Université des Sciences et Technologies de Lille

Habilitation à diriger des recherches
en Sciences Mathématiques

présentée par

Cornelia DRUŢU

Géométrie des groupes et des espaces localement symétriques

Soutenue le 20 Décembre 2004 devant le jury composé par :

Marc BOURDON, Université de Lille
Brian BOWDITCH, Université de Southampton
Gilles COURTOIS, École Polytechnique
Thomas DELZANT,Université de Strasbourg
Livio FLAMINIO, Université de Lille
Gilbert LEVITT, Université de Caen
Pierre PANSU, Université de Paris-Sud
Frédéric PAULIN, École Normale Supérieure
Leonid POTYAGAILO, Université de Lille

À mes parents

Je voudrais remercier Brian Bowditch, Gilles Courtois et Thomas Delzant pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse, malgré leurs charges importantes de travail, pour leurs remarques et leurs suggestions.

Pierre Pansu a été mon directeur de thèse à Orsay et un modèle pour moi, mathématiquement et humainement. Je tiens à le remercier pour tout cela.

Je remercie Marc Bourdon, Livio Flaminio, Gilbert Levitt, Frédéric Paulin et Leonid Potyagailo pour leurs encouragements, pour les nombreuses discussions utiles qu'on a eues au fil des années ainsi que pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de faire partie du jury.

Je tiens à remercier mes collègues de Lille, tout particulièrement mes collègues géomètres, pour de nombreux échanges d'idées et pour l'atmosphère conviviale qu'ils ont su créer bien des fois.

Je remercie les secrétaires de l'UMR et de l'UFR, les bibliothécaires et le personnel de la reprographie pour la gentillesse et la diligence avec laquelle ils m'ont aidé dans bien de circonstances.

Je suis très reconnaissante à mes parents et à mes amis pour le soutien moral qu'ils m'ont apporté.

Je suis redevable à Cătălin au-delà de tout remerciement.

Table des matières

Chapitre 1

Géométrie des groupes, cônes asymptotiques

1.1 Section préliminaire

1.1.1 Fonction de longueur, métrique des mots

Une fonction de longueur sur un groupe Γ est une application $L\colon \Gamma \to \mathbb{R}_+$ vérifiant :
(1) $L(gh) \leq L(g) + L(h)$ pour tout $g, h \in \Gamma$;
(2) $L(g) = L(g^{-1})$ pour tout $g \in \Gamma$;
(3) $L(1) = 0$.

Remarquons que si la propriété (3) est renforcée au (3′) $L(g) = 0 \Leftrightarrow g = 1$, alors on peut définir à l'aide de L une métrique invariante à gauche sur Γ par $\mathrm{dist}(g, h) = L(g^{-1}h)$.

On dit qu'une fonction de longueur $L_1\colon \Gamma \to \mathbb{R}_+$ *domine* une autre fonction de longueur $L_2\colon \Gamma \to \mathbb{R}_+$ s'ils existent $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $L_2 \leq aL_1 + b$. Si L_1 domine L_2 et L_2 domine L_1 alors on dit que L_1 et L_2 sont *équivalentes*.

Un cas particulier de fonction de longueur apparaît lorsque Γ est un groupe discret de type fini. Dans ce cas, pour toute partie génératrice finie S de Γ stable par inversion, on peut définir $L(g)$ comme étant la longueur du (des) mot(s) le(s) plus court(s) en l'alphabet S représentant g. On utilise aussi la notation $|g|_S$ ou tout simplement $|g|$ pour $L(g)$. Cette fonction de longueur s'appelle *fonction de longueur des mots*. Elle vérifie aussi (3′) et par conséquent elle définit une métrique invariante à gauche sur Γ appelée *métrique des mots*.

Lemme 1.1.1 ([J], Lemme 1.1.4). *Si Γ est un groupe de type fini alors toute fonction de longueur des mots domine toute autre fonction de longueur sur Γ.*

Pour toute partie génératrice S (finie ou infinie) de Γ stable par inversion, ne contenant pas l'élément neutre, on peut construire un graphe dont les sommets sont les éléments de Γ et les arêtes correspondent à des couples $(\gamma, \gamma s)$, où $\gamma \in \Gamma$ et $s \in S$. Ce graphe est appelé *le graphe de Cayley de Γ par rapport à S* et il est noté $\mathrm{Cayley}(\Gamma, S)$. On regarde $\mathrm{Cayley}(\Gamma, S)$ comme un graphe étiqueté, dont les arêtes orientées sont étiquetées par des éléments de S. La métrique de longueur dist_S dans $\mathrm{Cayley}(\Gamma, S)$ coïncide avec la métrique des mots sur Γ pour S fini.

1.1.2 Groupes et espaces métriques

Un *plongement quasi-isométrique* d'un espace métrique (X, dist_X) dans un espace métrique (Y, dist_Y) est une application $\mathbf{q} : X \to Y$ telle que pour tout $x_1, x_2 \in X$ l'on ait

$$\frac{1}{L}\mathrm{dist}_X(x_1,x_2) - C \leq \mathrm{dist}_Y(\mathbf{q}(x_1),\mathbf{q}(x_2)) \leq L\mathrm{dist}_X(x_1,x_2) + C\,, \tag{1.1}$$

où $L \geq 1$ et $C \geq 0$ sont deux constantes. Si $X = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, on appelle $\mathbf{q}$ *un segment quasi-géodésique.* Si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ alors $\mathbf{q}$ est appelée *un rayon quasi-géodésique.* Si $a = -\infty$ et $b = +\infty$ alors $\mathbf{q}$ est appelée *une quasi-géodésique complète.* On utilise les mêmes noms pour l'image de $\mathbf{q}$.

