

Logik 2 (Modelltheorie)
Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Sei \mathfrak{M} eine \mathcal{L} -Struktur. Zeigen Sie: Wenn \mathfrak{M} κ -saturiert ist, dann wird jede \mathcal{L} -Formel in \mathfrak{M} entweder von endlich vielen oder von mindestens κ -vielen Elementen erfüllt.

Aufgabe 2.

- a) Zeigen Sie: Eine Folge von Elementen in $(\mathbb{Q}, <)$ ist genau dann ununterscheidbar, wenn sie entweder konstant oder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.
- b) Seien K ein Körper und V ein unendlicher K -Vektorraum. Beschreiben Sie die ununterscheidbaren Folgen von Elementen in V .

Aufgabe 3. Ein *geordneter \mathbb{Q} -Vektorraum* ist ein \mathbb{Q} -Vektorraum mit einer linearen Ordnung $<$, sodass

$$\forall x \forall y \forall z (x < y \rightarrow x + z < y + z).$$

Sei $\mathcal{L}_{\text{g}\mathbb{Q}\text{-VR}} := \mathcal{L}_{\mathbb{Q}\text{-VR}} \cup \{<\}$, und sei $T_{\text{g}\mathbb{Q}\text{-VR}}$ die $\mathcal{L}_{\text{g}\mathbb{Q}\text{-VR}}$ -Theorie der unendlichen geordneten \mathbb{Q} -Vektorräume.

- a) Zeigen Sie, dass $T_{\text{g}\mathbb{Q}\text{-VR}}$ vollständig ist und Quantorenelimination hat.
- b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R} \models T_{\text{g}\mathbb{Q}\text{-VR}}$ keine nicht-konstante unendliche ununterscheidbare Folge hat.
- c) Sei \mathcal{U} ein Nicht-Hauptultrafilter auf ω und sei ${}^*\mathbb{R}$ die Ultrapotenz $\mathbb{R}^{\mathcal{U}} \models T_{\text{g}\mathbb{Q}\text{-VR}}$. Beschreiben Sie eine nicht-konstante unendliche ununterscheidbare Folge in ${}^*\mathbb{R}$.
Hinweis: Sei $\alpha > \mathbb{R}$. Betrachten Sie $(\alpha^n)_{n \in \omega}$.

Aufgabe 4. Sei \mathcal{L} eine endliche Sprache, nicht notwendigerweise relational. Sei \mathcal{C} eine Fraïssé-Klasse mit Fraïssé-Limes \mathcal{M} . Nehmen Sie an, dass jedes $A \in \mathcal{C}$ endlich ist, und \mathcal{M} ω -saturiert ist. Zeigen Sie, dass $\text{Th}(\mathcal{M})$ ω -kategorisch ist.

Abgabe bis Montag, den 11.12., 12:00 Uhr, Briefkasten 174.

Die Übungsblätter sollen alleine oder zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.