OBdA $|T| \leq \kappa$, $\mathfrak{M} \models T$ mit $|\mathfrak{M}| = \kappa$.
Dann können wir wegen $|S(M)| = \kappa$ wie in Kor. 2.15 mit Löw-Sk. ein Modell $\mathfrak{M}_1 \succ \mathfrak{M}$ konstr., in dem alle Typen über M real. sind und mit $|\mathfrak{M}_1|_\kappa$,
Auf diese Weise bauen wir eine stetige Kette

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \prec \mathfrak{M}_1 \preceq \dots \mathfrak{M}_\alpha \prec \dots \quad (\alpha < \lambda)$$

von Modellen der Kard. κ. Dann ist $\mathfrak{M}' = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathfrak{M}_\alpha$
λ-sat: Ist $A \subseteq M'$, $|A| < \lambda$, $a \in A$, dann ex $\alpha(a)$ mit $a \in M_{\alpha(a)}$ und $A \subseteq \bigcup_{a \in A} M_{\alpha(a)}$. Weil λ reg. ist, ~~ex~~ ex ein $\mu < \lambda$ mit $\alpha(a) < \mu$ für alle $a \in A$, also $A \subseteq M_\mu$ und alle Typen über A sind in $\mathfrak{M}_{\mu+1}$ real.

p. 55b →

Wir wollen Primmodelle allg. untersuchen.
Primmod. nur für abz. T def. Nun allgemeiner

Def 5.19 Sei (T abz.) $\mathfrak{M} \models T$, $A \subseteq M$, $B \subseteq M$.
(i) $\mathfrak{M}$ ist Primerw. von A (prim über A), wenn jede elem. Abb. $A \to \mathfrak{N}$ sich zu $\mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ elem. forts. lässt

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{M} \arrow[r] & \mathfrak{N} \\ A \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(ii) B heißt konstruierbar über A, falls es eine Aufz. ~~Bei~~ der B gibt, $B = \{b_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$, so dass b_α atomar ist über $A \cup \{b_\mu \mid \mu < \alpha\}$.
dh. $tp(b_\alpha / A B_\alpha)$ ist isol. für $B_\alpha = \{b_\mu \mid \mu < \alpha\}$.

<u>Satz</u> 5.20 T abz. Dann ist T κ-kat.
gdw alle Modelle der Mächtigkeit κ sat. sind.

<u>Bew:</u> "$\Leftarrow$" Lemma 5.17
"$\Rightarrow$" Sei T κ-kat. Für $\kappa = \aleph_0$ ist das in 4.11 enthalten. Ist $\kappa \geq \aleph_1$, dann ist T ω-stabil und nach Satz 5.15 κ-stabil für alle $\kappa \geq \aleph_0$.
Nach Lemma 5.18 ex. ein μ^+-sat. Modell der Mächtigkeit κ, für jedes $\mu < \kappa$. Dann ist das Modell aber saturiert.

Ist A abz., dann ist $\mathfrak{M}$ prim über A gdw $\mathfrak{M}_A$ Primmodell von $Th(\mathfrak{M}_A)$ ist.

Lemma 5.20 Wenn $\mathfrak{M} \models T$ und konstr. über A ist, dann ist $\mathfrak{M}$ prim über A.

Bew: Sei $M = \{m_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ eine Aufz. mit m_α atomar über $A \cup M_\alpha$ und $f: A \to \mathfrak{N}$ elem. Wir def. induktiv eine elem. Abb. $\hat{f}: \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$, die f fortsetzt.
Sei $f_\beta: A \cup M_\beta \to \mathfrak{N}$ bereits def. für $\beta < \alpha$.
Dann ist $\bigcup_{\beta < \alpha} f_\beta = f'_\alpha : A \cup M_\alpha \to \mathfrak{N}$ elementar.
Weil $p(x) = tp(m_\alpha / A \cup M_\alpha)$ isol. ist, ex eine Real. b des isol. Typen $f'_\alpha(p)$. Setze $f_\alpha = f'_\alpha \cup \{(a_\alpha, b)\}$.
Dann ist $\bigcup f_\alpha : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ elementar.

Wir zeigen später, dass für tot. transz. Th. Primerw. atomar sind.

Satz 5.21 Ist T tot. transz., dann hat jede Teilm. eines Modells eine konstr. Primerw.

Bem: In tot. transz. Th. sind Primerw eind. bis auf Isom. (Shelah).

Wir brauchen
Lemma 5.22 Ist T tot. trans., dann sind die isol. Typen über jeder Teilm. eines Modells dicht.

Bew: Sei $A \subseteq M$ für $\mathfrak{M} \models T$. Dann hat $Th(\mathfrak{M}_A)$ keinen bin. Baum und nach Satz 4.32 (ii) sind die isol. Typen dicht.

Bew (Satz 5.21) Nach Lemma 5.20 genügt es, eine elem. $\mathfrak{M}_0 \prec \mathfrak{M}$ mit $A \subset \mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_0$ konstr. über A zu bauen.

Mit Zorns Lemma finden wir eine max. Konstr. $(a_\kappa)_{\kappa<\lambda}$, die sich auf kein $a_\lambda \in M \setminus A_\lambda$ verlängern lässt. Offens. ist $A \subseteq A_\lambda$. Es genügt also z.z., dass A_λ Träger einer elem. Unterstr. $\mathfrak{M}_0$ ist.