Notation : Dans un espace métrique, pour tout sous-ensemble A, on utilise les notations $\mathcal{N}_\delta(A)$ pour $\{x\ ;\ \mathrm{dist}(x, A) < \delta\}$, qu'on appelle *le δ-voisinage de A*, et $\overline{\mathcal{N}}_\delta(A)$ pour $\{x\ ;\ \mathrm{dist}(x, A) \leq \delta\}$, qu'on appelle *le δ-voisinage fermé de A.*

Si Y est contenu dans le C-voisinage de $\mathbf{q}(X)$ alors $\mathbf{q}$ est appelé *une quasi-isométrie.* Dans ce cas, il existe une quasi-isométrie $\bar{\mathbf{q}} : Y \to X$ telle que $\bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{q}$ et $\mathbf{q} \circ \bar{\mathbf{q}}$ sont à distance bornée des applications identité respectives [GH$_1$]. On appelle $\bar{\mathbf{q}}$ *l'application quasi-inverse de* $\mathbf{q}$.

Si pour un espace métrique X on considère l'ensemble des quasi-isométries $\mathbf{q} : X \to X$ et son quotient par la relation d'équivalence $\mathbf{q} \sim \mathbf{q}' \Leftrightarrow \mathrm{dist}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') < +\infty$, le quotient, muni de l'opération induite par la composition, est un groupe, appelé *le groupe des quasi-isométries de* X et noté $QI(X)$.

Dans bien des cas, on a la situation suivante : un groupe Γ agit proprement discontinûment sur un espace X muni d'une certaine structure, en respectant cette structure et de sorte que l'espace des orbites X/Γ soit compact. Un exemple est celui où Γ est le groupe fondamental d'une variété riemannienne compacte et où X est son revêtement universel.

Si de plus Γ agit par homéomorphismes et si X est un espace localement compact, connexe et simplement connexe, alors Γ est de présentation finie [BrH, Théorème I.8.10, p. 135-137]. Réciproquement, tout groupe de présentation finie apparaît comme le groupe fondamental d'une variété riemannienne compacte de dimension au moins 4, donc il agit par isométries sur son revêtement universel.

Question générale 1.1.2. Dans quels cas la structure de X se reflète dans la structure de Γ ?

Exemple 1.1.3. A. Svarč a démontré que si X est une variété riemannienne, alors X est à croissance polynomiale si et seulement si Γ muni d'une métrique des mots est à croissance polynomiale.

De manière générale, si X est un espace métrique, l'espace et le groupe sont reliés par le fait qu'ils sont quasi-isométriques. La question 1.1.2 est donc contenue dans la question

Question générale 1.1.4. (voir [Gr$_2$], [Gr$_4$]) Si Γ est un groupe de type fini qui, muni d'une métrique des mots, est quasi-isométrique à un espace métrique X avec une certaine structure, comment la structure de X se reflète-t-elle dans la structure de Γ ?

1.1.3 Invariants de quasi-isométrie

Le résultat de A. Svarč reste vrai si on remplace X par un deuxième groupe de type fini avec une métrique des mots, sous une forme plus générale : l'ordre de la fonction de croissance est un invariant de quasi-isométrie. Rappelons que si on a deux fonctions $f_i : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$,

$i = 1, 2$, *l'ordre de* f_1 *est au plus l'ordre de* f_2 si $f_1(x) \le f_2(ax + b) + cx + d$ pour tout $x \in A$, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*$. On note cette relation $f_1 \prec f_2$. Si $f_1 \prec f_2$ et $f_2 \prec f_1$ on dit que les deux fonctions sont *du même ordre* et on écrit $f_1 \stackrel{\circ}{=} f_2$. La relation $\stackrel{\circ}{=}$ est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence d'une fonction par rapport à cette relation est aussi appelé son *ordre*.

D'autres fonctions reliés à la géométrie des groupes ont leur ordre invariant par quasi-isométrie.

Exemple 1.1.5. Si un groupe Γ agit par isométries proprement discontinûment et avec quotient compact sur une variété riemannienne simplement connexe, alors la fonction de Dehn du groupe et la fonction de remplissage de X sont du même ordre [BT]. La même propriété est vraie pour le rayon de remplissage du groupe et celui de X.

Rappelons les définitions de ces notions. Dans la suite $\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{D}^2$ désignent respectivement le cercle et le disque unité du plan.

Si X est une variété riemannienne simplement connexe, on considère l'ensemble $\mathfrak{C}$ des lacets lipschitziens $c : \mathbb{S}^1 \to X$. Une extension lipschitzienne $d : \mathbb{D}^2 \to X$ de c est appelée *un disque qui remplit le lacet* c. Son image $d(\mathbb{D}^2)$ peut être munie d'une distance dist_ℓ définie par la longueur du chemin le plus court joignant deux points. On définit $Ar : \mathfrak{C} \to \mathbb{R}_+$ en posant $Ar(c)$ égal à la borne inférieure des aires des disques qui remplissent c. On appelle $Ar(c)$ *l'aire de remplissage* de c. D'une manière analogue, on définit la fonction rayon $ray : \mathfrak{C} \to \mathbb{R}_+$ par

$$ray(c) = \inf \left\{ \sup_{x \in \mathbb{D}^2} \mathrm{dist}_\ell(d(x), c(\mathbb{S}^1)) \mid d : \mathbb{D}^2 \to X \text{ disque qui remplit le lacet } c \right\}.$$

La *fonction de remplissage* $A : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ se définit en posant $A(\ell)$ égal à la borne supérieure des $Ar(c)$ pour c de longueur au plus ℓ. La *fonction rayon de remplissage* $r : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ se définit de la même façon, à partir de la fonction ray.

