Prof. M. Hils
Dr. M. Bays

Universität Münster
Wintersemester 2017/2018

Logik 2 (Modelltheorie)
Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{L} = \{E\}$ eine Sprache mit einem zweistelligen Relationszeichen E. Wir betrachten die $\mathcal{L}$-Theorie T, die axiomatisiert, dass E eine Äquivalenzrelation mit genau zwei Äquivalenzklassen ist, welche beide unendlich sind. Zeigen Sie, dass T Quantorenelimination hat und ω-stabil ist. Ist T $\aleph_1$-kategorisch?

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die $\mathcal{L}_R$-Theorie T_{RG} des Zufallsgraphen ein Vaught'sches Paar hat.
Hinweis: Sei $\mathcal{G}$ der Zufallsgraph und $v_0 \in G$ eine Ecke. Betrachten Sie den Teilgraphen $\mathcal{G}_0$ mit Universum $G_0 = G \setminus \{v_0\}$. Finden Sie nun eine geeignete $\mathcal{L}_R(G_0)$-Formel $\varphi(x)$ mit $\varphi(\mathcal{G}) = \varphi(\mathcal{G}_0)$.

Aufgabe 3.

a) Sei $\mathcal{G} = (G; \cdot, \dots)$ eine Struktur, sodass $(G; \cdot)$ eine Gruppe ist. Nehmen Sie an, dass $\mathrm{Th}(\mathcal{G})$ total transzendent ist.

   Zeigen Sie, dass es keine unendliche strikt absteigende Kette von definierbaren Untergruppen $G > G_1 > G_2 > \dots$ gibt.
   Hinweis: Betrachten Sie die Nebenklassen.

b) Zeigen Sie, dass jeder total transzendente Integritätsbereich R ein Körper ist.
   Hinweis: Wenn $a \in R$ nicht invertierbar ist, betrachten Sie die Ideale $a^n R$.

Erinnerung: "A-interpretierbar" wurde auf Übungsblatt 6 definiert.

Aufgabe 4.

a) Zeigen Sie, dass wenn $\mathcal{M}$ eine total transzendente Struktur ist und $A \subseteq M$ eine Teilmenge, dann ist jede Struktur, die A-interpretierbar in $\mathcal{M}$ ist, total transzendent.

b) Betrachten Sie die Matrixgruppe

$$G := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Q}, a > 0 \right\},$$

   und die Untergruppe

$$H := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

   Betrachten Sie die Quotientengruppe G/H. Zeigen Sie, dass G/H nicht total transzendent ist (Sie dürfen Aufgabe 3(a) verwenden).

*c) Folgern Sie, dass G nicht total transzendent ist.

Abgabe bis Montag, den 18.12., 12:00 Uhr, Briefkasten 174.
Die Übungsblätter sollen alleine oder zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.