Mi, 14-16 Uhr

Modelltheorie

Übung: Montag nachmittag oder Dienstag ?

## Kapitel 1: Grundlagen [siehe TZ]

### 1.1 Strukturen

Def: Eine Sprache $\mathcal{L}$ ist eine Menge von Konstanten, Funktionszeichen und Relationssymbolen. Funktionszeichen und Relationszeichen haben eine Stelligkeit $\geq 1$.

Bsp: $\mathcal{L}_\emptyset = \emptyset$ leere Sprache

$\mathcal{L}_{AbG} = \{0, +, -\}$

$\mathcal{L}_{ring} = \mathcal{L}_{AbG} \cup \{1, \cdot\}$

$\mathcal{L}_{order} = \{<\}$

$\mathcal{L}_{ORing} = \mathcal{L}_{ring} \cup \mathcal{L}_{order}$

$\mathcal{L}_{set} = \{\in\}$

Def: Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache. Eine $\mathcal{L}$-Struktur ist ein Paar $\mathfrak{A} = (A, (z^{\mathfrak{A}})_{z \in \mathcal{L}})$ mit $A \neq \emptyset$ Menge und

$z^{\mathfrak{A}} \in A$ für $z \in \mathcal{L}$ Konstantensymb.

$z^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$ für $z \in \mathcal{L}$ n-stell. Fktsymb.

$z^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ " Rel.symbol

Die Mächtigkeit (oder Kardinalität) von $\mathfrak{A}$ wird definiert als $|A|$.

Beispiel: $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, (+^{\mathbb{C}}, \cdot^{\mathbb{C}}, 0^{\mathbb{C}}, 1^{\mathbb{C}}, -^{\mathbb{C}}))$ ist $\mathcal{L}_{ring}$-Struktur, $|\mathcal{C}| = 2^{\aleph_0}$.

Beispiel K-VR?

Def: Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-Strukturen. $h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ heißt Homomorph., falls

$h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$ f.a. Konstanten $c \in \mathcal{L}$ und

$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$ ~~f.a.~~

$R^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow R^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$

f.a. n-stell. Fkt.symb. $f$, Rel.symb. $R$ und

f.a. $a_1, \dots, a_n \in A$.

- Wenn $h$ injektiv ist und

  $R^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow R^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$ gilt,

  heißt $h$ (isomorphe) Einbettung.
- Eine surjektive Einbettung heißt Isomorphismus.

  Schreibe $h: \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

$(\mathbb{Q}, +) \subset (\mathbb{R}, +)$

Bem: Isomorphie ist eine Äq.relation.

Def: Ein Automorphismus ist ein Isom $\mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}$.

Bem: Die Menge der Autom. bildet eine Grp. bzgl. der Komposition.

Def: $\mathfrak{A}$ ist Unterstruktur von $\mathfrak{B}$ falls $A \subseteq B$ gilt und die Inklusion eine Einbettung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist. Schreibe dann $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Wir sagen auch "$\mathfrak{B}$ ist Oberstruktur von $\mathfrak{A}$".

Lemma: Sei $\mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-Struktur, $A \subseteq B$. Dann ist $A$ Universum einer Unterstruktur von $\mathfrak{B}$ gdw.

- $A$ enthält alle $c^{\mathfrak{B}}$ für $c \in \mathcal{L}$ Konstante
- $A$ abg. unter $f^{\mathfrak{B}}$ f.a. $f \in \mathcal{L}$ Fkt.symbol.

Die Struktur $\mathfrak{A}$ ist durch $A$ eindeutig bestimmt.

Bew: (mündlich)

Folgerung: $h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ Homom. Dann ist $h(A)$ eine Unterstruktur von $\mathfrak{B}$.

<u>Bew</u>: $f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n)) = h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) \in h(A)$. ☒

Lemma: Sei $h: \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}'$ Isom. und $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$.
Dann ex. Erw. $\mathfrak{B}' \supseteq \mathfrak{A}'$ und Isom. $g: \mathfrak{B} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}'$.

<u>Bew</u>: Wähle $B' \supseteq A'$ mit $|B'| = |B|$ und setze $h$ zu Bijektion $g: B \to B'$ fort.
Benutze $g$, um die $\mathcal{L}$-Struktur auf $B'$ zu def. ☒

— Keine Zeit —

Falls noch nicht mehr als ein Drittel der VL um ist:

Def: $(I, \leq)$ heißt partielle Ordnung, falls f.a. $i, j \in I$ ex. $k \in I$ mit $i \leq k$ und $j \leq k$.

