Prof. M. Hils
Dr. M. Bays

Universität Münster
Wintersemester 2017/2018

Logik 2 (Modelltheorie)
Übungsblatt 11

Bonusaufgabe 1. Sei T eine Theorie.

a) Angenommen, jeder Typ $p \in S_n(T)$ für $n \geq 1$ wird bereits von seinen quantorenfreien Anteil impliziert. Zeigen Sie: wenn $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$ ω-saturiert sind, dann besitzt die Familie der partiellen Isomorphismen zwischen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ mit endlich erzeugten Definitionsbereichen die hin-und-her-Eigenschaft.

b) Folgern Sie aus a): T besitzt Quantorenelimination genau dann, wenn jeder Typ $p \in S_n(T)$, $n \geq 1$, bereits von seinem quantorenfreien Anteil impliziert wird.

Bonusaufgabe 2. Betrachten Sie die $\{<, c\}$-Theorie $LO_{\min}$ der unendlichen linearen Ordnungen mit minimalem Element c, und die $\{<, c\}$-Theorie $DLO_{\min}$ der unendlichen dichten linearen Ordnungen mit minimalem Element c und keinem maximalem Element.

Zeigen Sie, dass $DLO_{\min}$ der Modellbegleiter von $LO_{\min}$ ist.

Aufgabe 3. Betrachten Sie die Struktur

$$\mathcal{M} := (\mathbb{Q} \times \{0,1\}; +', -', (0,0)),$$

wobei für alle $q, q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ und alle $x, y \in \mathbb{Q} \times \{0,1\}$ gilt:

$$\begin{aligned}
(q_1, 0) +' (q_2, 0) &= (q_1 + q_2, 0) \\
(q_1, 1) -' (q_2, 1) &= (q_1 - q_2.0) \\
(q, 1) +' y = x +' (q, 1) &= (0, 0) \\
(q, 0) -' y = x -' (q, 0) &= (0, 0).
\end{aligned}$$

Zeigen Sie:

a) Die Teilmenge $\mathbb{Q} \times \{0\}$ ist quantorenfrei definierbar.

b) $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ besitzt Quantorenelimination.

c) Die Teilmenge $\mathbb{Q} \times \{0\}$ ist streng minimal.

d) $\mathrm{acl}(\mathbb{Q} \times \{0\}) = \mathbb{Q} \times \{0\}$.

e) $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ ist fast streng minimal.

Aufgabe 4. Sei E eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X, die genau eine Äquivalenzklasse der Kardinalität n besitzt für jedes $0 < n \in \omega$, und keine unendliche Äquivalenzklasse besitzt. Für $0 < n \in \omega$ sei c_n ein Element der Äquivalenzklasse mit Kardinalität n. Sei $\mathcal{M} := (X; E, (c_n)_n)$.
Zeigen Sie:

a) Th($\mathcal{M}$) besitzt Quantorenelimination.

b) Keine definierbare Teilmenge von $\mathcal{M}$ ist streng minimal.

c) $RM(\mathcal{M}) = 2$.

Abgabe bis Montag, den 22.01.2018, 12:00 Uhr, Briefkasten 174.
Die Übungsblätter sollen alleine oder zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.