Si Γ est un groupe de présentation finie et si $\langle S \mid R \rangle$ est une telle présentation, avec S partie génératrice de Γ et R famille de relations, $S = S^{-1}$, $R = R^{-1}$, on considère l'ensemble $\mathfrak{C}$ des lacets dans le graphe $\mathrm{Cayley}(\Gamma, S)$. Chaque lacet c dans $\mathfrak{C}$ est étiqueté par un mot w en l'alphabet S tel que $\mathrm{proj}(w) = 1$, où proj désigne la projection de $\mathbb{F}_S$ sur Γ. Pour toute écriture de w dans $\mathbb{F}_S$ sous la forme

$$w = \prod_{i=1}^{p} \gamma_i r_i \gamma_i^{-1}, \;\; \gamma_i \in \mathbb{F}_S, \;\; r_i \in R, \tag{1.2}$$

on appelle *disque qui remplit le lacet* c l'ensemble de toutes les images par proj des préfixes de $\prod_{i=1}^{p} \gamma_i r_i \gamma_i^{-1}$. Ce disque est muni d'une distance dist_ℓ définie par la longueur du chemin le plus court joignant deux points du disque dans $\mathrm{Cayley}(\Gamma, S)$ et tel que tous ses sommets sont dans le disque.

L'aire de remplissage $Ar(c)$ de c se définit comme le plus petit p tel que w ait dans $\mathbb{F}_S$ une décomposition comme dans (1.2), avec p termes. *Le rayon* $ray(c)$ de c est la borne inférieure sur toutes les décompositions (1.2) de $\sup_x \mathrm{dist}_\ell(x, c)$, où x est un point arbitraire du disque qui remplit c et correspond à la décomposition.

La *fonction de Dehn* et la *fonction rayon de remplissage* de Γ se définissent à partir des fonctions Ar et ray comme précédemment.

On peut généraliser les notions précédentes dans le cadre d'un espace métrique géodésique (voir [Gr_3, §2.3], [Gr_4, §5.F], [Bow_1, Section 2.3], [BrH, Chap. I, §8A.4]). Soit X un tel espace et soit $\lambda > 0$ fixé. On note $\mathfrak{C}$ l'ensemble des lacets lipschitziens $c : \mathbb{S}^1 \to X$. Soit c un tel lacet. On considère une triangulation finie de $\mathbb{D}^2$, dont les bords des triangles sont composés ou bien par des segments de droite ou bien par des arcs de $\mathbb{S}^1$. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des sommets de cette triangulation. Une *partition de c* est une paire composée d'une triangulation de $\mathbb{D}^2$ comme ci-dessus et d'une application injective $d : \mathcal{S} \to X$ telle que $d|_{\mathcal{S}\cap\mathbb{S}^1} = c|_{\mathcal{S}\cap\mathbb{S}^1}$. On appelle l'image de d *un disque qui remplit c*. On peut joindre par une géodésique les paires de points dans $d(\mathcal{S})$ correspondant à des points dans $\mathcal{S}$ joints par un segment. Nous obtenons ainsi pour chaque triangle de la triangulation de $\mathbb{D}^2$ un triangle dans X dont les arêtes sont des géodésiques ou des arcs de $c(\mathbb{S}^1)$. Appelons un tel triangle dans X une *brique de la partition*. Soit $\mathcal{G}$ le graphe composé par toutes les briques de la partition, muni de la distance $\mathrm{dist}_{\mathcal{G}}$ définie par la longueur du chemin le plus court. La *maille de la partition* est le maximum des périmètres des briques. Une λ-*partition de c* est une partition de maille au plus λ. Le disque correspondant est appelé λ-*disque qui remplit c*. La λ-*aire de remplissage* $Ar_\lambda(c)$ de c se définit comme la borne inférieure du nombre de briques d'une λ-partition de c. Le λ-*rayon de remplissage* $ray_\lambda(c)$ de c est la borne inférieure sur toutes les λ-partitions de c de $\sup_{x\in d(\mathcal{S})} \mathrm{dist}_{\mathcal{G}}(x, c(\mathbb{S}^1))$. Au cas où c n'a pas de λ-partition, les deux quantités précédentes sont par définition $+\infty$.

La fonction de λ-aire définie précédemment possède la propriété suivante [Bow$_1$, §2.3 et chapitre 5].

(**IQ**) (**inégalité du quadrilatère**) Soit c un lacet dans X qu'on sépare en quatre arcs consécutifs $c(\mathbb{S}^1) = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 \cup \alpha_4$, et soient $d_1 = \mathrm{dist}(\alpha_1, \alpha_3)$ et $d_2 = \mathrm{dist}(\alpha_2, \alpha_4)$. On a

$$Ar_\lambda(c) \geq k d_1 d_2,$$

où k est une constante dépendant de λ.

On définit la λ-*fonction de remplissage* $A_\lambda : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ et la λ-*fonction rayon de remplissage* $r_\lambda : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ comme auparavant, à partir des fonctions Ar_λ et ray_λ.

