Prof. K. Tent
Dr. F. Jahnke

Universität Münster
Wintersemester 2014/2015

Modelltheorie
Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{L} \supseteq \mathcal{L}_{Grp}$ eine Sprache und G eine streng minmale Gruppe, d.h. eine Gruppe, deren $\mathcal{L}$-Theorie $\mathrm{Th}(G)$ streng minimal ist. Zeigen Sie, dass jede echte definierbare Untergruppe von G endlich ist. Geben Sie ein Beispiel einer unendlichen streng minimalen Gruppe an.

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{L} \supseteq \mathcal{L}_{Grp}$ eine Sprache und G eine Gruppe, deren $\mathcal{L}$-Theorie total transzendent ist. Zeigen Sie, dass G eine kleinste definierbare Untergruppe von endlichem Index hat.

Aufgabe 3. Sei $\mathcal{L} = \{\sigma\}$, wobei σ ein einstelliges Funktionssymbol ist. Betrachten Sie die $\mathcal{L}$-Theorie einer unendlichen Menge mit einer Bijektion σ ohne endliche Orbits, d.h.

$$T = \Big\{\exists x_0, \ldots, x_n \bigwedge_{i,j \in \{0,\ldots,n\},\, i \neq j} x_i \neq x_j \mid n \in \mathbb{N}\Big\} \cup \Big\{\forall x \exists^{=1} y\, \sigma(y) = x\Big\} \cup$$
$$\Big\{\neg \exists x_0, \ldots, x_n \big(\bigwedge_{i \in \{0,\ldots,n-1\}} \sigma(x_i) = x_{i+1} \wedge \sigma(x_n) = x_0\big) \mid n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Zeigen Sie, dass T streng minimal ist und dass für die assoziierte Geometrie

$$\mathrm{cl}(A) = \bigcup_{a \in A} \mathrm{cl}(\{a\})$$

gilt.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass T Quantorenelimination hat.

Aufgabe 4. Es sei T eine streng minimale $\mathcal{L}$-Theorie und $m_0 \in \omega$ die Dimension des Primmodells von T. Zeigen Sie, dass m_0 gerade das minimale $n \in \omega$ mit der Eigenschaft ist, dass es unendlich viele $\mathcal{L}$-Formeln $\psi(x_0, \ldots, x_n)$ modulo T gibt.

Abgabe bis Montag, den 26.1., 09:00 Uhr
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: `http://wwwmath.uni-muenster.de/u/franziska.jahnke/mt/`