Prof. M. Hils
Dr. M. Bays

Universität Münster
Wintersemester 2017/2018

Logik 2 (Modelltheorie)
Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{M}$ eine Struktur. Sei $a, b \in M$. Zeigen Sie, dass der 2-Typ $\mathrm{tp}(ab)$ isoliert ist genau dann, wenn die 1-Typen $\mathrm{tp}(a)$ und $\mathrm{tp}(b/a)$ isoliert sind.

Aufgabe 2.

a) Sei $\mathcal{L}$ eine abzählbare Sprache und M eine $\mathcal{L}$-Struktur. Zeigen Sie: Wenn M ω-kategorisch ist, ist der algebraische Abschluss (siehe Blatt 3 Aufgabe 3) einer endlichen Menge wieder endlich.

b) Zeigen Sie, dass es keine ω-kategorische $\mathcal{L}_{ring}$-Theorie T gibt, die die Körperaxiome enthält.

Seien $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ Strukturen. Eine $\emptyset$-*Interpretation* von $\mathcal{N}$ in $\mathcal{M}$ besteht aus einem $n \in \mathbb{N}_{>0}$, und einer definierbaren Teilmenge $X \subseteq M^n$, und einer definierbaren Teilmenge $E \subseteq X^2 \subseteq M^{2n}$, sodass E eine Äquivalenzrelation auf X ist, und einer Bijektion $\theta : N \to X/E$, wobei X/E die Menge der Äquivalenzklasse

$$X/E = \{x/E \mid x \in X\}$$

ist, sodass für jedes $m \in \mathbb{N}_{>0}$ und jede definierbare Teilmenge $Y \subseteq \mathcal{N}^m$,

$$\{(x_1, \ldots, x_m) \in X^m \mid (\theta^{-1}(x_1/E), \ldots, \theta^{-1}(x_m/E)) \in Y\} \subseteq M^{mn}$$

definierbar ist.

Eine vollständige Theorie T_1 heißt $\emptyset$-*interpretierbar* in einer vollständigen Theorie T_2, wenn es für ein (gdw. jedes) Modell $\mathcal{M} \models T_2$ ein Modell $\mathcal{N} \models T_1$ und eine $\emptyset$-Interpretation von $\mathcal{N}$ in $\mathcal{M}$ gibt.

Aufgabe 3. Seien T_1, T_2 vollständige Theorien. Sei T_1 $\emptyset$-interpretierbar in T_2. Zeigen Sie, dass wenn T_2 ω-kategorisch ist, dann ist auch T_1 ω-kategorisch.

Aufgabe 4. Betrachten Sie die Sprache $\mathcal{L} := \{A, B, \Theta, \alpha, (b_i)_{i \in \aleph_1}\}$, wobei A, B, Θ unäre Prädikate sind, α ein 3-stelliges Prädikat ist und b_i Konstanten sind. Sei $\mathcal{M}$ die $\mathcal{L}$-Struktur, sodass $A^{\mathcal{M}}, B^{\mathcal{M}}, \Theta^{\mathcal{M}}$ disjunkte Mengen sind, $|A^{\mathcal{M}}| = |B^{\mathcal{M}}|$, $b_i^{\mathcal{M}} \in B^{\mathcal{M}}$, wenn $b_i \neq b_j$ dann $b_i^{\mathcal{M}} \neq b_j^{\mathcal{M}}$, $\Theta^{\mathcal{M}}$ die Menge der Bijektionen $A^{\mathcal{M}} \to B^{\mathcal{M}}$ ist, und $\mathcal{M} \models \alpha(\theta, a, b)$ genau dann, wenn $\theta \in \Theta^{\mathcal{M}}$ und $a \in A^{\mathcal{M}}$ und $b \in B^{\mathcal{M}}$ und $\theta(a) = b$.
Sei $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$.

a) Sei $\tau : A^{\mathcal{M}} \to A^{\mathcal{M}}$ eine Bijektion. Zeigen Sie, dass es einen Automorphismus σ von $\mathcal{M}$ gibt, sodass $\sigma(a) = \tau(a)$ gilt für $a \in A^{\mathcal{M}}$.
Hinweis: Für $\theta \in \Theta^{\mathcal{M}}$ betrachten Sie $\theta \circ \tau^{-1}$.

b) Sei $A_0 \subseteq A^{\mathcal{M}}$ eine abzählbare Teilmenge. Zeigen Sie, dass

$$p(x) := \{x \neq a \mid a \in A_0\} \in S_1(A_0)$$

vollständig, aber nicht isoliert ist.
Hinweis: Verwenden Sie (a).

c) Zeigen Sie, dass es kein Modell von $T(A_0)$ gibt, das $p(x)$ vermeidet.
Anmerkung: Deshalb ist die Annahme in dem Typenvermeidungssatz, dass die Sprache abzählbar ist, notwendig.

Abgabe bis Montag, den 20.11., 12:00 Uhr, Briefkasten 174.
Die Übungsblätter sollen alleine oder zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.