Mit Tarskis Test: Sei $\varphi(x)$ eine $L(A_\lambda)$-Formel, $\mathfrak{M} \models \exists x\, \varphi(x)$. Weil die isol. Typen über A_λ dicht liegen, ex. isol. Typ $p(x) \in S(A_\lambda)$ mit $\varphi(x) \in p(x)$. Sei $b \in M$ Realis. von $p(x)$. Dann können wir die Konstruktion auf $a_\lambda = b$ forts. Wegen der Maxim. ist $b \in A_\lambda$ und $\varphi(x)$ in A_λ real. $\square$

Wir brauchen noch folgendes Lemma:

<u>Lemma</u> 5.23 Für $a, b \in \mathfrak{M}$ gilt $t(ab)$ ist atomar gdw $tp(a/b)$ und $tp(b)$ atomar

<u>Bew</u>: "$\Rightarrow$" Sei $tp(ab)$ isol. durch $\varphi(xy)$, dann isol $\varphi(xb)$ den Typ $tp(a/b)$ wie im Bew von 4.25, dass abz. atom. Modelle prim sind.

<u>Beh</u> $\exists x\, \varphi(x,y)$ isol. $tp(b) = p(y)$. Offens. ist $\exists x\, \varphi(x,y) \in p(y)$ und für $\sigma(y) \in p(y)$ ist

$$\mathfrak{M} \models \forall xy\, (\varphi(x,y) \to \sigma(y)).$$

Also gilt $\mathfrak{M} \models \forall y\, (\exists x\, \varphi(x,y) \to \sigma(y))$.

"$\Leftarrow$" Sei $tp(a/b)$ isol. von $\rho(x,b)$ und $tp(b)$ isol. von $\sigma(y)$. Dann ist $tp(ab)$ isol. durch $\rho(xy) \wedge \sigma(y) \in tp(ab)$:

Ist $\varphi(x,y) \in tp(a,b)$, dann ist $\varphi(x,b) \in tp(a/b)$ und

$$\mathfrak{M} \models \forall x\, (\rho(x,b) \to \varphi(x,b))$$

Also ist $\forall x\, (\rho(x,y) \to \varphi(x,y)) \in tp(b)$ und daher

$$\mathfrak{M} \models \forall y\, (\sigma(y) \to \forall x\, (\rho(x,y) \to \varphi(x,y))).$$

Daher gilt $\mathfrak{M} \models \forall x,y\, (\rho(x,y) \wedge \sigma(y) \to \varphi(x,y))$. $\square$

Kor 5.24 Konstruierbare Erw. sind atomar.

Bew: Sei $\mathfrak{M}$ konstr. über A und $\bar{a} \subseteq M$. Z.z. ist $\bar{a}$ atomar über A, d.h. $tp(\bar{a}/A)$ isol.

O.B.d.A. $\bar{a} \notin A$ und $\bar{a} = a_\alpha \bar{b}$ mit $\bar{b} \in A_\alpha$.

Sei $\varphi(x, \bar{c})$ die $L(A_\alpha)$-Formel, die $tp(a_\alpha / A_\alpha)$ isol. Dann ist a_α atomar über $A \cup \{\bar{b}\bar{c}\}$. Nach Ind. ist $\bar{b}\bar{c}$ atomar über A und nach Lemma 5.23 (angew. auf $\mathfrak{M}_A$) ist $a_\alpha \bar{b}\bar{c}$ atom. über A, also auch $\bar{a} = a_\alpha \bar{b}$ atomar über A.

Kor 5.25 Wenn T tot. transz. ist, dann sind Primerw. atomar.

Bew Sei $\mathfrak{M} \models T$, $A \subseteq M$. Weil A eine konstr. Erw $\mathfrak{M}_0$ hat und Primerw. in $\mathfrak{M}_0$ einbettbar sind, sind Primerw. also atomar.

Bem 5.26 Sei $\mathfrak{M} \models T$, $A \subset M$. Dann sei $\mathfrak{M}$ minimal über A, wenn es keine echte elem. Unterstr. von $\mathfrak{M}$ A enthält. Wenn A eine minim. Erw und eine Primerw. hat, dann sind diese isom. <u>über A</u>, denn die Primerw. bettet über A in die min. Erw. ein.

Satz 5.27 (Lachlan) Sei T tot. transz., $\mathfrak{M} \models T$ überabz. Dann hat $\mathfrak{M}$ bel. große elem. Erw., die jede abz. Formelmenge vermeiden, die in $\mathfrak{M}$ vermieden wird.

Bew: Für den Bew. nennen wir $L(M)$-Formel $\varphi(x)$ groß, wenn $\varphi(\mathfrak{M}) = \{b \in M \mid \mathfrak{M} \models \varphi(b)\}$ überabz. ist.

Weil es keinen bin. Baum gibt, ex. eine Formel $\varphi_0(x)$, so dass für jede $L(M)$-Formel $\psi(x)$ entweder $\varphi_0(x) \wedge \psi(x)$ oder $\varphi_0(x) \wedge \neg\psi(x)$ abz. ist.

Dann ist $p(x) = \{\psi(x) \mid \varphi_0(x) \wedge \psi(x) \text{ groß}\} \in S(M)$.

Weil $\ulcorner x = a \urcorner \notin p(x)$ für $a \in M$, ist $p(x)$ nicht in $\mathfrak{M}$ real. Aber jede abz. Teilm. $\Sigma_i(x) \subseteq p(x)$ ist in $\mathfrak{M}$ real: $\varphi_0(\mathfrak{M}) \setminus \psi(\mathfrak{M})$ ist abz. für $\psi \in \Sigma_i'(x)$, also ist $\Sigma_i'(x)$ in $\mathfrak{M}$ real. durch

$$b \in \varphi_0(\mathfrak{M}) \setminus \bigcup_{\psi \in \Sigma'} (\varphi_0(\mathfrak{M}) \setminus \psi(\mathfrak{M})).$$

Sei nun $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$ mit $a \in N$ Realis. von $p(x)$. Nach Satz 5.21 können wir OBdA $\mathfrak{N}$ atomar über $M \cup \{a\}$ ann.

