Quotienten-Relationen

1 Einführung

Im Folgenden ist $\mathcal{M}$ eine o-minimale Struktur auf der Menge M.

Satz 1.1 ([PeSe97, Thm. 1.1]).
Sei $\mathcal{M}$ ω_1-saturiert. Ist $a \in M$ ein nicht-trivialer Punkt, so gibt es eine konvexe $\wedge$-definierbare Gruppe $G \subset M$ unendlicher Ordnung, sodass $a \in G$ und G dividierbar, angeordnet und abelsch ist.

Satz 1.2 ([PeSe97, Thm. 1.2]).
Sei $\langle I, <, +, 0 \rangle$ ein $\varnothing$-definierbares Gruppen-Intervall in einer ω_1-saturierten Struktur $\mathcal{M}$. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:

1. *Es gibt einen angeordneten Vektorraum $\mathcal{V} = \langle V, <, +, d(x), C \rangle_{d \in D}$ (wobei C eine Menge von Konstanten und D ein angeordneter Schiefkörper ist), ein Intervall $[-p, p] \subset V$ und einen ordnungserhaltenden Gruppenisomorphismus $\sigma : I \to [-p, p]$, sodass für jedes $\varnothing$-definierbare $S \subseteq I^n$ die Menge $\sigma(S)$ $\varnothing$-definierbar in $\mathcal{V}$ ist.*

2. *Es gibt einen reell abgeschlossenen Körper R, definierbar in $\mathcal{M}|I$ mit einem Teilintervall $I' \subseteq I$ als Grundmenge und der von $<$ induzierten Ordnung.*

Definition 1.3 ((Nicht-)Triviale Punkte).
Ein Element $a \in M$ heißt ***nicht-trivial über*** *$A \subseteq M$, falls ein offenes Interval I existiert mit $a \in I$ und eine A-definierbare stetige Funktion $F : I \times I \to M$, die streng monoton in beiden Koordinaten ist. Wir sagen a ist nicht-trivial, wenn a nicht-trivial über einem $A \subset M$ ist, und* ***trivial****, wenn a nicht nicht-trivial ist.*

Satz 1.4 (Trichotomie Satz [PeSe97, Thm. 1.3]).
Sei $\mathcal{M}$ eine ω_1-saturierte Struktur. Für ein Element $a \in \mathcal{M}$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:

1. *a ist trivial.*

2. *Die von $\mathcal{M}$ induzierte Struktur auf einer konvexen Umgebung von a ist ein angeordneter Vektorraum über einem angeordneten Schiefkörper.*

3. *Die von $\mathcal{M}$ induzierte Struktur auf einem offenen Intervall um a ist eine o-minimale Erweiterung eines reell abgeschlossenen Körpers.*

Für $p \in M$ sagen wir eine Eigenschaft P gilt für $x \in (p), x \in (p)^+, x \in (p)^-$, falls es $a < p < b$ gibt, sodass P für alle $x \in (a, b), x \in (p, b), x \in (a, b)$ gilt.

Definition 1.5 (Präorder [[PeSe97, Def. 2.11]).
Eine binäre Relation R heißt Präordnung, falls sie transitiv, reflexiv und total ist.

Notation 1.6 ([PeSe97, Def 2.13]).
Seien $f : X_1 \to Y_1, g : X_2 \to Y_2$ definierbare Funktionen und $p \in X_1 \cap X_2$. Wir schreiben

1. *$f \leqslant_p^+ g$, falls $f(p) = g(p)$ und $f(x) \leqslant g(x)$ für $x \in (p)^+$,*
2. *$f \leqslant_p^- g$, falls $f(p) = g(p)$ und $f(x) \leqslant g(x)$ für $x \in (p)^-$,*
3. *$f \leqslant_p g$, falls $f \leqslant_p^+ g$ und $g \leqslant_p^- f$,*
4. *$f <_g^+$, falls $f \leqslant_p^+$ und $f(x) \neq g(x)$ für $x \in (p)^+$.*

