

Modelltheorie Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Sei T eine abzählbare total transzendente \mathcal{L} -Theorie und κ eine überabzählbare Kardinalzahl. Sei weiter $\mathcal{M} \models T$ mit $|\mathcal{M}| = \kappa$. Zeigen Sie:

- Für jede reguläre Kardinalzahl $\aleph_1 \leq \lambda < \kappa$ gibt es beliebig große $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$, in denen jede $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ -Formelmengende der Größe λ ausgelassen wird, die in \mathcal{M} ausgelassen wird.
- Wenn T κ -kategorisch ist, dann ist T auch λ -kategorisch für alle überabzählbaren $\lambda \leq \kappa$.

Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis von Morley abwärts.

Aufgabe 2. Sei T eine total transzendente \mathcal{L} -Theorie und $\varphi(x)$ eine \mathcal{L} -Formel, so dass T ein Vaught'sches Paar für $\varphi(x)$ hat. Zeigen Sie, dass T für alle überabzählbaren Kardinalzahlen κ ein Modell \mathcal{M} der Größe κ hat, so dass $\varphi(\mathcal{M})$ abzählbar ist.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Vaught.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die \mathcal{L}_R -Theorie T_{RG} des Zufallsgraphen ein Vaught'sches Paar hat.

Hinweis: Sei \mathcal{G} der Zufallsgraph und $v_0 \in G$ eine Ecke. Betrachten Sie den Teilgraphen \mathcal{G}_0 mit Universum $G_0 = G \setminus \{v_0\}$. Finden Sie nun eine geeignete $\mathcal{L}_R(G_0)$ -Formel $\varphi(x)$ mit $\varphi(\mathcal{G}) = \varphi(\mathcal{G}_0)$.

Sei \mathcal{M} eine \mathcal{L} -Struktur und $A \subseteq M$. Eine $\mathcal{L}(A)$ -Formel $\phi(x)$ heißt *algebraisch*, wenn die Menge $\phi(\mathcal{M}) = \{m \in M \mid \mathcal{M} \models \phi(m)\}$ endlich ist. Ein Typ $p \in S(A)$ heißt *algebraisch*, wenn p eine algebraische Formel enthält.

Aufgabe 4.

- Zeigen Sie, dass algebraische Typen isoliert sind.
- Sei $A \subseteq M$ endlich und M ω -saturiert. Zeigen Sie, dass $p \in S_1(A)$ genau dann algebraisch ist, wenn $p(M)$ endlich ist.

Abgabe bis Montag, den 12.1., 09:00 Uhr

Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.

Web-Seite: <http://wwwmath.uni-muenster.de/u/franziska.jahnke/mt/>