Un espace métrique géodésique tel que pour un $\lambda > 0$ tout lacet lipschitzien admet une λ-partition est appelé λ-*simplement connexe*. Dans un tel espace, pour $\lambda_i \geq \lambda$, $i = 1, 2$, on a $A_{\lambda_1} \mathrel{\mathring{=}} A_{\lambda_2}$ et $r_{\lambda_1} \mathrel{\mathring{=}} r_{\lambda_2}$.

Remarques 1.1.6. **(1)** Si deux espaces métriques géodésiques X et Y sont quasi-isométriques et si X est λ-simplement connexe alors Y est λ'-simplement connexe, pour un λ' suffisamment grand. De plus $A_\lambda^X \mathrel{\mathring{=}} A_{\lambda'}^Y$ et $r_\lambda^X \mathrel{\mathring{=}} r_{\lambda'}^Y$.

Ce résultat généralise l'exemple 1.1.5. Il généralise aussi l'invariance par quasi-isométrie, dans la classe des groupes de type fini, de la propriété d'être de présentation finie, et de l'ordre de la fonction de Dehn ([GH$_2$], [Al]).

(2) Dans un groupe de présentation finie on a l'équivalence [Ge] :

(a) le problème des mots est résoluble dans le groupe ;

(b) la fonction de Dehn est récursive ;

(c) la fonction rayon de remplissage est récursive.

1.1.4 Rigidité quasi-isométrique

Une autre type de réponse à la question générale 1.1.4 est apportée par les résultats de rigidité quasi-isométrique. Beaucoup de résultats de rigidité peuvent s'énoncer sous la forme suivante.

($\mathbf{R_1}$) Étant donné un groupe de type fini Γ ayant une certaine propriété (P), tout groupe quasi-isométrique à Γ a la même propriété (P), lui ou un sous-groupe d'indice fini ou un quotient par un sous-groupe normal fini.

Si on a un résultat de type ($\mathbf{R_1}$) pour une propriété (P), on dit que (P) est une propriété *géométrique*. Des fois, ($\mathbf{R_1}$) peut être déduit d'un résultat sur le groupe des quasi-isométries comme suit.

($\mathbf{R_2}$) Un groupe de type fini Γ avec la propriété (P) a un groupe de quasi-isométries $QI(\Gamma)$ qui est petit.

On peut donner plusieurs sens à l'affirmation précédente. Voir par exemple le corollaire 3.3.4.

Quelques exemples 1.1.7. (1) La nilpotence est une propriété géométrique ([Gr_1], voir la discussion dans la Section 1.2.3).

(2) La résolubilité n'est pas une propriété géométrique [Dyu]. Mais il y a des classes plus restreintes de groupes résolubles non-nilpotents qui ont des propriétés de rigidité (voir par exemple [FM_1], [FM_2]).

(3) La moyennabilité est une propriété géométrique [GH_2].

(4) La propriété (T) n'est pas une propriété géométrique [Val].

(8) être un groupe fondamental de variété de Haken non-géométrique sans bord est une propriété géométrique [KaL_2].

1.2 Cône asymptotique : définitions, compacité locale

1.2.1 Définitions

Cette notion, introduite de façon informelle par M. Gromov dans [Gr_1], formalisée à l'aide d'outils d'analyse non-standard dans [VDW] et étudiée plus en détail dans [Gr_4], représente une image d'un espace métrique vu d'infiniment loin. Une généralisation de cette notion est celle d'ultralimite, qui représente une image limite obtenue à partir d'une suite d'espaces métriques. Le procédé employé pour obtenir une image limite ressemble au procédé diagonal, et l'outil qui formalise ce "procédé diagonal généralisé" est l'ultrafiltre non-principal.

Soit I un ensemble infini. Un *filtre* $\mathcal{F}$ sur I est une famille de sous-ensembles de I vérifiant les conditions suivantes :

(F_1) Si $A \in \mathcal{F}$, $A \subseteq B \subseteq I$, alors $B \in \mathcal{F}$;
(F_2) Si $A, B \in \mathcal{F}$ alors $A \cap B \in \mathcal{F}$;
(F_3) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Par exemple la famille des complémentaires de sous-ensembles finis de I est un filtre, appelé *le filtre de Fréchet*.

Un *ultrafiltre* sur I est un filtre $\mathcal{U}$ sur I qui est maximal dans l'ensemble des filtres sur I ordonné par rapport à l'inclusion. Un ultrafiltre peut aussi être défini comme une famille de sous-ensembles de I vérifiant les conditions (F_1), (F_2), (F_3) et la condition supplémentaire :

$$(F_4) \text{ Pour tout } A \subseteq I \text{ ou bien } A \in \mathcal{U} \text{ ou bien } I \setminus A \in \mathcal{U}.$$

Dès lors, on suppose que I est infini dénombrable. Un *ultrafiltre non-principal* est un ultrafiltre contenant le filtre de Fréchet. Une autre façon de définir cette notion est la suivante. Soit $\mathcal{P}(I)$ la famille des sous-ensembles de I et soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(I)$. Notons la fonction caractéristique de $\mathcal{U}$ par ω. La fonction ω est définie sur $\mathcal{P}(I)$ et prend les valeurs 0 et 1. La famille $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre non-principal si et seulement si ω est une mesure de probabilité finiment additive qui s'annule sur chaque sous-ensemble fini de I.

