

Modelltheorie
Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Sei \mathcal{M} eine \mathcal{L} -Struktur, $A, B \subseteq M$ und (c_0, \dots, c_n) eine Folge von Elementen, welche nicht algebraisch über A sind. Angenommen \mathcal{M} sei $|A \cup B|^+$ -saturiert. Zeigen Sie, dass der Typ $\text{tp}(c_1, \dots, c_n/A)$ eine Realisierung $(m_1, \dots, m_n) \in \mathcal{M}^n$ hat, so dass keines der m_i in B liegt.

Hinweis: Induktion über n . Unterscheiden Sie, ob c_i algebraisch über $A c_n$ für ein $i < n$ ist oder nicht.

Aufgabe 2. Sei S die Nachfolgerfunktion auf \mathbb{Z} und $T = \text{Th}(\mathbb{Z}, S)$. Skizzieren Sie, dass T Quantorenelimination hat und beschreiben Sie die Modelle von T . In welchen Kardinalitäten ist T kategorisch? Wieviele paarweise nicht-isomorphe abzählbare Modelle gibt es? Zeigen Sie, dass $\text{acl}(A) = \bigcup_{a \in A} \text{acl}(a)$ für jedes $A \subseteq \mathcal{M} \models T$ gilt. Folgern Sie, dass acl eine Prägeometrie auf M definiert.

Aufgabe 3. Sei G ein Graph mit Kantenmenge K . Wir definieren $\text{cl} : \mathcal{P}(K) \rightarrow \mathcal{P}(K)$ wie folgt: Für $k \in K$ und $H \subseteq K$ gilt genau dann $k \in \text{cl}(H)$, wenn $k \in H$ gilt oder wenn k zu einem endlichen Kreis gehört, dessen übrige Kanten alle in H liegen.

- a) Zeigen Sie, dass cl eine Prägeometrie auf K definiert.
- b) Zeigen Sie, dass falls G endlich ist, die Dimension von K genau der Zahl der Ecken $|E|$ minus der Zahl der Zusammenhangskomponenten von G entspricht.

Hinweis: Ein Baum mit n Kanten hat $n + 1$ Ecken.

Aufgabe 4.

- a) Zeigen Sie direkt, dass streng minimale Theorien den Quantor \exists^∞ eliminieren.
- b) Geben Sie ein Beispiel einer Struktur \mathcal{M} , einer endlichen Menge $A \subseteq M$ und eines nicht-algebraischen Types $p \in S_1(A)$ an, so dass $p(M)$ endlich ist.

Anmerkung: Laut Aufgabe 4 auf Blatt 10 ist \mathcal{M} also nicht ω -saturiert.

Abgabe bis Montag, den 19.1., 09:00 Uhr

Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.

Web-Seite: <http://www.math.uni-muenster.de/u/franziska.jahnke/mt/>