Prof. M. Hils
Dr. M. Bays

Universität Münster
Wintersemester 2017/2018

Logik 2 (Modelltheorie)
Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Sei E Äquivalenzrelation auf $\omega \times \omega$ definiert durch $(i,j)E(i',j') \longleftrightarrow i = i'$. Betrachten Sie $T := \mathrm{Th}(\langle \omega \times \omega; E \rangle)$. In welchen Kardinalitäten ist T kategorisch? Geben Sie eine vollständige Axiomatisierung für T an.

Aufgabe 2. Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie.

a) Zeigen Sie, dass für eine Formel $\phi(x_1, \dots, x_n)$ äquivalent sind:

   i) ϕ ist modulo T äquivalent zu einer existentiellen Formel.
   ii) Sind $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ Modelle von T und $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{M}$ mit $\mathcal{M} \models \phi(a_1, \dots, a_n)$, so gilt auch $\mathcal{N} \models \phi(a_1, \dots, a_n)$.

b) Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

   i) T ist zu einer existentiellen Theorie äquivalent.
   ii) Sind $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ $\mathcal{L}$-Strukturen und $\mathcal{M} \models T$, so auch $\mathcal{N} \models T$.
   Hinweis: Sie können die Beschreibung der Trennung mit universellen Formeln anwenden.

Aufgabe 3. Eine Formel heißt *positiv existentiell*, wenn sie durch Verknüpfung von Primformeln (atomaren Formeln) mit $\wedge$, $\vee$ und $\exists$ gebildet ist. Eine Abbildung von $\mathcal{L}$-Strukturen $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ heißt *Homomorphismus*, wenn für alle Primformeln $\phi(x_1, \dots, x_n)$ und alle $a_1, \dots, a_n \in M$, gilt

$$\mathcal{M} \models \phi(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \mathcal{N} \models \phi(f(a_1), \dots, f(a_n)).$$

Zeigen Sie, dass für eine Formel $\phi(x_1, \dots, x_n)$ äquivalent sind:

a) ϕ ist modulo T zu einer positiven existentiellen Formel äquivalent.
b) Wenn $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ Modelle von T sind, $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ein Homomorphismus ist und $a_1, ..., a_n \in \mathcal{M}$ sind, gilt $\mathcal{M} \models \phi(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \mathcal{N} \models \phi(f(a_1), \dots, f(a_n))$.

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum. Seien $Y_1 \subseteq X$ und $Y_2 \subseteq X$ kompakte Unterräume. Sei $\mathcal{H}$ eine Menge von Teilmengen von X, die sowohl abgeschlossen, als auch offen sind. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

a) Es gibt eine positive Boolesche Kombination B von Elementen von $\mathcal{H}$, also eine Menge B, die durch Vereinigung und Schnitt von Elementen von $\mathcal{H}$ gebildet wird, sodass $Y_1 \subseteq B$ und $Y_2 \cap B = \emptyset$.
b) Für alle $y_1 \in Y_1$ und alle $y_2 \in Y_2$ gibt es ein $H \in \mathcal{H}$, sodass $y_1 \in H$ und $y_2 \notin H$.

Bemerkung: das Trennungslemma ist eine Anwendung dieser topologischen Tatsache.

Abgabe bis Montag, den 23.10., 12:00 Uhr, Briefkasten 174.
Die Übungsblätter sollen alleine oder zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.