Sei $b \in N$. Es genügt z.z. jede abz. Teilm. $\Sigma(y) \subseteq tp(b/M)$ ist in M real. Dann folgt, dass $\mathfrak{N}$ keine neuen abz. Mengen von $L(M)$-Formeln erfüllt. Durch Iterieren erhalten wir bel. große Modelle mit dieser Eigenschaft.

Sei also $\chi(x,y)$ eine $L(M)$-Formel, so, dass

$\chi(a,y)$ den Typ $q(y) = tp(b/Ma)$ isol.

Wenn b eine $L(M)$-Formel $\sigma(y)$ real., dann gilt $\mathfrak{M} \models \forall y(\chi(a,y) \to \sigma(y))$, d.h. $\bar\sigma(y) \leftrightarrow \forall y(\chi(x,y) \to \sigma(y)) \in p(x)$

sei $a' \in M$ Realis. von

$$\{\bar\sigma(x) \mid \sigma \in \Sigma\} \cup \{\exists y\, \chi(x,y)\} \text{ und}$$

sei $b' \in M$ mit $\mathfrak{M} \models \chi(a',b')$.

Wegen $\mathfrak{M} \models \bar\sigma(a')$ gilt $\mathfrak{M} \models \sigma(b')$, d.h. b' real. $\Sigma(y)$.

<u>Morley abwärts</u>

<u>Kor</u> 5.28 Ist T abz., κ-kat., $\kappa \geq \aleph_1$, dann ist T $\aleph_1$-kat.

<u>Bew:</u> Ist T nicht $\aleph_1$-kat, dann hat T ein Modell $\mathfrak{M}$ mit $|\mathfrak{M}| = \aleph_1$ und nicht sat. Dann ex. ein Typ über einer abz. Menge $A \subset M$, der nicht in $\mathfrak{M}$ real. ist. Weil T tot. transz. ist, ex $\mathfrak{N} \succeq \mathfrak{M}$, $|\mathfrak{N}| = \kappa$, das p vermeidet.

Dann ist $\mathfrak{N}$ nicht sat. und daher T nicht κ-kat. ↯ Satz 5.20

Ziel: Satz von Morley allgemein

Finde eine Dimension, die die Modelle bis auf Isomorphie festlegt. Sei T abz. vollst. mit unendl. Modellen.

Def 5.29 T hat ein Vaught'sches Paar, wenn es Modelle $\mathfrak{M} \precneqq \mathfrak{N}$ und $L(M)$-Formel $\varphi(x)$ gibt mit $\varphi(\mathfrak{M})$ unendl und $\varphi(\mathfrak{M}) = \varphi(\mathfrak{N})$.

Wenn φ keine Param. enthält, dann sagen wir, dass T ein Vaught'sches Paar $\mathfrak{M} \precneqq \mathfrak{N}$ für φ hat.

Bem 5.30: T hat kein Vaught. Paar gdw für jedes $\mathfrak{M} \models T$ und jede $L(M)$-Formel $\varphi(x)$ mit $\varphi(\mathfrak{M})$ unendl das Modell $\mathfrak{M}$ min. Erw. von $\varphi(\mathfrak{M}) \cup A$ ist für φ in $L(A)$. (vgl. Bem 5.26)

Ziel

Satz von Baldwin-Lachlan: $\kappa \geq \aleph_1$. Dann ist T κ-kat. gdw T ω-stabil und ohne Vaught. Paar.

($\Rightarrow$ Satz von Morley)

"$\Rightarrow$" eigentlich klar, "$\Leftarrow$" Strukturtheorie

Bem: Sei $\mathfrak{N} \models T$, $\varphi(\mathfrak{N})$ unendl, $|\varphi(\mathfrak{N})| < |\mathfrak{N}|$.

Dann ex. nach Löw-Sk. ein $\mathfrak{M} \precneqq \mathfrak{N}$ mit $|\mathfrak{M}| = |\varphi(\mathfrak{N})|$ und $\varphi(\mathfrak{M}) = \varphi(\mathfrak{N})$, also V.P. für φ.

Nun die Umkehrung

Satz 5.31 (Vaughts 2-Kard.zahl-Satz) Wenn T ein V.P. hat, dann ex $\overline{\mathfrak{M}} \models T$, $|\overline{\mathfrak{M}}| = \aleph_1$ und $\varphi(\overline{\mathfrak{M}})$ abz. für ein $\varphi \in L(\overline{M})$.

Für den Bew. brauchen wir

<u>Lemma</u> 5.32 Sei T abz., vollst. mit unendl. Modellen.

i) Jedes abz Modell von T hat abz., ω-homog. elem. Erw.

ii) Die Vereinig. einer elem. Kette von ω-homog. Modellen ist ω-homog.

(iii) Sind $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models T$ ω-homog, abz. und realis. dies. n-Typen für alle $n < \omega$, dann gilt $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$.