Remarque 1.2.1. ([5, Remark 2.1.1]) Soit $\mathcal{S}_1 \supseteq \mathcal{S}_2 \supseteq \mathcal{S}_3 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{S}_m \supseteq \dots$ une suite infinie décroissante de sous-ensembles infinis de I. Il existe un ultrafiltre non-principal ω tel que $\omega(\mathcal{S}_m) = 1,\ \forall m \in \mathbb{N}$.

On dit qu'une proposition $\mathrm{P}(i)$ dépendant de $i \in I$ est vraie ω-*presque sûrement* si

$$\omega\left(\{i \in I\ ;\ \mathrm{P}(i) \text{ est vraie }\}\right) = 1\,.$$

Convention : Dans la suite, par *ultrafiltre* nous entendrons toujours ultrafiltre non-principal sur un ensemble infini dénombrable.

Pour toute suite de points $(x_n)_{n\in I}$ dans un espace topologique X, on définit son ω-limite $\lim_\omega x_n$ comme étant un point x dans X tel que pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de x, $x_n \in \mathcal{V}$ ω-presque sûrement. Si l'espace X est Hausdorff alors la ω-limite de toute suite, si elle existe, est unique. Si l'espace X est compact alors la ω-limite de toute suite existe [Bou].

Définition 1.2.2 (ultraproduit). Pour toute suite d'ensembles $(X_n)_{n\in I}$ son *ultraproduit* correspondant à l'ultrafiltre ω est l'ensemble $\Pi X_n/\omega$ des classes d'équivalence des suites $(x_n)_{n\in I}$, $x_n \in X_n$, définies par la relation d'équivalence $(x_n) \sim (y_n)$ si $x_n = y_n$ ω–presque sûrement. On note $(x_n)^\omega$ la classe d'équivalence de (x_n). Si $X_n = X$ pour tout n, l'ultraproduit est appelé *ultrapuissance de* X et noté X^ω.

Si G_n, $n \in I$, sont des groupes alors l'ultraproduit $\Pi G_n/\omega$ est un groupe avec l'opération $(x_n)^\omega(y_n)^\omega = (x_n y_n)^\omega$. Si X_n sont des espaces munis de métriques dist_n, alors on peut définir une pseudo-métrique sur $\Pi X_n/\omega$ par

$$D(x,y) = \lim_\omega \mathrm{dist}_n(x_n, y_n)\,,\ \text{pour chaque paire } x = (x_n)^\omega, y = (y_n)^\omega \text{ dans } \Pi X_n/\omega\,.$$

La fonction D peut prendre la valeur $+\infty$ et on peut avoir $D(x,y) = 0$ et $x \neq y$. Pour éliminer ces deux inconvénients on modifie légèrement la construction.

Définition 1.2.3 (ω-limite d'espaces métriques). On choisit un point $e = (e_n)^\omega$ dans $\Pi X_n/\omega$, appelé *point d'observation*. On considère le sous-ensemble $\Pi_e X_n/\omega$ de $\Pi X_n/\omega$ composé des éléments x de l'ultraproduit tels que $D(x,e)$ soit finie. La *ω-limite* $\lim^\omega (X_n)_e$ *des espaces métriques* (X_n, dist_n) *par rapport au point d'observation* e est l'espace métrique obtenu à partir de $\Pi_e X_n/\omega$ en identifiant les paires de points x, y tels que $D(x,y) = 0$. On note $\lim^\omega(x_n)$ la classe d'équivalence de (x_n) dans $\lim^\omega(X_n)_e$.

Remarque 1.2.4. Si $e, e' \in \Pi X_n/\omega$ sont tels que $D(e,e') < \infty$ alors $\lim^\omega(X_n)_e = \lim^\omega(X_n)_{e'}$.

Définition 1.2.5 (cône asymptotique). Soit (X, dist) un espace métrique, ω un ultrafiltre sur I, $e = (e_n)^\omega \in X^\omega$ un point d'observation. Soit $d = (d_n)_{n\in I}$ une suite de nombres réels positifs, appelés *scalaires*, vérifiant $\lim_\omega d_n = \infty$.

Dans l'ultrapuissance X^ω on considère le sous-ensemble $X^\omega_e = \Pi_e X_n/\omega$, où $(X_n, \mathrm{dist}_n) = (X, \mathrm{dist}/d_n)$, appelé *ultrapuissance de* X *par rapport au point d'observation* e *et à la suite* d.

La ω-limite $\lim^\omega(X, \mathrm{dist}/d_n)_e$ est appelé *cône asymptotique de* X et noté $\mathrm{Con}^\omega(X; e, d)$.

Définition 1.2.6. On dit qu'un espace métrique (X, dist) a une certaine propriété (P) *asymptotiquement* si tout cône asymptotique de X a cette propriété.

Définition 1.2.7. Soit $(A_n)_{n\in I}$ une suite de sous-ensembles de X. On note $\lim^\omega(A_n)$ le sous-ensemble de $\mathrm{Con}^\omega(X; e, d)$ composé par les éléments $\lim^\omega(x_n)$ tels que $x_n \in A_n$ ω-presque sûrement. Si $\lim_\omega \frac{\mathrm{dist}(e_n, A_n)}{d_n} = +\infty$ alors l'ensemble $\lim^\omega(A_n)$ est vide.

Remarque 1.2.8. Dans [VDW] il est démontré que tout cône asymptotique d'un espace métrique est complet. La même preuve montre que $\lim^\omega(A_n)$, si non-vide, est un sous-ensemble fermé de $\mathrm{Con}^\omega(X; e, d)$.