2 q-Relationen

Definition 2.1 (q-Relation [PeSe97, Def. 3.1]).
*Sei R eine vierstellige definierbare Relation und $\varnothing \neq \mathcal{A} \subseteq M$ offen und konvex. Wir sagen R ist eine **q-Relation** auf $\mathcal{A}$, falls (Schreibe $\langle a, b\rangle R\langle c, d\rangle$ statt $R(a, b, c, d)$)*

(Q1) R eine Präordnung auf $\mathcal{A}^2$ ist,

(Q2) für alle $a, b, a_\uparrow \in \mathcal{A}$ gilt $\langle a, b\rangle R\langle a_\uparrow, b\rangle$ genau dann, wenn $a \leqslant a_\uparrow$,

(Q3) $\langle a_1, b_1\rangle R\langle a_2, b_2\rangle \iff \langle b_2, a_2\rangle R\langle b_1, a_1\rangle$,

(Q4) aus $\langle a, b\rangle R\langle c, d\rangle$ und $\langle b, a'\rangle R\langle d, c'\rangle$ folgt $\langle a, a'\rangle R\langle c, c'\rangle$,

(Q5) für alle $a, a_\uparrow, a_\downarrow, b \in \mathcal{A}$ mit $a_\downarrow < a_\uparrow$ gibt es $b_\downarrow, b_\uparrow \in \mathcal{A}$, sodass

$$\langle a_\downarrow, a\rangle R\langle b, b_\downarrow\rangle R\langle a_\uparrow, a\rangle \quad \text{und} \quad \langle a_\downarrow, a\rangle R\langle b_\uparrow, b\rangle R\langle a_\uparrow, a\rangle.$$

Beispiel 2.2 ([PeSe97, Ex. 3.2]).
Sei $\mathcal{G}$ eine angeordnete Gruppe mit $\leqslant$. Dann definiert

$$ab^{-1} \leqslant cd^{-1}$$

eine q-Relation.

Beispiel 2.3 ([PeSe97, Ex. 3.3]).
Betrachte die Funktionen

$$f_a(x) = x^2 + ax \text{ für } a \in \mathbb{R}^+.$$

Die Relation

$$\langle a,b\rangle R\langle c,d\rangle :\Longleftrightarrow f_a f_b^{-1} \leqslant_0^+ f_c f_d^{-1}$$

ist eine q-Relation auf $\mathbb{R}^+$.

Wähle eine offene konvexe Menge $\mathcal{A} \subseteq M$ und eine $\varnothing$-definierbare q-Relation $R \subseteq M^4$ auf $\mathcal{A}$.

Lemma 2.4 ([PeSe97, Lem. 3.5])**.**
Für $a, b, b_\downarrow \in \mathcal{A}$ *gilt*

1. $\langle a,a\rangle R\langle b,b\rangle$,

2. $\langle a,b\rangle R\langle a,b_\downarrow\rangle \Longleftrightarrow b_\downarrow \leqslant b$.

Beweis.

1. Folgt aus der Totalität von R und (Q3).

2. Folgt aus (Q2) und (Q3).

□

Definition 2.5 ([PeSe97, Def. 3.6])**.**
Definiere eine vierstellige Relation E *auf* $\mathcal{A}$ *durch*

$$\langle a,b\rangle E\langle c,d\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \langle c_\downarrow,d\rangle R\langle a,b\rangle R\langle c_\uparrow,d\rangle \text{ für alle } c_\downarrow < c < c_\uparrow.$$

Dann ist E *definierbar in* $\mathcal{M}|\mathcal{A}$.

Lemma 2.6 ([PeSe97, Lem. 3.7])**.**
Seien $a,b,c,d \in \mathcal{A}$, *sodass* $\langle a,b\rangle E\langle c,d\rangle$.

1. *Für* $c' \in \mathcal{A}$ *mit* $\langle c',d\rangle R\langle a,b\rangle$ *gilt schon* $c' \leqslant c$.

2. *Für* $c' \in \mathcal{A}$ *mit* $\langle a,b\rangle R\langle c',d\rangle$ *gilt schon* $c \leqslant c'$.

Beweis.

