Prof. M. Hils
Dr. M. Bays

Universität Münster
Wintersemester 2017/2018

Logik 2 (Modelltheorie)
Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Betrachten Sie die Sprache der Graphen $\mathcal{L}_R = \{R\}$, wobei R ein zweistelliges Relationssymbol ist. Wir fassen $\mathcal{L}_R$-Strukturen als Graphen auf, wobei $R(x,y)$ heißt, dass es eine Kante von x nach y gibt. Sei

$$\begin{aligned} T_{RG} = &\big\{\forall x, y\big(\big(R(x,y) \leftrightarrow R(y,x)\big) \wedge \neg R(x,x)\big)\big\} \\ &\cup \big\{\forall x_0, \ldots, x_{m-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}\big(\bigwedge_{i \neq j} \neg x_i = y_j \rightarrow \\ &\exists z\big(\bigwedge_{i<m} R(z, x_i) \wedge \neg z = x_i\big) \wedge \big(\bigwedge_{j<n} \neg R(z, y_j) \wedge \neg z = y_j\big)\big) \ \mid \ m, n \in \mathbb{N}_{>0}\big\} \end{aligned}$$

die $\mathcal{L}_R$-Theorie des Zufallsgraphen. Zeigen Sie, dass T_{RG} Quantorenelimination hat, und folgern Sie hieraus die Vollständigkeit von T_{RG}.

Aufgabe 2.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Th}((\mathbb{Q}, +, 0))$ Quantorenelimination hat.

   Hinweis: Verwenden Sie, dass $T_{\mathbb{Q}-VR}$ Quantorenelimination hat.

b) Betrachten Sie die Struktur $(\mathbb{Q}, \Gamma_+^{\mathbb{Q}}, 0)$, wobei $\Gamma_+^{\mathbb{Q}}$ der Funktionsgraph von $+$ ist, d.h. Γ_+ ein dreistelliges Relationssymbol ist und $(a,b,c) \in \Gamma_+^{\mathbb{Q}}$ gdw $a + b = c$ gilt.

   i) Schreiben Sie in dieser Sprache eine $\exists$-Formel und eine $\forall$-Formel, die beide $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{Q}^4 \mid x + y + z = w\}$ definieren.
   ii) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Th}((\mathbb{Q}, \Gamma_+^{\mathbb{Q}}, 0))$ modellvollständig ist.
   * *Zusatz*: Zeigen Sie, dass $\mathrm{Th}((\mathbb{Q}, \Gamma_+^{\mathbb{Q}}, 0))$ keine Quantorenelimination besitzt.

Aufgabe 3. Sei T eine modellvollständige $\mathcal{L}$-Theorie.

a) Zeigen Sie, dass T induktiv ist.

b) Zeigen Sie, dass wenn $\mathcal{M} \models T_\forall$, dann gilt $\mathcal{M} \models T$ genau dann, wenn $\mathcal{M}$ existentiell abgeschlossen ist in jeder Erweiterung $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \models T_\forall$.

Aufgabe 4. Finden Sie eine quantorenfreie $\mathcal{L}_{\text{ring}}$-Formel $\phi(y_1, y_2, y_3)$, die modulo ACF zu

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (y_1 = x_1^2 \wedge y_2 = x_2^2 \wedge y_3 = x_3^2 \wedge x_1 + x_2 + x_3 = 0)$$

äquivalent ist.

Hinweis: Betrachten Sie die formelle Berechnung

$$\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3} = 0 \Rightarrow y_3 = y_1 + y_2 + 2\sqrt{y_1}\sqrt{y_2} \Rightarrow 4y_1y_2 = (y_3 - y_1 - y_2)^2,$$

und beachten Sie gesondert den Fall, indem der Körper Charakteristik 2 besitzt.

Abgabe bis Montag, den 6.11., 12:00 Uhr, Briefkasten 174.
Die Übungsblätter sollen alleine oder zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.