Remarque 1.2.9. Soient X et Y deux espaces métriques et $e \in X^\omega$, $e' \in Y^\omega$. Toute suite $\mathbf{q}_n : X \to Y$ de (L, C)-quasi-isométries vérifiant $\lim_\omega \frac{\mathrm{dist}(\mathbf{q}_n(e_n), e'_n)}{d_n} < \infty$ induit une application L-bilipschitz $\mathbf{q}_\omega : \mathrm{Con}^\omega(X; e, d) \to \mathrm{Con}^\omega(Y; e', d)$.

Remarques 1.2.10. (1) Soit G un groupe qui agit par isométries sur un espace métrique (X, dist). Supposons qu'il existe un sous-ensemble B de X borné tel que $X = GB$. Alors tous les cônes asymptotiques de X sont isométriques. En effet, soit x_0 un point fixé dans B et soit $e^0 \in X^\omega$ défini par $e^0_n = x_0$ pour tout n. Tout cône asymptotique $\mathrm{Con}^\omega(X; e, d)$ de X est isométrique au cône asymptotique $\mathrm{Con}^\omega(X; e^0, d)$. Il suffit de choisir g_n dans G tel que $g_n e_n \in B$. On a alors l'isométrie

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Con}^\omega(X; e, d) & \to & \mathrm{Con}^\omega(X; e^0, d) \\ \lim^\omega(x_n) & \mapsto & \lim^\omega(g_n x_n). \end{array}$$

En particulier ceci est vrai si X coïncide avec G, muni d'une distance invariante à gauche.

(2) Soit G un groupe. Pour désigner la suite constante 1 on utilise le même symbole 1. Le groupe G^ω_1 agit par isométries sur $\mathrm{Con}^\omega(G; 1, d)$:

$$(g_n)^\omega \lim^\omega(x_n) = \lim^\omega(g_n x_n).$$

Cette action est transitive, donc $\mathrm{Con}^\omega(G; 1, d)$ est homogène. D'après (1) ceci implique que tout cône asymptotique de G est homogène.

Plus généralement, sous les hypothèses de (1), tous les cônes asymptotiques de X sont homogènes.

Convention : Pour tout groupe G, sauf mention contraire, on considère seulement des cônes asymptotiques $\mathrm{Con}^\omega(G; e, d)$ avec $e = 1$.

Dans [Gr_4] et [VDW] une définition plus restrictive des cônes asymptotiques est formulée, dans laquelle $I = \mathbb{N}$ et $d_n = n$ pour tout n. Nous dirons que les cônes asymptotiques ainsi définis sont des cônes asymptotiques *au sens restreint.* Tout cône asymptotique au sens restreint est aussi un cône asymptotique au sens de la définition 1.2.5. Pour la réciproque il n'y a pas de preuve formelle mais pas non plus de contre-exemple.

Remarque 1.2.11. ([10, §3.3]) Pour tout ultrafiltre ω sur I et toute suite de scalaires $d = (d_n)_{n\in I}$, on considère l'application $\phi : I \to \mathbb{N}$, $\phi(i) = [d_i]$, et on définit l'ultrafiltre μ sur $\mathbb{N}$ par $\mu(A) = \omega(\phi^{-1}(A))$ pour tout $A \subseteq \mathbb{N}$. On a alors le plongement isométrique

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Con}^\mu(X; e, (n)) & \to & \mathrm{Con}^\omega(X; e, d) \\ & & \\ \lim^\mu(x_n) & \mapsto & \lim^\omega \left(x_{\phi(i)}\right)_{i\in I} . \end{array} \tag{1.3}$$

Si le cardinal de l'ensemble $\{i \in I\ ;\ [d_i] = k\}$ est borné uniformément en k alors le plongement dans (1.3) est une isométrie surjective [Ri].

La définition restrictive des cônes asymptotiques est moins naturelle. Par exemple, elle n'assure pas de manière formelle que toute ultralimite de cônes asymptotiques est un cône asymptotique (voir la proposition 1.2.17, la remarque 1.2.18 et la proposition 1.2.19).

On peut supposer que I est muni d'une relation d'ordre totale, et poser des restrictions sur la croissance de la suite des scalaires d par rapport à l'ultrafiltre ω. Il s'agit de choisir une suite d et un ultrafiltre ω tels qu'il n'existe pas d'ensemble E dans I avec $\omega(E) = 1$ et tel que la suite $(d_n)_{n\in E}$ croît à une vitesse plus que linéaire. La définition est la suivante.

Définition 1.2.12. On dit que la paire (ω, d) est *lente* si pour tout ensemble ordonné $E = \{i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots\}$ tel que $\lim_{n\to\infty} \frac{d_{i_n}}{n} = \infty$, on a que $\omega(E) = 0$.

Si la propriété précédente n'est pas vérifiée, on dit que (ω, d) est *éparse*.

Un cône asymptotique $\mathrm{Con}^\omega(X; e, d)$ tel que la paire (ω, d) est lente (éparse) est appelé *cône asymptotique lent (épars)*.

Exemple 1.2.13. Considérons le cas $I = \mathbb{N}$ avec son ordre canonique et $d_n = n$. D'après la remarque 1.2.1, il existe un ultrafiltre ω tel que $\omega\left(\{2^n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}\right) = 1$. La paire (ω, d) est éparse.