<u>Bew</u>: i) Sei $\mathfrak{M}_0 \models T$ abz und sei $\mathfrak{M}_0 \preccurlyeq \mathfrak{M}_1$, derart, dass $\mathfrak{M}_1$ abz und in $\mathfrak{M}_1$ sind die abz. vielen Typen $\{ f(tp(a/A)) \mid a, A \subseteq M_0, A \text{ endl.}, f: A \to M_0 \text{ elem} \}$. real. Durch Iterieren erhalten wir elem. Kette

$$\mathfrak{M}_0 \preccurlyeq \mathfrak{M}_1 \preccurlyeq \ldots \quad \text{mit } \bigcup \mathfrak{M}_i \ \ \omega\text{-homog.}$$

ii) Klar

iii) Wir konstr. den Isom. $\mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ durch back-and-forth. Sei $f_i: \{a_1, .. a_i\} \to \{b_1, .. b_i\}$, $a_i \mapsto b_i$ gegeben, $a \in A \setminus A_i$. Dann sei $\bar{b}' = b_1' \ldots b_{i+1}' \in N$ Realis. von $tp(a_1, .. a_i, a)$. Wegen der ω-Homog. von $\mathfrak{N}$ können wir $g = \{(b_j', b_j) \mid 1 \leq j \leq i\}$ auf (b'_{i+1}, b) forts. für ein $b \in N$. Dann ist $f_{i+1} = f_i \cup \{(a, b)\}$ die gesuchte Forts. Entspr. mit umgekehrten Rollen im nächsten Schritt.

<u>Bew</u> von 5.31: Sei $\varphi(x)$ eine Formel mit V.P., o.B.d.A enthält φ keine Param. Sei P ein neues einstell. Rel.symbol und T_{VR} die $L(P)$-Th., deren Modelle $(\mathfrak{N}, M)$ mit $\mathfrak{N} \models T$, $M = P(\mathfrak{N})$ und $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$, so dass $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$ ein V.P für $\varphi(x)$ ist.

Mit Löw-Sk. angew. auf T_{VP} erhalten wir ein V.P. $\mathfrak{M}_0 \prec \mathfrak{N}_0$ für $\varphi(x)$ mit $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{N}_0$ abz.

Nun konstr. wir elem. Kette

$$(\mathfrak{N}_0, \mathfrak{M}_0) \prec (\mathfrak{N}_1, \mathfrak{M}_1) \prec \dots \quad \text{abz. VP so, dass}$$

$(\mathfrak{N}, \mathfrak{M}) = \bigcup (\mathfrak{N}_i, \mathfrak{M}_i)$ ω-homog. in beiden Komp. ist und so, dass $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}$ dieselben n-Typen real:

(Wenn $(\mathfrak{N}_i, \mathfrak{M}_i)$ gegeben ist, wähle abz. elem. Erw. $(\mathfrak{N}', \mathfrak{M}')$ so, dass $\mathfrak{M}'$ alle n-Typen aus $\mathfrak{N}_i$ real. Dann wählen wir mit 5.30 i) eine abz. elem. Erw $(\mathfrak{N}_{i+1}, \mathfrak{M}_{i+1})$ von $(\mathfrak{N}', \mathfrak{M}')$ so dass $\mathfrak{N}_{i+1}, \mathfrak{M}_{i+1}$ ω-homog. sind.

Nach 5.30 iii) sind dann $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}$ isom.

Nun konstr. stetige elem. Kette

$$\mathfrak{M}^0 \prec \mathfrak{M}^1 \prec \dots \prec \mathfrak{M}^\alpha \prec \dots, \quad \alpha < \omega_1$$

mit $(\mathfrak{M}^{\alpha+1}, \mathfrak{M}^\alpha) \cong (\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$ für $\alpha < \omega$: Setze $\mathfrak{M}^0 = \mathfrak{M}$.
Ist $\mathfrak{M}^\alpha$ schon konstr., wähle Isom $f: \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}^\alpha$ und setze fort zu $\mathfrak{N} \to \mathfrak{M}^{\alpha+1}$. Für $\lambda < \omega_1$ Limeszahl setze $\mathfrak{M}^\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathfrak{M}^\alpha$. Dann ist $\mathfrak{M}^\lambda \cong \mathfrak{M}$ nach 5.30 ii) + iii).
Setze $\bar{\mathfrak{M}} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathfrak{M}^\alpha$. Dann ist $|\bar{\mathfrak{M}}| = \aleph_1$ und

$$\varphi(\bar{\mathfrak{M}}) = \varphi(\mathfrak{M}^\alpha) = \varphi(\mathfrak{M}^0) \text{ ist abz.}$$

<u>Kor</u> 5.33 Ist T κ-kat. für ein $\kappa \geq \aleph_1$, dann hat T kein V.P. (und ist ω-stabil nach Satz 5.13)

<u>Bew</u>: Wenn T ein VP hat, dann ex $\mathfrak{M} \models T$, $|\mathfrak{M}| = \aleph_1$ und $\varphi(x) \in L(\mathfrak{M})$ mit $\varphi(\mathfrak{M})$ abz. Ist T κ-kat. für ein $\kappa \geq \aleph_1$, dann auch $\aleph_1$-kat. nach Morley abw. Dann sind aber alle Modelle der Mächtigkeit $\aleph_1$ sat. und daher $|\varphi(\mathfrak{M})| = \aleph_1$ $\lightning$.

<u>Kor</u> 5.34 Sei T κ-kat. für ein $\kappa > \aleph_0$, $\mathfrak{M} \models T$, $\bar{a} \subseteq M$ Tupel $\varphi(\mathfrak{M}, \bar{a})$ unendl. Dann ist $\mathfrak{M}$ die (bis auf Isom. eind.) Primerw. von $\bar{a} \cup \varphi(\mathfrak{M}, \bar{a})$.