1. Durch Widerspruch. Angenommen $c' \in \mathcal{A}$ mit $\langle c',d\rangle R\langle a,b\rangle$ und $c < c'$. Wähle $c'' \in \mathcal{A}$ mit $c < c'' < c'$. Wegen $\langle a,b\rangle E\langle c,d\rangle$ gilt dann $\langle a,b\rangle R\langle c'',d\rangle$ und nach Annahme und Transitivität von R $\langle c',d\rangle R\langle c'',d\rangle$. Mit (Q2) ist dies ein Widerspruch.

2. Analog.

□

Lemma 2.7 ([PeSe97, Lem. 3.8]).
Seien $a, b, c, d \in \mathcal{A}$. Dann sind äquivalent

1. $\langle a, b\rangle E\langle c, d\rangle$
2. $c = \inf\{c' \in \mathcal{A} \mid \langle a, b\rangle R\langle c', d\rangle\}$
3. $c = \sup\{c' \in \mathcal{A} \mid \langle c', d\rangle R\langle a, b\rangle\}$

Proof. Wir zeigen die Äquivalenz 1. $\iff$ 2.:

"$\Rightarrow$" Folgt direkt aus 2.6(2).

"$\Leftarrow$" Seien $c_\downarrow, c_\uparrow \in \mathcal{A}$ beliebig mit $c_\downarrow < c < c_\uparrow$. Da $c_\downarrow < \inf\{c' \in \mathcal{A} \mid \langle a, b\rangle R\langle c', d\rangle\}$, folgt

$$\neg(\langle a, b\rangle R\langle c_\downarrow, d\rangle)$$

und mit der Totalität von R schon

$$\langle c_\downarrow, d\rangle R\langle a, b\rangle.$$

Andererseits, da $c < c_\uparrow$ und $\langle a, b\rangle R\langle c, d\rangle$, folgt mit (Q2)

$$\langle a, b\rangle R\langle c_\uparrow, d\rangle.$$

□

Lemma 2.8 ([PeSe97, Lem. 3.9]).
E ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{A}^2$.

Beweis.

Reflexivität: Folgt aus (Q1).

Symmetrie: Sei $\langle a, b\rangle E\langle c, d\rangle$ für $a, b, c, d \in \mathcal{A}$. Seien $a_\downarrow, a_\uparrow \in \mathcal{A}$ beliebig mit $a_\downarrow < a < a_\uparrow$. Nach (Q5) gibt es $c_\downarrow, c_\uparrow \in \mathcal{A}$, sodass

$$\langle a_\downarrow, b\rangle R\langle c_\downarrow, d\rangle R\langle a, b\rangle R\langle c_\uparrow, d\rangle R\langle a_\uparrow, b\rangle$$

Aus Lemma 2.6 folgt $c_\downarrow \leqslant c \leqslant c_\uparrow$ und mit (Q2) gilt

$$\langle a_\downarrow, b\rangle R\langle c, d\rangle R\langle a_\uparrow, b\rangle,$$

was zu zeigen war.

Transitivität: Seien $a, b, c, d, e, f \in \mathcal{A}$, sodass $\langle a, b\rangle E\langle c, d\rangle E\langle e, f\rangle$. Seien weiter $e', e'' \in \mathcal{A}$ beliebig mit $e' < e < e''$. Wähle $e_\downarrow, e_\uparrow \in \mathcal{A}$ mit

$$e' < e_\downarrow < e < e_\uparrow < e''.$$

Wegen $\langle c, d\rangle E\langle e, f\rangle$ haben wir $\langle e_\downarrow, f\rangle R\langle c, d\rangle R\langle e_\uparrow, f\rangle$. Nach (Q5) gibt es $a_\downarrow, a_\uparrow \in \mathcal{A}$, sodass

$$\langle e', f\rangle R\langle a_\downarrow, b\rangle R\langle e_\downarrow, f\rangle \quad \text{und} \quad \langle e_\uparrow, f\rangle R\langle a_\uparrow, b\rangle R\langle e'', f\rangle.$$

Zusammengesetzt ergibt sich

$$\langle e', f\rangle R\langle a_\downarrow, b\rangle R\langle c, d\rangle R\langle a_\uparrow, b\rangle R\langle e'', f\rangle.$$

Nach Voraussetzung und Symmetrie von E gilt $\langle c, d\rangle E\langle a, b\rangle$, nach Lemma 2.6 folgt wieder $a_\downarrow \leqslant a \leqslant a_\uparrow$, also

$$\langle e', f\rangle R\langle a, b\rangle R\langle e'', f\rangle.$$

□

Notation 2.9.
Wir schreiben a/b für die Äquivalenzklasse von $(a, b) \in \mathcal{A}^2$ bezüglich E.