Pour montrer que des paires lentes existent aussi, on prend à nouveau $I = \mathbb{N}$ et $d_n = n$. Considérons la collection $\mathcal{P}$ des complémentaires d'ensembles finis et des complémentaires d'ensembles $E = \{i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots\}$ ayant la propriété que $\lim_{n\to\infty} \frac{i_n}{n} = \infty$. Alors $\mathcal{P}$ est un filtre. Pour le voir, il suffit de vérifier que toute réunion d'un ensemble de type E avec un ensemble fini, ou avec un autre ensemble de type E reste de type E. On le montre dans le deuxième cas. Soient $E_1 = \{i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots\}$ et $E_2 = \{j_1, j_2, \ldots, j_n, \ldots\}$ tels que $\lim_{n\to\infty} \frac{i_n}{n} = \infty$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{j_n}{n} = \infty$. Soit $\{k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots\}$ l'ensemble $E_1 \cup E_2$ écrit dans l'ordre croissant. Pour tout $M > 0$ il existe n_0 tel que $i_n \geq Mn$ et $j_n \geq Mn$ pour $n \geq n_0$. Remarquons que si $n = 2l$ ou $2l + 1$ alors $k_n \geq i_l$ ou $k_n \geq j_l$. De plus, si $n \geq 2n_0 + 1$, il s'ensuit que $l \geq n_0$. Par conséquent, si $n \geq 2n_0 + 1$ alors $k_n \geq \min(i_l\,, j_l) \geq Ml \geq M\frac{n-1}{2}$. On déduit que $\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} \geq \frac{M}{2}$ pour tout $M > 0$, donc que la limite est ∞. Ainsi, $E_1 \cup E_2$ est un ensemble de type E.

Il existe un ultrafiltre qui contient $\mathcal{P}$, donc un ultrafiltre non-principal qui ne contient aucun ensemble de type E. La paire (ω, d) ainsi obtenue est lente.

Remarque 1.2.14. Dans la définition d'une paire (ω, d) lente, on peut affaiblir la restriction sur la croissance de d par rapport à ω. Par exemple on peut remplacer la condition $\lim_\omega \frac{d_{i_n}}{n} = +\infty$ par la condition de l'existence d'un nombre $a > 1$ tel que $\lim_\omega \frac{d_{i_n}}{a^n} = +\infty$.

1.2.2 Ultralimites de cônes asymptotiques

On commence par une généralisation de la notion de produit d'ultrafiltres telle qu'elle apparaît dans [She, Définition 3.2, Chapitre VI].

Définition 1.2.15 (ultraproduit d'ultrafiltres). Soit ω un ultrafiltre sur I et soit $\mu = (\mu_n)_{n\in I}$ une suite d'ultrafiltres sur I. Pour tout $A \subseteq I \times I$ on définit

$$\omega\mu(A) = \omega\left(\{n \in I \; ; \; \mu_n\left(A \cap (\{n\} \times I)\right) = 1\}\right).$$

Autrement noté,

$$\omega\mu(A) = \int \mu_n\left(A \cap (\{n\} \times I)\right)\, d\omega(n).$$

Lemme 1.2.16. *([10, Lemme 3.21], voir aussi [She, Lemme 3.6 du Chapitre VI])*

L'application $\omega\mu$ est un ultrafiltre sur $I \times I$.

Proposition 1.2.17. *([10, Corollaire 3.24]) Soit X un espace métrique. Soient ω et μ comme ci-dessus. Pour tout $n \in I$ soit $\mathrm{e}^{(n)} = \left(e_k^{(n)}\right)_{k\in I}$ une suite de points d'observation et soit $\mathrm{d}^{(n)} = \left(d_k^{(n)}\right)_{k\in I}$ une suite de scalaires vérifiant $\lim_{\mu_n} d_k^{(n)} = \infty$. L'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Con}^{\omega\mu}(X; e, d) & \to & \lim^{\omega}\left(\mathrm{Con}^{\mu_n}\left(X; e^{(n)}, d^{(n)}\right)\right)_{(\lim^{\mu_n}(e^{(n)}))}, \\ \lim_{\omega\mu}\left(x_k^{(n)}\right) & \mapsto & \lim_{\omega}\left(\lim_{\mu_n}\left(x_k^{(n)}\right)\right), \end{array} \tag{1.4}$$

est une isométrie surjective, où $e = \left(e_k^{(n)}\right)_{(n,k)\in I\times I}$ et $d = \left(d_k^{(n)}\right)_{(n,k)\in I\times I}$.

Remarque 1.2.18. Il n'y a pas de preuve similaire dans le cas des cônes asymptotiques au sens restreint. Il est probable même que la proposition 1.2.17 soit fausse dans ce contexte. Il existe toutefois des cas particuliers où elle reste vraie.

Proposition 1.2.19. *([10, Proposition 3.26]) Soient X, ω et μ comme ci-dessus, pour $I = \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles infinis de $\mathbb{N}$ deux à deux disjoints et supposons que $\mu_n(I_n) = 1$ pour tout n. Alors la ω-limite des cônes asymptotiques au sens restreint $\mathrm{Con}^{\mu_n}(X; \mathrm{e}^{(n)}, (n))$, $n \in \mathbb{N}$, est un cône asymptotique au sens restreint.*

1.2.3 Compacité locale des cônes asymptotiques

Proposition 1.2.20. *([Gr$_1$], [5]) Les cônes asymptotiques d'un groupe de type fini sont tous localement compacts si et seulement si l'ordre de la fonction de croissance est au plus polynomial.*

D'autre part on a le théorème suivant.