<u>Bew</u>: Nach Kor 5.34 hat T kein V.P., daher ist $\mathfrak{M}$ min. über $\bar{a} \cup \varphi(\mathfrak{M}, \bar{a})$. Weil T ω-stabil ist, ex auch eine Primerw über $\bar{a} \cup \varphi(\mathfrak{M}, \bar{a})$ und diese sind nach Bem 5.26 isom. (über $\varphi(\mathfrak{M}, \bar{a}) \cup \bar{a}$).

<u>Def</u> 5.35 Eine Th. T elim. den Quantor $\exists^\infty x$, wenn es für jede Formel $\varphi(x, \bar{y})$ eine ~~nat~~ $n_\varphi \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $\mathfrak{M} \models T$, $\bar{a} \in M$ mit $|\varphi(\mathfrak{M}, \bar{a})| > n_\varphi$ gilt $\varphi(\mathfrak{M}, \bar{a})$ unendl.

<u>Bem</u>: M. a. W für alle Formeln $\varphi(x, \bar{y})$ ex $\psi(\bar{y})$ mit

$$\mathfrak{M} \models \exists^\infty x\, \varphi(x, \bar{a}) \text{ gdw } \mathfrak{M} \models \psi(\bar{a})$$

für alle $\mathfrak{M} \models T$, $\bar{a} \in M$.

$$T \vdash \forall y\, (\exists^\infty x\, \varphi(x, \bar{y}) \Leftrightarrow \psi(y))$$

<u>Bew</u>: Wenn n_φ ex, ex. auch $\psi(\bar{y})$. Wenn $\psi(y)$ von

$\exists^\infty x\, \varphi(x, \bar{y})$ implic. wird, dann ex n_φ aus Kompk. gründen.

<u>Lemma</u> 5.36 Wenn T kein V.P. hat, dann elim. T $\exists^\infty x$.

<u>Bew</u>: sei $\varphi(x, \bar{y})$ gegeben. P ein neues 1-stel. Rel. symbol, $c_1, .. c_n$ neue Konst. und T^* die $L(P, c_1, .. c_n)$-Theorie, deren Modelle von der Form $(\mathfrak{M}, N, a_1, .. a_n)$ mit $\mathfrak{M} \models T$, $\mathfrak{N} \preceq \mathfrak{M}$, $N = P(\mathfrak{M})$, $\bar{a} \subseteq N$ und $\varphi(\mathfrak{M}, \bar{a}) \subseteq N$. Ang. es gibt kein n_φ wie gewünscht. Dann gibt es für alle n ein Modell $\mathfrak{N} \models T$, $\bar{a} \in N$ mit $n < |\varphi(\mathfrak{N}, \bar{a})| < \omega$.

Sei $\mathfrak{M} \not\cong \mathfrak{N}$. Dann gilt $\varphi(\mathfrak{M}, \bar{a}) = \varphi(N, \bar{a})$ und

$(\mathfrak{M}, N, \bar{a}) \models T^*$. Daher ist $T^* \cup \{\exists^{>n} x\, \varphi(x, \bar{c}) \mid n < \omega\}$ endl. erf. und ein Modell ~~obiger~~ dieser Theorie gibt ein V.P für T.

<u>Def</u> 5.37 (i) Sei $\mathfrak{M}$ eine L-Str., $A \subseteq M$. Eine Formel $\varphi(x) \in L(A)$ heißt <u>algebraisch</u>, wenn $\varphi(\mathfrak{M})$ endl. ist, und $a \in M$ heißt alg. $/A$, wenn es eine alg. $L(A)$-Formel $\varphi(x)$ gibt mit $\mathfrak{M} \models \varphi(a)$.

(ii) Der alg. Abschluss von A, $\mathrm{acl}(A) = \{b \in M \mid b \text{ alg } /A\}$. A heißt alg. abg., falls $A = \mathrm{acl}\, A$.

<u>Lemma 5.39</u>

<u>Bem</u>: (i) Ist $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$, dann ist $\mathrm{acl}^{\mathfrak{M}}(A) = \mathrm{acl}^{\mathfrak{N}}(A)$, weil eine alg. $L(A)$-Formel in elem. Erw. dieselbe Menge def.

Insbes. ist $\mathfrak{M}$ alg. abg. (in $\mathfrak{N}$).

(ii) Es gilt $|\mathrm{acl}(A)| \leq \max(|T|, |A|)$

(iii) In alg. abg. Körpern gilt: a ist alg. A gdw. ...

<u>Def</u> 5.37 (iii) $p(x) \in S(A)$ heißt alg. wenn $p(x)$ eine alg. Formel enthält.

Jeder alg. Typ ist isoliert, durch eine Formel φ_p und wir setzen $\deg(p) = |\varphi_p(\mathfrak{M})|$.

Die alg. Typen sind in jedem Modell real. und von der Form $tp(a/A)$ mit a alg $/A$.

<u>Lemma</u> 5.38 Ist $p \in S(A)$ nicht-alg., $A \subseteq B$, dann hat p eine nicht-alg. Forts. $q \in S(B)$

<u>Bew</u>: Die $q_0(x) = p(x) \cup \{\neg\psi(x) \mid \psi \text{ alg. } L(B)\text{-Formel}\}$ ist endl. erfüllbar, denn sonst ex. alg. $L(B)$-Formeln $\psi_1, \dots, \psi_n$ mit $\mathfrak{M} \models \forall x(\varphi(x) \to (\psi_1 \vee \dots \vee \psi_n)(x))$ für ein $\varphi \in p$. Aber dann ist φ alg. $\lightning$.

Nun lässt sich q_0 zu einem vollst. Typ fortsetzen. $\square$

Lemma 5.39 Seien $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ L-Str., $f: A \to B$ elem. Bij, $A \subseteq M$, $B \subseteq N$. Dann lässt sich f fortsetzen zu einer elem. Bij. $\tilde{f}: acl(A) \to acl(B)$.

