Prof. M. Hils
Dr. M. Bays

Universität Münster
Wintersemester 2017/2018

Logik 2 (Modelltheorie)
Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Betrachten Sie die Theorie T_{RG} des Zufallsgraphen von Blatt 2.
Sei $(G;R) \models T_{RG}$. Sei $A \subseteq G$ eine unendliche Teilmenge. Zeigen Sie, dass $p \in S_1(A)$ isoliert ist genau dann, wenn $p(x) \vdash x = a$ für ein $a \in A$. Folgern Sie, dass wenn $|A| = \aleph_0$, dann hat $\mathrm{Th}((G;R)_A)$ ein Primmodell genau dann, wenn $(A;R) \models T_{RG}$.

Aufgabe 2. Seien $\mathcal{N}, \mathcal{M}$ abzählbare Modelle einer vollständigen Theorie T. Zeigen Sie:

a) Angenommen, $\mathcal{M}$ ist homogen und für alle $p \in S(T)$ gilt: Wird p in $\mathcal{N}$ realisiert, so auch in $\mathcal{M}$.

   Dann gibt es eine elementare Einbettung $\mathcal{N} \overset{\preceq}{\to} \mathcal{M}$.

b) Wenn $\mathcal{N}$ und $\mathcal{M}$ homogen sind und die gleichen Typen realisieren, dann sind $\mathcal{N}$ und $\mathcal{M}$ isomorph.
   Hinweis: Finden Sie ein hin-und-her System.

Aufgabe 3. (4 Punkte + 2 Bonuspunkte) Sei T eine vollständige abzählbare Theorie. Wir bezeichnen mit $I(T, \aleph_0)$ die Anzahl der abzählbaren Modelle von T bis auf Isomorphie.

a) Ziegen Sie: Wenn $I(T, \aleph_0) \leq \aleph_0$, ist T schmal.
   Hinweis: Ein abzählbares Modell realisiert nur abzählbar viele Typen.

b) Angenommen, es gilt $1 < I(T, \aleph_0) \leq \aleph_0$. Zeigen Sie:

   i) Es gibt ein ω-saturiertes Modell $\mathcal{M} \models T$ und ein Tupel $\overline{a} \in M^n$, sodass $\mathrm{tp}(\overline{a})$ nicht isoliert ist.
   ii) $\mathcal{M}_{\overline{a}}$ ist ω-saturiert.
   iii) $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_{\overline{a}})$ besitzt ein abzählbare Modell, das nicht ω-saturiert ist.
   Hinweis: Ryll-Nardzewski.

c) Folgern Sie hieraus Vaughts "niemals zwei": Für eine abzählbare Theorie T gilt $I(T, \aleph_0) \neq 2$.

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{L} = \{<, c_1, c_2, \dots\}$. Die $\mathcal{L}$-Theorie T bestehe aus DLO vereinigt mit

$$\{c_i < c_j : i, j \in \mathbb{N}; i < j\}.$$

Zeigen Sie:

a) T hat Quantorenelimination und ist vollständig.

b) $I(T, \aleph_0) = 3$.
   Hinweis: Denken Sie an obere Schranken und Suprema der Menge $\{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Verwenden Sie die Eindeutigkeit atomarer und ω-saturierter abzählbarer Modelle.

Abgabe bis Montag, den 27.11, 12:00 Uhr, Briefkasten 174.
Die Übungsblätter sollen alleine oder zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.