Sei $(I, \leq)$ p.O. Eine Familie $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ von $\mathcal{L}$-Strukturen heißt gerichtet, falls
$$i \leq j \Rightarrow \mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_j$$
gilt. Falls $I$ lin. geordnet ist, sagen wir $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ ist eine Kette.

Lemma: Sei $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ eine gerichtete Familie von $\mathcal{L}$-Strukturen. Dann ist $A = \bigcup A_i$ das Universum einer (eind. bestimmten) $\mathcal{L}$-Struktur
$$\mathfrak{A} = \bigcup \mathfrak{A}_i$$
die eine Oberstruktur aller $\mathfrak{A}_i$ ist.

<u>Bew</u>: Sei $R$ n-stell. Relationssymb., $a_1, \dots, a_n \in A$.
$I$ gerichtet $\Rightarrow$ ex. $k$ mit $a_1, \dots, a_n \in A_k$.
Definiere
$$R^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) :\Leftrightarrow R^{\mathfrak{A}_k}(a_1, \dots, a_n)$$
Dies ist die einzige Möglichkeit!
Konst & Fktsymb. ebenso ☒

## 1.2. Sprache

Bsp: $\mathcal{L}_{ring} = \{0, +, -, 1, \cdot\}$

$\mathcal{L}_{ring}$ - fml. $\forall v_0 \exists v_1 \; v_0 = v_1 \cdot v_1$

$\mathcal{L}_{ring}$ - Term $v_5 \cdot v_5 \cdot v_6 + v_3$, $0$

Def: Ein $\mathcal{L}$-Term ist eine Zeichenreihe, die nach den folgenden Regeln aufgebaut ist:

- jede der Variablen $v_0, v_1, \dots$ ist ein Term
- jede Konstante $c \in \mathcal{L}$ ist –"–
- Wenn $f$ n-stelliges Fkt.symb. ist und $t_1, \dots, t_n$ Terme, dann ist $f t_1, \dots, t_n$ ein Term.

Schreibweise: $f(t_1, \dots, t_n)$ und $t_1 + t_2$ statt $+(t_1, t_2)$.

Bem: Terme sind eindeutig lesbar.

Def: Sei $\mathfrak{A}$ $\mathcal{L}$-Struktur, $t$ ein $\mathcal{L}$-Term. Sei $\vec{b} = b_0 b_1 b_2 \dots$ eine "Belegung der Variablen $v_0 v_1 v_2 \dots$", $b_i \in A$.
Dann ist $t^{\mathfrak{A}}[\vec{b}]$ definiert durch

- $v_i^{\mathfrak{A}}[\vec{b}] = b_i$
- $c^{\mathfrak{A}}[\vec{b}] = c^{\mathfrak{A}}$ für $c \in \mathcal{L}$ konst.
- $(f(t_1, \dots, t_n))^{\mathfrak{A}}[\vec{b}] = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\vec{b}], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[\vec{b}])$

[Beachte: Diese rekursive Def. fkt. wegen der eind. Lesbarkeit]

Lemma: $t^{\mathfrak{A}}[\vec{b}]$ hängt nur von der Belegung der Variablen ab, die in $t$ vorkommen.

Schreibweise: $t(x_1, \dots, x_n)$ falls:

- $x_i$ sind paarweise verschiedene Variablen $x_i \in \{v_0, v_1, \dots\}$, $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$.
- höchstens die $x_i$ kommen in $t$ vor.

Wenn $\bar{b}$ die Variable $x_i$ durch $a_i$ belegt, schreibe $t^{\mathfrak{A}}[a_1, \dots, a_n] := t^{\mathfrak{A}}[\bar{b}]$.

BSP: $t = v_0 + v_1$

$t_1 = v_2 \cdot v_2, \; t_2 = 1$

$t(t_1, t_2) = v_2 \cdot v_2 + 1 \; [\bar{b}] = v_2 \cdot v_2 [\bar{b}] + 1[\bar{b}]$

**Lemma** (Substitutionslemma)

$$t(t_1, \dots, t_n)^{\mathfrak{A}}[\bar{b}] = t^{\mathfrak{A}}[t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{b}], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[\bar{b}]].$$

Terme substituiert für $x_1, \dots, x_n$

**Lemma:** Sei $h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ Homom., $t(x_1, \dots, x_n)$ Term.
Dann gilt f.a. $a_1, \dots, a_n \in A$

$$t^{\mathfrak{B}}[h(a_1), \dots, h(a_n)] = h(t^{\mathfrak{A}}[a_1, \dots, a_n])$$

Bew: ÜA.