Bew: Sei $g: A' \to B'$ eine max. Forts. von f mit $A' \subseteq acl(A)$, $B' \subseteq acl(B)$, $a \in acl(A)$. Weil a alg/A' ist, ist a atomar/A'. Daher können wir den isol. Typ $g(tp(a/A'))$ in $\mathfrak{N}$ durch ein $b \in acl(B)$ real. und g auf (a,b) forts., d.h. $a \in A'$, $b \in B'$. Um zu sehen, dass g surj. ist, vertausche die Rollen von A, B.

Mit Hilfe von acl ergeben sich Geometrien in $\aleph_1$-kat. Th., aus denen wir einen Dimbegriff erhalten.

Def 5.40 Sei $\mathfrak{M} \models T$, T vollst mit unendl. Modellen, $\varphi(\bar{x})$ nicht-alg. $L(M)$-Formel.

(i) $\varphi(\mathfrak{M})$ heißt <u>minimal in $\mathfrak{M}$</u>, wenn für alle $L(M)$-Fos $\psi(\bar{x})$ $\varphi(\mathfrak{M}) \wedge \psi(\mathfrak{M})$ oder $\varphi(\mathfrak{M}) \wedge \neg\psi(\mathfrak{M})$ endl. ist. (Wir sagen '$\psi(\mathfrak{M})$ ist endl. oder ko-endl. in $\varphi(\mathfrak{M})$'.)

(ii) $\varphi(\bar{x})$ ist <u>str. min</u>, wenn $\varphi(\bar{x})$ in jeder elem. Erw. von $\mathfrak{M}$ eine min. Menge def.
Dann nennen wir auch $\varphi(\mathfrak{M})$ str. min.
Ist $p \in S(M)$ ein nicht-alg. Typ, der eine str. min. Formel enthält, dann heißt p str. min.

(iii) Eine Th. T heißt str. min., wenn $\ulcorner x = x \urcorner$ str. min ist.

<u>Bem:</u> Wenn $A \subseteq \mathfrak{M}^k$, $B \subseteq \mathfrak{M}^m$ def, und es ex eine def. Bij. $A \to B$, dann gilt A str. min gdw B str. min.

5.41 <u>Bsp:</u> T_{inf}, T_{KVR}, T_{acfp} str. min.

<u>Zilber-Verm:</u> Das sind alle. Stimmt nicht.

Ist $K \models T_{acfp}$, $a \in K^*$, $b \in K$, $\ulcorner a x_1 + b = x_2 \urcorner \subseteq K^2$ ist str. min., weil es def. Bij mit K gibt.

<u>Bem:</u> Sei $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ str. min., $\bar{a} \in \mathfrak{M}$. Dann ist $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ str. min. für jedes Modell $\mathfrak{N}$, $\bar{b} \in \mathfrak{N}$ mit $tp(\bar{a}) = tp(\bar{b})$:

$\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ ist str. min gdw für alle L-Form. $\psi(\bar{x}, \bar{z})$

$$\Sigma_\psi(\bar{z}, \bar{a}) = \{ \exists^{>k} \bar{x}\ \varphi(\bar{x}, \bar{a}) \wedge \psi(\bar{x}, \bar{z}) \wedge \exists^{>k} \bar{x}\ \varphi(x, \bar{a}) \wedge \neg \psi(\bar{x}, z) \mid k \in \mathbb{N} \}$$

in keiner elem. Erw. real. werden kann.

D.h. für jede Formel $\psi(\bar{x}, \bar{z})$ ex. k_ψ mit

$$\mathfrak{M} \models \forall z (\exists^{\leq k_\psi} x\ (\varphi(x, \bar{a}) \wedge \psi(x, z)) \vee \exists^{\leq k_\psi} x\ (\varphi(\bar{x}, a) \wedge \neg \psi(x, z)))$$

Dies ist eine elem. Eigenschaft von $\bar{a}$, die in $tp(\bar{a})$ ausgedrückt wird.

Daher können wir sagen $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ ist str. min. (unabh. von Modell).

<u>Lemma</u> 5.42 Ist $\mathfrak{M}$ ω-sat, oder wenn T $\exists^\infty x$ elim., dann ist jede min. Formel str. min.

Ist T tot. transz., dann enthält jede unendl. defb. Menge $A \subseteq M^n$ eine minimale Teilmenge.

<u>Bew</u>: Wenn $\mathfrak{M}$ ω-sat, $\varphi(x,\bar a)$ nicht str. min, dann ex L-Formel $\psi(x,z)$ mit $\Sigma_\psi(z,a)$ in $\mathfrak{M}$ real., d.h. φ ist nicht min.

Ist $\varphi(x,a)$ min und T elim $\exists^\infty x$, dann gibt für alle L-Formeln $\psi(x,z)$

$$\neg(\exists^\infty x\,(\varphi(x,a)\wedge\psi(x,z))\wedge\exists^\infty x\,(\varphi(x,a)\wedge\neg\psi(x,z))).$$

eine elem. Eigensch. von z.

Wenn $\varphi_0(\mathfrak{M})$ keine min. Menge enthält, konstr. wir einen binären Baum ξ tot. transz.

<u>Lemma</u> 5.43 $\varphi(\mathfrak{M})$ ist minimal gdw es genau einen nicht-alg. Typ $p\in S(M)$ gibt, der $\varphi(x)$ enthält.

