Prof. K. Tent
Dr. F. Jahnke

Universität Münster
Wintersemester 2014/2015

Modelltheorie
Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{C}$ eine Klasse von $\mathcal{L}$-Strukturen. Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}$ genau dann eine elementare Klasse ist, wenn $\mathcal{C}$ abgeschlosssen unter elementarer Äquivalenz und Ultraprodukten ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie mithilfe von Ultraprodukten, dass die folgenden Klassen nicht elementar sind:

a) Die Klasse der Torsionsgruppen.
Anmerkung: Eine Gruppe G heißt Torsionsgruppe, wenn es für jedes $g \in G$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $g^n = 1$.

b) Die Klasse der endlich-dimensionalen K-Vektorräume für einen fest gewählten Körper K.

Aufgabe 3. Zeigen Sie den Kompaktheitssatz mithilfe von Ultraprodukten: Wenn jede endliche Teilmenge einer Theorie T konsistent ist, dann ist auch T konsistent.
Hinweis: Betrachten Sie als Indexmenge I alle endlichen Teilmengen der Theorie. Finden Sie einen geeigneten Ultrafilter auf I, der für jedes $\sigma \in T$ die Menge $I_\sigma := \{\Delta \in I \mid \sigma \in \Delta\}$ enthält.

Sei $(I, \leq)$ eine lineare Ordnung. Wir nennen eine Familie $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ von $\mathcal{L}$-Strukturen eine *Kette*, falls für alle $i, j \in I$ gilt:

$$i \leq j \Longrightarrow \mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}_j$$

Aufgabe 4. Sei $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Kette von $\mathcal{L}$-Strukturen.

a) Zeigen Sie, dass dann $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ das Universum einer eindeutig bestimmten $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ ist, für die jedes $\mathcal{A}_i$ Unterstruktur von $\mathcal{A}$ ist.

b) Sei nun $\mathcal{B}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Kette von elementaren Unterstrukturen von $\mathcal{B}$. Zeigen Sie, dass dann auch $\mathcal{A}$ eine elementare Unterstruktur von $\mathcal{B}$ ist.

Abgabe bis Montag, den 3.11., 09:00 Uhr
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: `http://wwwmath.uni-muenster.de/u/franziska.jahnke/mt/`