Prof. K. Tent
Dr. F. Jahnke

Universität Münster
Wintersemester 2014/2015

Modelltheorie
Übungsblatt n

Aufgabe 1. Sei $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine Kette von $\mathcal{L}$-Strukturen. Sei ϕ eine $\mathcal{L}$-Aussage der Form $\forall x \exists y \psi(x,y)$, wobei in $\psi(x,y)$ keine Quantoren vorkommen. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{A}_i \models \phi \text{ für alle } i \in I \Longrightarrow \mathcal{A} \models \phi$$

gilt. Was können Sie also über die Vereinigung einer gerichteten Familie von Körpern sagen?

Aufgabe 2. Geben Sie überabzählbar viele 1-Typen über $(\mathbb{Q},<)$ an. Welche dieser Typen werden in $(\mathbb{Q},<)$ realisiert? Welche in $(\mathbb{R},<)$? Geben Sie mindestens einen Typen an, der nicht in $(\mathbb{R},<)$ realisiert wird.

Aufgabe 3.

1. Sei $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine Kette von $\mathcal{L}$-Strukturen. Sei ϕ eine $\mathcal{L}$-Aussage der Form $\forall x_1,\dots,x_n \psi(x_1,\dots,x_n)$, wobei $\psi(x_1,\dots,x_n)$ eine existentielle $\mathcal{L}$-Formel ist. Zeigen Sie, dass
$$\mathcal{A}_i \models \phi \text{ für alle } i \in I \Longrightarrow \mathcal{A} \models \phi$$
gilt.

2. Was können Sie also über die Vereinigung einer Kette von Körpern (einer Kette von linearen Ordnungen mit Randpunkten in der Sprache $\mathcal{L}_{order}$) sagen?

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$, sei T' eine $\mathcal{L}'$-Theorie und $\mathcal{K}$ die Klasse der $\mathcal{L}$-Strukturen, die zu einem Modell von T' expandiert werden können. ($\mathcal{K}$ besteht also aus den Modellen von T', wobei jeweils die Struktur aus $\mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$ „vergessen“ wird). Zeigen Sie:

Wenn $\mathcal{K}$ unter Unterstrukturen abgeschlossen ist, dann ist $\mathcal{K}$ (universell) axiomatisierbar.

Hinweis: Betrachten Sie die Theorie $T := \{\phi \mid \phi \text{ ist universelle } \mathcal{L}\text{-Aussage}, T' \models \phi\}$. Eine Möglichkeit ist es, das Lemma [3.1.2] zu verwenden.

Abgabe bis Montag, den ?, 09:00 Uhr
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: `http://wwwmath.uni-muenster.de/u/franziska.jahnke/mt/`