<u>Bew</u>: Ist $\varphi(\mathfrak{M})$ min., dann ist

$$p=\{\psi(x)\in L(M)\mid \varphi\wedge\neg\psi \ \text{ alg}\}$$

der eind. nicht-alg. Typ, der $\varphi(x)$ enthält.

Ist $\varphi(\mathfrak{M})$ nicht min., dann ex. L-Formel ψ mit $\varphi\wedge\psi$, $\varphi\wedge\neg\psi$ nicht-alg. und beide lassen sich nach Lemma 5.38 zu nicht-alg Typen forts.

<u>Kor</u> 5.44 Ein str. min Typ $p\in S(A)$ hat eine eind. nicht-alg. Forts. $q\in S(B)$ für jedes $B\supseteq A$, $B\subseteq M\preceq\mathfrak{M}$.

Daher ist der Typ von m Real. $a_1,\dots a_m$ von p mit $a_i\notin acl(a_1,\dots a_{i-1},A)$, $i=1,\dots m$, eind. best.

<u>Bew</u>: Ex. ist klar, Eind. folgt aus 5.43 und Induktion.

<u>Def</u> 5.45 Eine Prägeometrie (oder Matroid) (X, cl) ist eine Menge X mit einem Abschl. operator $cl: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, so dass für alle $a, b \in X$, $A \subseteq X$

(i) (Refl.) $A \subseteq cl(A)$

(ii) (endl. bas) $$cl(A) = \bigcup_{\substack{A' \subseteq A \\ \text{endl.}}} cl(A')$$

(iii) (Trans.) $cl(cl(A)) = cl(A)$

(iv) (Aust.) $a \in cl(Ab) \setminus cl(A) \Rightarrow b \in cl(Aa)$.

<u>Bsp</u>: (i) $cl(A) = A$ triv.

(ii) X K-VR, $cl(A) = \langle A \rangle_K$

(iii) X K Körper mit Primkörper F
$cl(A) = F(A)^{alg} \cap K$

<u>Bem</u>: Eine Menge A heißt cl-abg., wenn $A = cl(A)$, d.h. $cl(A)$ ist die kleinste cl-abg. Menge, die A enthält.

<u>Lemma</u> 5.46 Ist $\mathcal{M}$ eine L-Str., dann ist acl ein Abschl. op., der (i), (ii) und (iii) erfüllt.

<u>Bew</u>: (i), (ii) sind klar.

Für iii) sei $c \in acl(b_1, .. b_n)$, $b_i \in acl(A)$, $i = 1, .., n$. Seien $\varphi(x, \bar{b}) \in tp(c/\bar{b})$ alg., und $\varphi_i(y) \in tp(b_i/A)$ alg., $|\varphi(\mathcal{M}, \bar{b})| \leq k$. Dann ist
$$\exists y_1 .. y_n \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(b_i) \wedge \exists^{\leq k} z\, \varphi(z, y_1 .. y_n) \wedge \varphi(x, y_1 .. y_n) \right)$$
eine alg. Formel im $tp(c/A)$.

<u>Satz</u> 5.47 Ist $\varphi(x)$ eine str. min. L-Formel in $\mathcal{M}$, dann def $cl: \mathcal{P}(\varphi(\mathcal{M})) \to \mathcal{P}(\varphi(\mathcal{M}))$
$$cl(A) = acl(A) \cap \varphi(\mathcal{M})$$

eine Prägeom. auf $\varphi(\mathfrak{M})$.

Bew: Es genügt, die Austausch bed. zu verifiz.

Sei $a \in \varphi(\mathfrak{M}) \setminus \mathrm{acl}(A)$, $b \in \varphi(\mathfrak{M}) \setminus \mathrm{acl}(Aa)$. Wir müssen zeigen: $a \notin \mathrm{acl}(Ab)$. Nach Kor. 5.44 ist der Typ von solchen Paaren (a,b) eind., etwa $p(x,y) \in S(A)$

Sei $A' \subseteq \varphi(\mathfrak{M}) \setminus \mathrm{acl}(A)$ unendl. Menge und $b' \notin \mathrm{acl}(A'A)$.

Dann haben alle $a' \in A'$ denselben Typ über $b'A$

d.h. kein a' ist alg. / $b'A$. Daher ist $a \notin \mathrm{acl}(Ab)$.

Bem: Derselbe Beweis fkt für min. Typen, d.h. Typen, die eind. nicht-alg. Forts. auf Obermengen haben.

<u>Einige Eigenschaften von Prägeom.</u>

<u>Def</u> 5.48 Sei (X, cl) eine Prägeom., $A \subseteq X$.

(i) A ist unabh., falls $a \notin cl(A \setminus \{a\})$ für alle $a \in X$

(ii) A ist Erz.menge, falls $X = cl(A)$

(iii) A ist Basis, falls A unabh. Erz.menge ist

<u>Lemma</u> 5.49 Sei (X, cl) Prägeom., $E \subseteq X$ Erz.menge.

Dann kann jede unabh. Teilm. von E zu einer Basis $A \subseteq E$ erw. werden. Insbes. hat jede Prägeom. eine Basis.

<u>Bew</u>: Sei $B \subseteq E$ unabh. Ist $x \in X \setminus cl(B)$, dann ist $B \cup \{x\}$ unabh., denn für $b \in B$ ist $b \notin cl(B \setminus \{b\})$, also $b \notin cl((B \setminus \{b\}) \cup \{x\})$ wegen der Aust. eigensch.

Daher gilt für jede max. unabh. Teilm. $B \subseteq E$ auch

$E \subseteq cl(B) \Rightarrow cl(E) = X$ und B ist Basis.