Lemma 2.10 ([PeSe97, Lem. 3.10])**.**

1. *Für alle $a, b \in \mathcal{A}$ gilt $a/a = b/b$.*
2. *Sei $a, b, c, d \in \mathcal{A}$. Dann gilt*
$$a/b = c/d \Longleftrightarrow b/a = d/c$$
3. *Für alle $a, b, c \in \mathcal{A}$ existieren eindeutige $d, e \in \mathcal{A}$, sodass $a/b = d/c$ und $a/b = c/e$.*

Beweis.

1. Folgt direkt aus Lemma 2.4(1).
2. Sei $a/b = c/d$ und $d_1 < d < d^1$. Wähle $d_2, d^2 \in \mathcal{A}$, sodass
$$d_1 < d_2 < d < d^2 < d^1.$$
Nach (Q5) existieren $c_\downarrow, c_\uparrow \in \mathcal{A}$, sodass
$$\langle d_1, c\rangle R\langle d, c^1\rangle R\langle d_2, c\rangle \quad \text{und} \quad \langle d^2, c\rangle R\langle d, c_1\rangle R\langle d^1, c\rangle.$$
Da $d_2 < d < d^2$, folgt aus (Q2), (Q3) und Lemma 2.4, dass $c_\downarrow < c < c_\uparrow$. Da $a/b = c/d$, folgt
$$\langle c_\downarrow, d\rangle R\langle a, b\rangle R\langle c_\uparrow, d\rangle$$
und mit (Q3) folgt
$$\langle c, d^1\rangle R\langle a, b\rangle R\langle c, d_1\rangle.$$
Die Rückrichtung folgt aus Symmetriegründen.

3. Die Eindeutigkeit folgt aus Lemma 2.7. Wegen (2) genügt es, die Existenz von d zu zeigen. Da $\mathcal{A}$ offen ist, können wir $a_\downarrow, a_\uparrow \in \mathcal{A}$ wählen, sodass $a_\downarrow < a < a_\uparrow$. Nach (Q5) gibt es $d_\downarrow, d_\uparrow \in \mathcal{A}$, sodass
$$\langle a_\downarrow, b\rangle R\langle d_\downarrow, c\rangle R\langle a, b\rangle R\langle d_\uparrow, c\rangle R\langle a_\uparrow, b\rangle.$$
Da R definierbar und $\mathcal{M}$ o-minimal ist, gibt es $d = \inf\{d' \in [d_\downarrow, d_\uparrow] \mid \langle a, b\rangle R\langle d', c\rangle\}$. Da $\mathcal{A}$ konvex ist, ist $d \in \mathcal{A}$. Man sieht leicht, dass $\langle a, b\rangle E\langle d, c\rangle$.

□

Lemma 2.11 ([PeSe97, Lem. 3.11]).
Seien $a, b, c, d, e, f \in \mathcal{A}$.

1. *Aus $a/b = c/d$ und $b/e = d/f$ folgt $a/e = c/f$.*
2. *Aus $a/b = c/d$, $a/b \neq e/f$ und $\langle a, b\rangle R\langle e, f\rangle$ folgt $\langle c, d\rangle R\langle e, f\rangle$.*
3. *Falls $\langle c, d\rangle R\langle a, b\rangle$ und $\langle a, b\rangle R\langle c, d\rangle$, dann gilt schon $a/b = c/d$*

Beweis.

