

**Modelltheorie**  
**Übungsblatt 10**

**Aufgabe 1.** Sei  $T$  eine abzählbare total transzendente  $\mathcal{L}$ -Theorie und  $\kappa$  eine überabzählbare Kardinalzahl. Sei weiter  $\mathcal{M} \models T$  mit  $|\mathcal{M}| = \kappa$ . Zeigen Sie:

- a) Für jede reguläre Kardinalzahl  $\aleph_1 \leq \lambda < \kappa$  gibt es beliebig große  $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ , in denen jede  $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ -Formelmengende der Größe  $\lambda$  ausgelassen wird, die in  $\mathcal{M}$  ausgelassen wird.
- b) Wenn  $T$   $\kappa$ -kategorisch ist, dann ist  $T$  auch  $\lambda$ -kategorisch für alle überabzählbaren  $\lambda \leq \kappa$ .

*Hinweis:* Orientieren Sie sich am Beweis von Morley abwärts.

**Aufgabe 2.** Sei  $T$  eine total transzendente  $\mathcal{L}$ -Theorie und  $\varphi(x)$  eine  $\mathcal{L}$ -Formel, so dass  $T$  ein Vaught'sches Paar für  $\varphi(x)$  hat. Zeigen Sie, dass  $T$  für alle überabzählbaren Kardinalzahlen  $\kappa$  ein Modell  $\mathcal{M}$  der Größe  $\kappa$  hat, so dass  $\varphi(\mathcal{M})$  abzählbar ist.

*Hinweis:* Verwenden Sie den Satz von Vaught.

**Aufgabe 3.** Zeigen Sie, dass die  $\mathcal{L}_R$ -Theorie  $T_{RG}$  des Zufallsgraphen ein Vaught'sches Paar hat.

*Hinweis:* Sei  $\mathcal{G}$  der Zufallsgraph und  $v_0 \in G$  eine Ecke. Betrachten Sie den Teilgraphen  $\mathcal{G}_0$  mit Universum  $G_0 = G \setminus \{v_0\}$ . Finden Sie nun eine geeignete  $\mathcal{L}_R(G_0)$ -Formel  $\varphi(x)$  mit  $\varphi(\mathcal{G}) = \varphi(\mathcal{G}_0)$ .

Sei  $\mathcal{M}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur und  $A \subseteq M$ . Eine  $\mathcal{L}(A)$ -Formel  $\phi(x)$  heißt *algebraisch*, wenn die Menge  $\phi(\mathcal{M}) = \{m \in M \mid \mathcal{M} \models \phi(m)\}$  endlich ist. Ein Typ  $p \in S(A)$  heißt *algebraisch*, wenn  $p$  eine algebraische Formel enthält.

**Aufgabe 4.**

- a) Zeigen Sie, dass algebraische Typen isoliert sind.
- b) Sei  $A \subseteq M$  endlich und  $M$   $\omega$ -saturiert. Zeigen Sie, dass  $p \in S_1(A)$  genau dann algebraisch ist, wenn  $p(M)$  endlich ist.

*Abgabe bis Montag, den 12.1., 09:00 Uhr*

*Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.*

*Web-Seite: <http://wwwmath.uni-muenster.de/u/franziska.jahnke/mt/>*