Prof. K. Tent
Dr. F. Jahnke

Universität Münster
Wintersemester 2014/2015

**Modelltheorie**
**Übungsblatt 8**

**Aufgabe 1.** Sei $\mathcal{L}$ die Sprache, die für jede endliche 0-1-Folge $s \in 2^{<\omega}$ ein einstelliges Relationssymbol $P_s$ enthält. Sei $T_{\mathrm{BB}}$ die $\mathcal{L}$-Theorie der binären Bäume, also:

$$T_{\mathrm{BB}} = \{\forall x\, P_\emptyset(x) \wedge \exists x\, P_s(x) \wedge \forall x\, ((P_{s0}(x) \vee P_{s1}(x)) \longleftrightarrow P_s(x)) \wedge \forall x\, \neg(P_{s0} \wedge P_{s1})\}_{s \in 2^{<\omega}}$$

Zeigen Sie, dass $T$ vollständig ist und Quantorenelimination hat. Zeigen Sie weiter, dass es keine isolierten Typen in $T$ gibt und dass $T$ kein Primmodell hat.

**Aufgabe 2.** Sei $T$ eine abzählbare und vollständige Theorie und

$$\Sigma_0(x_1, \ldots, x_{n_0}), \Sigma_1(x_1, \ldots, x_{n_1}), \ldots$$

eine (abzählbare) Folge partieller Typen. Zeigen Sie, dass falls keiner der Typen $\Sigma_i$ isoliert ist, dann hat $T$ ein Modell, welches alle $\Sigma_i$ auslässt.
*Hinweis:* Ein Modell lässt genau dann alle $\Sigma_i$ aus, wenn es die Formelmenge (in abzählbar vielen Variablen) $\bigcup_{i \in \omega} \Sigma_i(x_1, \ldots, x_{n_i})$ auslässt.

**Aufgabe 3.** Sei $\mathcal{L}$ eine abzählbare Sprache und $T$ eine $\mathcal{L}$-Theorie mit unendlichen Modellen. Dann gibt es eine abzählbare Menge $\Delta$ von $\mathcal{L}$-Typen, so dass $T$ beliebig große Modelle hat, die genau die Typen aus $\Delta$ realisieren.
*Hinweis:* Betrachten Sie $T \cup \mathrm{Skolem}(\mathcal{L})$ und verwenden Sie das Standardlemma.

**Aufgabe 4.** Sei $\mathfrak{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Zeigen Sie: Wenn $\mathfrak{M}$ $\kappa$-saturiert ist, dann wird jede $\mathcal{L}$-Formel in $\mathfrak{M}$ entweder von endlich vielen oder von mindestens $\kappa$-vielen Elementen erfüllt.

*Abgabe bis Montag, den 15.12., 09:00 Uhr*
*Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.*
*Web-Seite:* `http://wwwmath.uni-muenster.de/u/franziska.jahnke/mt/`