1. Seien $c_1 < c < c^1$. Es ist zu zeigen, dass
$$\langle c_1, f\rangle R\langle a, e\rangle R\langle c^1, f\rangle.$$
Wähle $c_2, c_3, c^2, c^3 \in \mathcal{A}$, sodass
$$c_1 < c_2 < c_3 < c < c^3 < c^2 < c^1.$$
Nach (Q5) gibt es $d_\downarrow$ und $d_\uparrow$, sodass
$$\langle c_2, d\rangle R\langle c_1, d_\downarrow\rangle R\langle c_3, d\rangle \quad \text{und} \quad \langle c^3, d\rangle R\langle c^1, d_\uparrow\rangle R\langle c^2, d\rangle.$$
Nach Lemma 2.4 ist $d_\downarrow < d < d_\uparrow$. Da nach Voraussetzung $\langle a, b\rangle E\langle c, d\rangle$, gilt
$$\langle c_3, d\rangle R\langle a, b\rangle R\langle c^3, d\rangle$$
und damit auch
$$\langle c_1, d_\downarrow\rangle R\langle a, b\rangle R\langle c^1, d_\uparrow\rangle.$$
Da außerdem $\langle b, e\rangle E\langle d, f\rangle$, erhalten wir
$$\langle d_\downarrow, f\rangle R\langle b, e\rangle R\langle d_\uparrow, f\rangle.$$
Mit den letzten beiden Aussagen und (Q4) folgt
$$\langle c_1, f_\downarrow\rangle R\langle a, e\rangle R\langle c^1, f_\uparrow\rangle.$$

2. Mit der Kontraposition von 2.7 folgt aus $a/b \neq e/f$, dass es $a_\uparrow > a$ gibt, sodass $\langle a_\uparrow, b\rangle R\langle e, f\rangle$. Jedoch gilt ja $\langle c, d\rangle E\langle a, b\rangle$, also $\langle c, d\rangle R\langle a_\uparrow, b\rangle R\langle e, f\rangle$.

3. Für $c_\downarrow < c < c_\uparrow$ gilt

$$\langle c_1, d\rangle R\langle c, d\rangle R\langle a, b\rangle R\langle c, d\rangle R\langle c_\uparrow, d\rangle$$

also $\langle a, b\rangle E\langle c, d\rangle$.

□

Für $a, b, c \in \mathcal{A}$ definieren wir $a/b * c/d = a/c$. Nach Lemma 2.10(3) ist dies eine Abbildung auf $\mathcal{A}^2/E$ und nach 2.11(1) wohldefiniert. Wir definieren die Relation $<$ auf $\mathcal{A}^2/E$ durch

$$a/b < e/f \iff \langle a, b\rangle R\langle e, f\rangle, \text{ falls } a/b \neq e/f.$$

Nach 2.11 und (Q1) ist dies eine wohldefinierte lineare Ordnung auf $\mathcal{A}^2/E$.

Lemma 2.12 ([PeSe97, Lem. 3.12]).
Die Struktur $\langle \mathcal{A}^2/E, <, *\rangle$ ist eine angeordnete Gruppe mit neutralem Element a/a.

Beweis.

1. Assoziativität von $*$ ist klar.

2. Nach Lemma 2.10(1) ist $\mathbb{1} := \bigcup_{a\in\mathcal{A}} a/a \in \mathcal{A}^2/E$ und wegen $a/b * c/c = a/b * b/b = a/b$ das neutrale Element.

3. $(a/b)^{-1} = b/a$, denn $a/b * b/a = a/a = \mathbb{1}$, es existiert also ein Inverses.

4. $<$ ist verträglich mit $*$, denn sei $a/b < c/d$, so gilt für die Linkstranslation mit einem Element $X = e/a = f/c$ (Darstellungen existieren nach 2.10(3)), dass

$$\langle e, a\rangle R\langle f, c\rangle \quad \text{und } \langle a, b\rangle R\langle c, d\rangle$$

und damit nach (Q4)

$$e/b < f/d \iff X * a/b < X * c/d.$$

□

Satz 2.13 ([PeSe97, Satz 3.13]).
Sei $R \subseteq M^4$ eine B-definierbare q-Relation auf einer offenen konvexen Menge $\mathcal{A} \subseteq M$. Dann gibt es für jedes Element $e \in \mathcal{A}$ eine Be-definierbare Abbildung $*_e$, sodass $\langle \mathcal{A}, <, *_e\rangle$ eine konvexe $\wedge$-definierbare angeordnete Gruppe mit neutralem Element e ist.

