Prof. M. Hils
Dr. M. Bays

Universität Münster
Wintersemester 2017/2018

Modelltheorie
Übungsblatt 0

Aufgabe 1. Zeigen Sie mithilfe von Ultraprodukten, dass die folgenden Klassen nicht axiomatisierbar sind:

a) Die Klasse der Torsionsgruppen.
Anmerkung: Eine Gruppe G heißt Torsionsgruppe, wenn es für jedes $g \in G$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $g^n = 1$.

b) Die Klasse der endlich-dimensionalen K-Vektorräume für einen fest gewählten Körper K.

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{C}$ eine Klasse von $\mathcal{L}$-Strukturen. Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}$ genau dann eine axiomatisierbare Klasse ist, wenn $\mathcal{C}$ abgeschlosssen unter elementarer Äquivalenz und Ultraprodukten ist.

Aufgabe 3.

a) Zeigen Sie, dass ein Ultrafilter, der eine endliche Teilmenge enthält, ein Hauptultrafilter ist.

b) Sei $\mathcal{U}$ ein Nichthauptultrafilter mit Indexmenge ω. Zeigen Sie, dass jedes Ultraprodukt $\mathcal{M} = \Pi_i \mathcal{M}_i/\mathcal{U}$ von $\mathcal{L}$-Strukturen $\aleph_1$-kompakt ist. Das heißt, dass für jede abzählbare Menge $\{\phi_i(x) : i \in \omega\}$ von $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formeln, wenn $\mathcal{M} \models \exists x(\bigwedge_{i<n} \phi_i(x))$ für alle $n \in \omega$ gilt, dann gibt es $a \in \mathcal{M}$, sodass $\mathcal{M} \models \phi_i(a)$ für alle $i \in \omega$ gilt.

Aufgabe 4.

a) Betrachten Sie die Unterstruktur $(3\mathbb{Z}, +)$ von $(\mathbb{Z}, +)$.

   i) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Th}((3\mathbb{Z}, +)) = \mathrm{Th}((\mathbb{Z}, +))$.
   ii) Ist $(3\mathbb{Z}, +)$ eine elementare Unterstruktur von $(\mathbb{Z}, +)$?

b) Betrachten Sie die Struktur

$$(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq).$$

   i) Zeigen Sie, dass es eine abzählbare Teilmenge $B \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gibt, sodass $(B, \subseteq) \preceq (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$.
   ii) Zeigen Sie, dass es dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge $F_n \subseteq \mathbb{N}$ mit $|F_n| = n$ und $\mathcal{P}(F_n) \subseteq B$ gibt.

Blatt 0 wird nicht abgegaben.