**Def:** $\mathcal{L}$-Fml sind Zeichenketten gebildet aus Symbolen aus $\mathcal{L}$, Klammern ( und ) und den folgenden Symbolen:

| | |
|---|---|
| Variablen | $v_0, v_1, v_2, \dots$ |
| Gleichheit | $\doteq$ |
| Negation | $\neg$ |
| Konjunktion | $\wedge$ |
| Existenzquantor | $\exists$ |

mittels der folgenden Regeln

atomar:
1. $t_1 \doteq t_2$ — für $t_1, t_2$ $\mathcal{L}$-Terme
2. $R t_1 \dots t_n$ — für $R$ n-stelliges Rel.symbol aus $\mathcal{L}$, $t_1, \dots, t_n$ $\mathcal{L}$-Terme

3. $\neg \varphi$ — für $\varphi$ $\mathcal{L}$-Fml.
4. $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ — für $\varphi_1$ & $\varphi_2$ $\mathcal{L}$-Fmln
5. $\exists x \varphi$ — für $\varphi$ $\mathcal{L}$-Fml, $x$ Variable.

Komplexität einer Fml: Anzahl der Symbole $\wedge, \neg, \exists$.

$\rightsquigarrow$ Können Induktion über die Komplexität machen!

Abkürzungen und Notationen:

$$(\psi_1 \vee \psi_2) = \neg(\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2)$$
$$(\psi_1 \to \psi_2) = \neg(\psi_1 \wedge \neg\psi_2)$$
$$(\psi_1 \leftrightarrow \psi_2) = (\psi_1 \to \psi_2) \wedge (\psi_2 \to \psi_1)$$
$$\forall x\, \psi = \neg \exists x\, \neg\psi$$

Weglassen von Klammern

$\neg, \exists, \forall$    +

$\wedge$

$\vee$    Bindestärke

$\to, \leftrightarrow$    −

etwa

$\neg x \wedge y \neq \neg(x \wedge y)$

$x \wedge y \vee z = (x \wedge y) \vee z$

Jetzt: $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$, $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ $\mathcal{L}$-Fml, $\vec{b}$ Belegung.

Was heißt "$\varphi$ gilt für $\vec{b}$"?

In $\mathbb{C}$ gilt $i \cdot i = -1$ und $\exists x\; x \cdot x = -1$

Def: Sei $\mathfrak{A}$ $\mathcal{L}$-Struktur. Für alle $\mathcal{L}$-Fml $\varphi$ und alle Belegungen $\vec{b}$, definiere

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{b}]$$

rekursiv über den Aufbau von $\varphi$:

$\mathfrak{A} \models t_1 \doteq t_2\, [\vec{b}] \iff t_1^{\mathfrak{A}}[\vec{b}] = t_2^{\mathfrak{A}}[\vec{b}]$

$\mathfrak{A} \models R t_1 \dots t_n\, [\vec{b}] \iff R^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\vec{b}], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[\vec{b}])$

$\mathfrak{A} \models \neg\varphi(\vec{b}) \iff \mathfrak{A} \not\models \varphi[\vec{b}]$

$\mathfrak{A} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)[\vec{b}] \iff \mathfrak{A} \models \psi_1[\vec{b}]$ und $\mathfrak{A} \models \psi_2[\vec{b}]$

$\mathfrak{A} \models \exists x\, \psi[\vec{b}] \iff$ ex. $a \in A$ so, dass

$$\mathfrak{A} \models \psi[\vec{b}\tfrac{a}{x}]$$

Notation: $\vec{b}\frac{a}{x} = (b_0, b_1, \dots, b_{i-1}, a, b_{i+1}, \dots)$ für $x = v_i$.

Falls $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{b}]$ gilt, sagen wir, dass $\varphi$ in $\mathfrak{A}$ von $\vec{b}$ erfüllt wird.