Beweis. Für ein festes $e \in \mathcal{A}$ ist nach Lemma 2.10(3) die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\to \mathcal{A}^2/E \\ x &\mapsto x/e \end{aligned}$$

eine ordnungserhaltende Bijektion. Außerdem ist die Abbildung definierbar in $\mathcal{M}|\mathcal{A}$. Somit induziert $*_e$ eine Gruppenstruktur auf $\mathcal{A}$ mit neutralem Element e. □

3 Kriterien für q-Relationen

Satz 3.1 ([PeSe97, Satz 3.19]).
Sei $A \subseteq M$ ein offenes Intervall und $B \subseteq M$ endlich. Sei $R \subseteq A^4$ eine B-definierbare Relation, die (Q1)-(Q4) auf A erfüllt, sowie für $a, b, c, d \in A$

(R1) falls $c > d$, dann $\langle b, a\rangle R\langle c, d\rangle$ für $b \in (a)^+$,

(R2) falls $c < d$, dann $\langle c, d\rangle R\langle b, a\rangle$ für $b \in (a)^-$,

(R3) falls $c < d$, dann $\langle c, d\rangle R\langle d, a\rangle$ für $b \in (a)^-$,

(R4) falls $c > d$, dann $\langle d, a\rangle R\langle c, b\rangle$ für $b \in (a)^+$.

Ist $\mathcal{A} \subseteq A$ eine gute konvexe Menge über B, dann ist R eine q-Relation auf $\mathcal{A}$.

Definition 3.2 ($\mathcal{M}$-cut [PeSe97, Def. 3.14]).
*Für $a \in M$ und $B \subseteq M$ definieren wir den **$\mathcal{M}$-cut von a über B** als die Menge*

$$\{m \in M \mid \forall b_1, b_2 \in B : b_1 < a < b_2 \Rightarrow b_1 < m < b_2\}$$

Definition 3.3 ([PeSe97, Def. 3.15]).
*Ein Element a heißt dcl-**intern** in einer Menge C, falls für jedes endliche $C_0 \subseteq C$ $c_1, c_2 \in C$ existieren, sodass $c_1 < a < c_2$, $dim(c_1c_2/C_0a) = 2$ und $(c_1, c_2) \cap dcl(C_0a) = \{a\}$.*

Definition 3.4 ([PeSe97, Def. 3.16]).
*Sei $B \subseteq M$ endlich. Eine offene konvexe Menge $\mathcal{A} \subseteq M$ heißt **gut über** B, falls es ein $a^* \in \mathcal{A}$ und eine unendliche Menge $C \subseteq M$ gibt, sodass*

1. *$dim(a * /B) = 1$,*
2. *a^* ist dcl-intern,*
3. *$\mathcal{A}$ ist der $\mathcal{M}$-cut von a^* über C.*

Beispiel 3.5 ([PeSe97, Bsp. 3.17]). *Inhalt...*

Definition 3.6 (Generische Punkte).
*Sei $U \subset M^n$ eine A-definierbare Menge. Ein Punkt $\bar{u} \in U$ heißt **generisch in** U **über** A, falls $dim(\bar{u}/A) = dim(U)$.*

Ist $\mathcal{M}$ ω-saturiert, so enthält jede definierbare Menge einen generischen Punkt über seiner Definitionsparametermenge.

Lemma 3.7 ([PeSe97, Lem. 3.18]).
Sei $\mathcal{M}$ ω_1-saturiert, $B \subseteq M$ endlich und a^* generisch in einem offenen Intervall $I \subseteq M$ über B. Dann gibt es $\mathcal{A} \subseteq I$, die a^* enthält und gut über B ist.

