

Modelltheorie
Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{L}_M = \{1, \cdot\}$ die Sprache der Monoide und $\mathcal{L}_G = \{1, \cdot, ^{-1}\}$ die Sprache der Gruppen.

- a) Geben Sie in beiden Sprachen ein Axiomensystem für die Klasse der Gruppen an.
- b) Zeigen Sie, dass \mathcal{L}_G -Unterstrukturen von Gruppen Gruppen sind, dagegen \mathcal{L}_M -Unterstrukturen nicht notwendigerweise. (Das heißt: Die Klasse der Gruppen ist in der Gruppensprache *abgeschlossen gegen Unterstrukturen*, in der Monoidsprache dagegen nicht).
- c) Ist die Klasse der Integritätsbereiche bzw. die Klasse der Körper abgeschlossen gegen Unterstrukturen (in der Ringsprache)?

Aufgabe 2. Sei \mathcal{A} eine \mathcal{L} -Struktur. Zeigen Sie:

- a) Wenn $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ \mathcal{L} -Unterstrukturen von \mathcal{A} sind, dann ist $\bigcap_{i \in I} \mathcal{B}_i$ leer oder Universum einer (eindeutig bestimmten) Unterstruktur.
- b) Wenn $S \subseteq A$ nicht leer ist, dann gibt es eine kleinste Unterstruktur $\langle S \rangle^{\mathcal{A}}$ von \mathcal{A} , die S enthält (die *von S erzeugte Unterstruktur*).
- c) Betrachten Sie die $\mathcal{L}_{\text{ring}}$ -Struktur $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, +^{\mathbb{Q}}, 0^{\mathbb{Q}}, 1^{\mathbb{Q}}, -^{\mathbb{Q}}, \cdot^{\mathbb{Q}})$. Beschreiben Sie $\langle \{\frac{1}{2}\} \rangle^{\mathcal{Q}}$.

Aufgabe 3. Sei \mathcal{A} eine \mathcal{L} -Struktur, $\emptyset \neq S \subseteq A$. Zeigen Sie

$$\langle S \rangle^{\mathcal{A}} = \{t^{\mathcal{A}}[s_1, \dots, s_n] \mid t(x_1, \dots, x_n) \text{ } \mathcal{L}\text{-Term, } s_i \in S\}.$$

Folgern Sie hieraus $|\langle S \rangle^{\mathcal{A}}| \leq \max\{|\mathcal{L}|, |S|, \aleph_0\}$.

Aufgabe 4.

- a) Sei \mathcal{A} eine \mathcal{L} -Struktur und $\sigma \in \text{Aut}(\mathcal{A})$ ein Automorphismus. Zeigen Sie, dass für jede \emptyset -definierbare Menge $D \subseteq A^n$ und alle $d \in D$ auch $\sigma(d) \in D$ gilt.
- b) Was sind die \emptyset -definierbaren Teilmengen von \mathbb{Q}^1 in der $\mathcal{L}_{\text{order}}$ -Struktur $(\mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}})$?

Abgabe bis Montag, den 27.10., 09:00 Uhr

Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.

Web-Seite: <http://www.math.uni-muenster.de/u/franziska.jahnke/mt/>