Prof. K. Tent
Dr. F. Jahnke

Universität Münster
Wintersemester 2014/2015

**Modelltheorie**
**Übungsblatt 3**

**Aufgabe 1.** Eine Klasse $\mathcal{C}$ von $\mathcal{L}$-Strukturen heißt *endlich axiomatisierbar*, wenn es die Modellklasse einer endlichen $\mathcal{L}$-Theorie ist. Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}$ genau dann endlich axiomatisierbar ist, wenn sowohl $\mathcal{C}$ als auch das Komplement von $\mathcal{C}$ eine elementare Klasse ist.

**Aufgabe 2.** Sei $T$ eine Theorie in $\mathcal{L}_{ring}$, die die Körperaxiome $T_{Kp}$ enthält. Zeigen Sie:

a) Wenn $T$ Modelle beliebig großer Charakteristik hat, dann hat $T$ ein Modell der Charakteristik 0.

b) Für jede $\mathcal{L}_{ring}$-Aussage $\phi$, die in allen Körpern der Charakteristik 0 gilt, gibt es eine Primzahl $p$, so dass $\phi$ in allen Körpern der Charakteristik $\geq p$ gilt.

c) Die Theorie der Körper der Charakteristik 0 ist nicht endlich axiomatisierbar.

**Aufgabe 3.** Sei $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, 0, <, f^{\mathcal{A}})$, wobei $f$ ein einstelliges Funktionssymbol ist. Wir nennen ein Element $x \in \mathcal{A}^* \succ \mathcal{A}$ *infinitesimal*, wenn $-r < x < r$ für alle $r \in \mathcal{A}^{>0}$ gilt.
Zeigen Sie: Wenn $f^{\mathcal{A}}(0) = 0$ gilt, dann ist $f^{\mathcal{A}}$ genau dann in 0 stetig, wenn in jeder elementaren Erweiterung $\mathcal{A}^*$ von $\mathcal{A}$ die Abbildung $f^{\mathcal{A}^*}$ infinitesimale Elemente auf infinitesimale Elemente abbildet.

**Aufgabe 4.**

a) Zeigen Sie, dass die Theorie der $K$-Vektorräume $\kappa$-kategorisch für $\kappa > |K|$ ist.

b)* Betrachten Sie die Sprache der Graphen $\mathcal{L}_R = \{R\}$, wobei $R$ ein zweistelliges Relationssymbol ist. Wir fassen $\mathcal{L}_R$-Strukturen als Graphen auf, wobei $R(x, y)$ heißt, dass es eine Kante von $x$ nach $y$ gibt. Sei

$$\begin{aligned} T_{RG} = & \big\{\forall x, y\big(\big(R(x,y) \leftrightarrow R(y,x)\big) \wedge \neg R(x,x)\big)\big\} \\ & \cup \big\{\forall x_0, \ldots, x_{m-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}\big(\bigwedge_{i \neq j} \neg x_i = y_j \rightarrow \\ & \exists z\big(\bigwedge_{i<m} R(z, x_i) \wedge \neg z = x_i\big) \wedge \big(\bigwedge_{j<n} \neg R(z, y_j) \wedge \neg z = y_j\big)\big) \;\mid\; m, n \in \mathbb{N}_{>0}\big\} \end{aligned}$$

die $\mathcal{L}_R$-Theorie des Zufallsgraphen. Zeigen Sie, dass $T_{RG}$ $\aleph_0$-kategorisch ist.

*Hinweis:* Verwenden Sie die Back-and-Forth Methode.

*Abgabe bis Montag, den 10.11., 09:00 Uhr*
*Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.*
*Web-Seite:* `http://wwwmath.uni-muenster.de/u/franziska.jahnke/mt/`