Beweis. Wir erhalten C durch mehrmaliges Anwenden der Saturiertheit von $\mathcal{M}$, durch welches wir in jedem Schritt $c_n < a^* < c^n$ erhalten, sodass für alle $c, c' \in dcl(c_1, ..., c_{n-1}, c^1, ..., c^{n-1})$ mit $c < a^* < c'$ gilt, dass

$$c < c_n < a^* < c^n < c'.$$

Dann ist $\mathcal{A}$ der $\mathcal{M}$-cut von a^* über C. □

Im Folgenden gelte nun die Situation von Satz 3.1, d.h. $A \subseteq M$ sei ein offenes Intervall, $B \subseteq M$ endlich, $R \subseteq A^4$ eine B-definierbare Relation, die (Q1)-(Q4) und (R1)-(R4) auf A erfüllt, und $\mathcal{A} \subseteq A$ sei eine gute konvexe Menge über B. Seien weiter C und a^* wie in Definition 3.4.

Lemma 3.8 ([PeSe97, Lem. 3.20]).
Sei $\varphi(x, y)$ eine Formel über B. Falls $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ existieren mit $a_1 < a_2$, für die $\varphi(a_1, a_2)$ gilt, dann gilt $\varphi(a, b)$ schon für alle $a, b \in \mathcal{A}$.

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Angenommen, es gibt $a \in \mathcal{A}$ mit $a < a^*$, sodass $\varphi(a, a*)$ erfüllt ist.
   Da $\varphi(x, a^*)$ eine Formel über C ist und a^* dcl-intern ist, existiert $c \in C$ mit $c < a^*$, sodass $\varphi(a, a^*)$ für alle $a \in (c, a^*)$. Nach Annahme können wir c genersich über Ba^* wählen, also $a*$ generisch über Bc. Es folgt, dass für alle $b \in \mathcal{A}$ und $a \in (c, b)$ die Formel $\varphi(a, b)$ gilt. Damit gilt für alle $a, b \in \mathcal{A}$ mit $a < b$, dass $\varphi(a, b)$ gilt.

2. Gelte nun $\neg\varphi(a, a*)$ für alle $a \in \mathcal{A}$ mit $a < a*$. Wende dasselbe Argument wie im ersten Fall auf $\neg\varphi$ an, dann gilt $\neg\varphi(a, b)$ für alle $a, b \in \mathcal{A}$ mit $a < b$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme des Lemmas, dass es $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ gibt mit $a_1 < a_2$, sodass $\varphi(a_1, a_2)$ gilt.

□

Lemma 3.9 ([PeSe97, Lem. 3.21]).
Für $a, a', b \in \mathcal{A}$ gibt es $b_\downarrow, b_\uparrow \in \mathcal{A}$, sodass

$$\langle b_\downarrow, b\rangle R\langle a, a'\rangle R\langle b_\uparrow, b\rangle.$$

Beweis. Da $\mathcal{A}$ ein $\mathcal{M}$-cut über C ist, genügt es zu zeigen, dass für alle $c_\downarrow, c_\uparrow \in C \cap A$ mit $c_\downarrow < a^* < c_\uparrow$

$$\langle c_\downarrow, b\rangle R\langle a, a'\rangle R\langle c_\uparrow, b\rangle.$$

Angenommen, dies sei falsch, d.h. es gebe $c_\downarrow \in C \cap A$ mit $c_\downarrow < a^*$ sodass

$$\langle a, a' \rangle R \langle c_\downarrow, b \rangle.$$

Da a^* dcl-intern ist, können wir o.B.d.A annehmen, dass a^* generisch über $Bc_\downarrow$ ist (wähle $c_\downarrow$ groß genug). Sei $c' \in C \cap (c_\downarrow, a^*)$ beliebig, sodass a^* generisch ist über $Bc_\downarrow, c'$ [1]. Aus $c' < a^*$ und $c' \in C$ folgt $c' < b$ (da b im $\mathcal{M}$-cut über a^* ist), also nach Annahme

$$\langle a, a' \rangle R \langle c_\downarrow, c' \rangle.$$

Bemerke: $\mathcal{A}$ ist gut über $Bc_\downarrow, c'$ und a' ist generisch über C [2].
Da $c' > c_\downarrow$, folgt mit der Abschätzung oben und (R2), dass $a < a'$, also mit Lemma 3.8 schon

$$\langle a'', a' \rangle R \langle c_\downarrow, c' \rangle \text{ für } a'' \in (a')^-.$$