<u>Lemma</u> 5.50 Alle Basen einer Prägeom. haben dieselbe Mächtigkeit

<u>Bew</u>: Sei A unabh., B Erz.menge für (X, cl).

Es genügt zz. $|A| \leq |B|$. Wenn A unendl. ist, erw. wir A zu einer Basis A'. Für jedes $b \in B$ sei $A_b \subseteq A'$ endl. mit $b \in cl(A_b)$. Dann ist wegen der Trans. auch $\bigcup_{b \in B} A_b \subseteq A'$ eine Erz.menge, also gilt $A' = \bigcup A_b$ und $|A^*| \leq |A'| \leq |B|$.

Ist A endl., dann folgt $|A| \leq |B|$ wegen:
Für $a \in A \setminus B$ ex $b \in B \setminus A$ mit $A' = \{b\} \cup A \setminus \{a\}$ unabh.
Denn wegen $a \in cl(B)$, kann nicht $B \subseteq cl(A \setminus \{a\})$ gelten. Sei also $b \in B \setminus cl(A \setminus \{a\})$. Dann ist A' unabh.

<u>Def</u> 5.51 Ist (X, cl) eine Prägeom., dann ist
$$\dim(X) = |B| \text{ für } B \text{ eine Basis.}$$

Ist $\varphi(x)$ str. min., $\mathcal{M} \models T$, dann ist die φ-Dim. von $\mathcal{M}$ def. als die Dim. von $(\varphi(\mathcal{M}), cl)$

Ist $\varphi(x) \in L(A_0)$, $A_0 \subseteq M$, (also 'φ def. $/A_0$'), dann def. wir den Abschl.op. ~~auf~~ $\varphi(\mathcal{M}_{A_0})$ durch
$$cl(A) = acl(A_0 \cup A) \cap \varphi(\mathcal{M}) \quad \text{und}$$
$\dim \varphi(\mathcal{M}/A_0) = \dim \varphi(\mathcal{M}_{A_0})$ heißt die φ-Dim von $\mathcal{M}$ über A_0.

<u>Lemma</u>. 5.52 Sei $\varphi(x)$ str. min, def. über A_0 und seien $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$, $A_0 \subseteq M, N$. Dann ex. eine A_0-elem. ~~Bij.~~ zwischen $\varphi(\mathcal{M}_{A_0})$ und $\varphi(\mathcal{N})$ gdw. $\dim \varphi(\mathcal{M}_{A_0}) = \dim \varphi(\mathcal{N}_{A_0})$

<u>Bew</u>: Eine A_0 elem. Bij. $\varphi(\mathcal{M}) \to \varphi(\mathcal{N})$ bildet Basen auf Basen ab, also gilt "$\Rightarrow$"
Für die andere Richtung seien $U \subseteq \varphi(\mathcal{M})$, $V \subseteq \varphi(\mathcal{N})$ Basen, $f: U \to V$ eine Bij. Nach Kor 5.44 ist f A_0-elem. und nach Lemma 5.39 lässt sich f zu einer elem. Bij
$g: acl(A_0 U) \supseteq \varphi(\mathcal{M}) \longrightarrow acl(A_0 V) \supseteq \varphi(\mathcal{N})$ forts.

Kor 5.53 Sei T str. min, $\mathfrak{M} \models T$, $A \subseteq M$.

(i) $S(A)$ enthält genau einen nicht-alg Typ. daher ist $|S(A)| \leq |acl(A)| + 1$

(ii) acl def. Prägeom. auf M.

(iii) Bij. zwischen unabh. Teilm. sind elem., insbes. haben alle n-Tupel unabh. Elte denselben Typ.

(iv) T ist λ-stabil für $\lambda \geq |T|$ und tot. Hausd.

(v) Es gibt kein V.P.: Ist $\varphi(\mathfrak{M})$ koendl. und $\mathfrak{N} \succneqq \mathfrak{M}$, dann ist $\varphi(\mathfrak{N}) \supsetneq \varphi(\mathfrak{M})$, denn $\neg\varphi(\mathfrak{M}) = \neg\varphi(\mathfrak{N})$.

<u>Satz</u> 5.54 Sei T str. min. (i) Dann sind die Modelle von T bis auf Isom. durch ihre Dim. bestimmt.

(ii) $\mathfrak{M} \models T$ ist ω-sat. gdw $\dim(\mathfrak{M}) \geq \aleph_0$.

(iii) Jedes Modell ist ω-homogen.

<u>Bew</u> (i) folgt aus 5.52 und 5.53

(ii) <u>Beh</u>: Jede unendl. alg. abg. Teilm. S von M ist Träger eines elem. Unterstr.

<u>Bew</u>: Nach Tarskis Test genügt es z.z. dass jede kons. $L(S)$-Formel φ in S real. werden kann. Ist φ alg., dann ist die Beh. klar. Ist φ nicht alg., dann ist $\neg\varphi$ alg., also $\neg\varphi(\mathfrak{M})$ endl., $\varphi(\mathfrak{M}) \cap S$ unendl.

Ist also $A \subset M$ endl., $p \in S(A)$ nicht-alg., dann ist p in $\mathfrak{M}$ real. genau dann, wenn $M \neq acl(A)$, d.h. gdw $\dim(\mathfrak{M}) > \dim(A)$. Also ist $\mathfrak{M}$ ω-sat gdw $\mathfrak{M}$ unendl. Dim. hat.

(iii) Ist $f: A \to B$ elem. Bij., dann setzt sich f auf $\tilde{f}: acl(A) \to acl(B)$ fort. Ist $a' \in M$, a'/A nicht-alg., dann hat jede $b \in M \setminus acl(B)$ den richtigen Typ. Und