Def: Die Variable $x$ ist freie Variable einer Fml. $\varphi$ wenn $x$ an einer Stelle in $\varphi$ vorkommt, die nicht durch einen Quantor $\exists x$ gebunden wird. Sonst heißt $x$ gebunden. Formal:

$x$ frei in $t_1 \doteq t_2 \iff x$ kommt in $t_1$ oder $t_2$ vor.

$x$ frei in $Rt_1,\dots,t_n \iff$ –"– einem $t_i$ vor

$x$ frei in $\neg\psi \iff x$ frei in $\psi$

$x$ frei in $(\psi_1 \wedge \psi_2) \iff x$ frei in $\psi_1$ oder $\psi_2$

$x$ frei in $\exists y\, \psi \iff x \neq y$ und $x$ frei in $\psi$.

Beispiel $x < y$ ($x$ und $y$ frei)

$\forall z \exists y\; x < y + z$ ($x$ frei)

Lemma: Wenn $\vec{b}$ und $\vec{c}$ die freien Variablen von $\varphi$ gleich belegen, gilt

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{b}] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{c}].$$

Notation: Schreibe $\varphi = \varphi(x_1,\dots,x_n)$ falls höchstens die $x_i$ frei in $\varphi$ sind, $x_i$ paarw. verschieden.
Definiere $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n]$ durch $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{b}]$ für eine (alle) Belegung $\vec{b}$ mit $\vec{b}(x_i) = a_i$
Für jedes $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ definiert dies n-stellige Relation auf $\mathfrak{A}$ durch

$$\varphi(\mathfrak{A}) = \{\bar{a} \in A^n \mid \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})\},$$

dies heißt die Realisierungsmenge von $\varphi$.
Solche Mengen heißen $\emptyset$-definierbar.

Lemma (Substitutionslemma):

$$\mathfrak{A} \models \varphi(t_1,\dots,t_n)[\vec{b}] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[t_1^{\mathfrak{A}}[\vec{b}],\dots,t_n^{\mathfrak{A}}[\vec{b}]]$$

Bew: ÜA.

Def: Eine $\mathcal{L}$-Aussage (oder ein $\mathcal{L}$-Satz) ist eine Formel ohne freie Variablen.
Schreibe $\mathfrak{A} \models \varphi$ "$\mathfrak{A}$ ist Modell von $\varphi$" und sage $\varphi$ hält in $\mathfrak{A}$, falls $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{b}^0]$ für eine (alle) Belegungen $\bar{b}^0$ gilt.
Eine Menge von Aussagen heißt $\mathcal{L}$-Theorie.

Nur mündlicher Ausblick

Beispiele: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ring}$.

$\mathcal{L}$-Aussagen:

$T_{Kp} := $ [Theorie der Körper:] $= \{(i), \dots, (x)\}$

(i) $\neg 1 \doteq 0$
(ii) $\forall x \exists y \quad x \cdot y \doteq 1$
(iii) $\forall x \quad x \cdot 1 \doteq x$
(iv) $\forall x \forall y \forall z \quad (x \cdot y) \cdot z \doteq x \cdot (y \cdot z)$
(v) $\forall x \forall y \quad x \cdot y \doteq y \cdot x$
(vi) $\forall x \exists y \quad x + y \doteq 0$
(vii) $\forall x \quad x + 0 \doteq x$
(viii) $\forall x \forall y \forall z \quad (x+y)+z \doteq x + (y+z)$
(ix) $\forall x \forall y \quad x + y \doteq y + x$
(x) $\forall x \forall y \forall z \quad (x+y) z \doteq xz + yz$

$T_{ACF}$ : $T_{Kp} \cup \{(xi)_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\quad \mathbb{C} \models T_{ACF}$

$(xi)_n$: $\forall x_0, \dots, x_n \exists x \quad x_n x^n + x_{n-1} x^{n-1} + \dots + x_1 x + x_0 \doteq 0$
"Jedes Polynom von Grad $n$ hat NSt."

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{AbG}$
$T_{DFFAG}$ : $\{(vi), (vii), (viii), (ix)\} \cup \{(xii)_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{(xiii)_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$(xii)_n \quad \forall x \exists y \quad \underbrace{y + \dots + y}_{n\text{-mal}} \doteq x$

$(xiii)_n \quad \forall x \quad (\neg x \doteq 0 \to \neg \underbrace{x + \dots + x}_{n\text{-mal}} \doteq 0)$.

$(\mathbb{Q}, +^{\mathbb{Q}}) \models$ DFFAG