Mit (R2) gilt jedoch

$$\langle c_\downarrow, c' \rangle R \langle a''', a' \rangle \text{ für } a''' \in (a')^-,$$

und wegen der Totalität von R

$$\langle a'', a' \rangle R \langle a''', a' \rangle \text{ für } a'', a''' \in (a')^-.$$

Dies ist ein Widerspruch zu (Q2). □

Beweis von Satz 3.1. Offenbar ist nur zu zeigen, dass in der beschriebenen Situation (Q5) gilt. Dies soll nun geschehen [[PeSe97, Lem. 3.22-23]].
Wir zeigen zunächst, dass $b_\uparrow$ existiert, dass (Q5) erfüllt.
Nach Lemma 3.9 existieren $d_\downarrow, d_\uparrow \in \mathcal{A}$ sodass

$$\langle d_\downarrow, b \rangle R \langle a_\downarrow, a \rangle R \langle d_\uparrow, b \rangle.$$

Setze

$$d' = sup\{d \in [d_\downarrow, d_\uparrow] \mid \langle d, b \rangle R \langle a_\downarrow, a \rangle\}$$

Da R definierbar ist, existiert ein solches d'. Die Totalität von R erlaubt folgende Fallunterscheidung:

$\langle d', b \rangle R \langle a_\downarrow, a \rangle$ Da $d' \in \mathcal{A}$ und d' generisch über B ist, können wir (R1) anwenden und erhalten ein $b_\uparrow \in \mathcal{A}$ mit $b_\uparrow > d'$, sodass $\langle b_\uparrow, d' \rangle R \langle a_\uparrow, a_\downarrow \rangle$. Mit (Q4) und der Fallvoraussetzung folgt

$$\langle b_\uparrow, b \rangle R \langle a_\uparrow, a \rangle$$

und da $b_\uparrow > d'$ folgt nach Wahl von d' als Supremum

[1] Warum existiert das?
[2] Wieso?

$$\langle a_\downarrow, a\rangle R\langle b_\uparrow, b\rangle.$$

$\langle a_\downarrow, a\rangle R\langle d', b\rangle$ Es bleibt zu zeigen $\langle d', b\rangle R\langle a_\downarrow, a\rangle$. Wir nehmen an $\langle a_\downarrow, a\rangle R\langle d', b\rangle$. Nach (R2) gibt es ein $b_\uparrow \in \mathcal{A}$ mit $b_\uparrow < d'$, sodass

$$\langle a_\downarrow, a_\uparrow\rangle R\langle b_\uparrow, d'\rangle.$$

Wieder folgt mit (Q4)

$$\langle a_\downarrow, a\rangle R\langle b_\uparrow, b\rangle.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von d' als Supremum, da $b_\uparrow < d'$.

Es gilt nun, $b_\downarrow$ für (Q5) zu finden.
Nach (R3) gibt es $a' \in \mathcal{A}$ mit $a' < a$, sodass

$$\langle a_\downarrow, a'\rangle R\langle a_\uparrow, a\rangle.$$

Da $a' < a$, gilt weiter

$$\langle a_\downarrow, a\rangle R\langle a_\downarrow, a'\rangle R\langle a_\uparrow, a\rangle.$$

Mit derselben Konstruktion wie für $b_\uparrow$ können wir jetzt $b_\downarrow \in \mathcal{A}$ finden, sodass

$$\langle a', a_\downarrow\rangle R\langle b_\downarrow, b\rangle R\langle a, a_\downarrow\rangle.$$

Damit gilt $\langle a_\downarrow, a\rangle R\langle b, b_\downarrow\rangle R\langle a_\downarrow, a'\rangle$ und so

$$\langle a_\downarrow, a\rangle R\langle b, b_\downarrow\rangle R\langle a_\uparrow, a\rangle.$$

□

Literaturverzeichnis

[PeSe97] Y. Peterzil & S. Starchenko: *A Trichotomy Theorem for o-minimal Structures*, Addison-Wesley Publ., 1969.