Prof. M. Hils
Dr. M. Bays

Universität Münster
Wintersemester 2017/2018

Logik 2 (Modelltheorie)
Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{K}$ die Klasse der endlichen partiellen Ordnungen in der Sprache $\{\leq\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{K}$ eine Fraïssé-Klasse ist, dass heißt (HP), (JEP), und (AP) besitzt.

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{K}$ die Klasse der endlichen (ungerichteten) Graphen. Zeigen Sie, dass der abzählbare Zufallsgraph der Fraïssé-Limes von $\mathcal{K}$ ist.
Anmerkung: Dies liefert einen alternativen Beweis für Quantorenelimination in der Theorie T_{RG}.

Aufgabe 3. Betrachten Sie $\mathcal{M} = (\aleph_2 \times \mathbb{Q}; <)$ mit der lexikographischen Ordnung

$$(\alpha, q) < (\alpha', q') \Leftrightarrow (\alpha < \alpha' \vee (\alpha = \alpha' \wedge q < q')).$$

Zeigen Sie:

a) Es gibt keinen Automorphismus $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$, sodass $\sigma((0,0)) = (\aleph_1, 0)$

b) Es gibt eine elementare Erweiterung $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$, sodass es für je zwei Elemente $a, b \in N$ einen Automorphismus $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{N})$ gibt mit $\sigma(a) = b$.
Hinweis: Verwenden Sie allgemeine Techniken aus der Vorlesung.

Bonus) Bestimmen Sie die Kardinalität der Menge der Bahnen für die Gruppenwirkung $\mathrm{Aut}(\mathcal{M}) \curvearrowright M$.

Erinnerung: $\emptyset$-Interpretationen wurden auf Übungsblatt 4 definiert. Für Strukturen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ und $A \subseteq M$, nennen wir eine $\emptyset$-Interpretation von $\mathcal{N}$ in $\mathcal{M}_A$ eine *A-Interpretation* von $\mathcal{N}$ in $\mathcal{M}$. $\mathcal{N}$ heißt *A-interpretierbar* in $\mathcal{M}$, wenn es eine A-Interpretation von $\mathcal{N}$ in $\mathcal{M}$ gibt.

Aufgabe 4. Seien $\mathcal{M}$ eine κ-saturierte Struktur und $A \subseteq M$ mit $|A| < \kappa$. Sei $\mathcal{N}$ A-interpretierbar in $\mathcal{M}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{N}$ κ-saturiert ist.

Abgabe bis Montag, den 04.12., 12:00 Uhr, Briefkasten 174.
Die Übungsblätter sollen alleine oder zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.