Théorème 1.2.21. *([Gr$_1$]) L'ordre de la fonction de croissance d'un groupe de type fini est au plus polynomial si et seulement si le groupe est virtuellement nilpotent. Dans ce cas, l'ordre de la fonction de croissance est polynomial.*

D'autres résultats viennent compléter ce théorème et montrer ainsi que la compacité locale des cônes asymptotiques des groupes est une propriété restrictive. Il s'agit donc d'étudier les cônes asymptotiques d'un groupe virtuellement nilpotent Γ muni d'une métrique des mots dist. Soit $\mathrm{tor}(\Gamma)$ le sous-groupe distingué fini engendré par les éléments d'ordre fini de Γ et soit $N = \Gamma/\mathrm{tor}(\Gamma)$. D'après un théorème de Mal'cev [Mal], N peut être plongé comme réseau uniforme dans un groupe de Lie nilpotent G. à ce groupe on associe de manière canonique un groupe de Lie gradué G_∞, qu'on peut munir d'une métrique de Carnot-Carathéodory dist_∞.

On note N^i le i-ème groupe de la série centrale de N et r_i le rang de N^i/N^{i+1}.

Théorème 1.2.22. *([Pan$_1$], [Gui], [Bas])*

(1) Tous les cônes asymptotiques de Γ sont isométriques à $(G_\infty, \mathrm{dist}_\infty)$.

(2) Pour toute suite de scalaires d_n telle que $d_n \to \infty$, $\left(\Gamma, \frac{1}{d_n}\mathrm{dist}\right)$ converge vers $(G_\infty, \mathrm{dist}_\infty)$ quand $n \to \infty$, dans la métrique de Hausdorff-Gromov.

(3) La dimension topologique de $(G_\infty, \mathrm{dist}_\infty)$ est égale à $\sum_i r_i$, qui est aussi la dimension cohomologique virtuelle de Γ.

(4) La dimension de Hausdorff de $(G_\infty, \mathrm{dist}_\infty)$ est égale à $\sum_i i r_i$, qui est aussi le degré de la fonction de croissance polynomiale de Γ.

Aussi, dans ce contexte, la quasi-isométrie entre deux groupes virtuellement nilpotents implique plus que l'équivalence bilipschitz de la remarque 1.2.9.

Théorème 1.2.23. *([Pan_1]) Si deux groupes virtuellement nilpotents* Γ *et* Γ' *sont quasi-isométriques, alors les groupes de Lie gradués limites* G_∞ *et* G'_∞ *sont isomorphes.*

1.3 Points de coupure dans les cônes asymptotiques

L'existence des points de coupure globaux dans les cônes asymptotiques s'avère être une propriété restrictive aussi.

Références : Pour toute la Section 1.3, les références sont [10] et [11], sauf mention contraire.

Conventions : Dans la suite, par *point de coupure* on sous-entend un point de coupure global.
On convient qu'un singleton a un point de coupure global.

Pour mieux comprendre la structure des cônes ayant un point de coupure, ainsi que pour d'autres buts, on a besoin de la notion d'espace gradué sur un arbre. Cette notion a été introduite dans [10].

1.3.1 Espaces gradués sur un arbre

Définition 1.3.1. Soit $\mathbb{F}$ un espace métrique géodésique complet et soit $\mathcal{P}$ une famille de sous-ensembles géodésiques fermés, appelés *pièces*. Supposons que les propriétés suivantes soient verifiées :

(T_1) Deux pièces distinctes ont au plus un point en commun.

(T_2) Tout triangle géodésique simple (c'est-à-dire une courbe fermée simple composée par trois géodésiques) dans $\mathbb{F}$ est contenu dans une pièce.

On dit alors que l'espace $\mathbb{F}$ est *gradué sur un arbre par rapport à* $\mathcal{P}$.

Dans la définition, la propriété (T_2) peut être remplacée par l'une des propriétés suivantes.

(T_2') Soit $\mathfrak{c} : [0,d] \to \mathbb{F}$ un arc topologique, soit $t \in [0,d]$ et soit $\mathfrak{c}[t-a, t+b]$ le sous-arc maximal de $\mathfrak{c}$ contenant $\mathfrak{c}(t)$ et contenu dans une pièce. Tout arc topologique ayant les mêmes extrémités que $\mathfrak{c}$ contient les points $\mathfrak{c}(t-a)$ et $\mathfrak{c}(t+b)$.

(T_2'') Chaque courbe fermée simple de $\mathbb{F}$ est contenue dans une pièce.

Remarque 1.3.2. Quand on remplace (T_2) par (T_2') ou (T_2''), on peut affaiblir les conditions sur les pièces et demander non plus qu'elles soient géodésiques mais seulement qu'elles soient connexes par arcs. Dans ce cas, si on remplace aussi la condition que $\mathbb{F}$ soit un espace métrique géodésique par celle qu'il soit un espace topologique connexe par arcs, la notion d'espace gradué sur un arbre devient purement topologique.

Remarques 1.3.3.

1. Dans (T_2) on suppose qu'un point est aussi un triangle géodésique simple. Ainsi (T_2) implique que les pièces recouvrent l'espace $\mathbb{F}$.
2. On peut ajouter des singletons à $\mathcal{P}$ et obtenir ainsi une famille de pièces plus large. Pour éviter toute ambiguité reliée à ce type de changement de $\mathcal{P}$, on supposera dans la suite que dans $\mathcal{P}$ il n'existe pas deux pièces distinctes contenues l'une dans l'autre. Ceci revient à dire qu'on considère des ensembles de pièces $\mathcal{P}$ contenant un minimum de singletons.

Définition 1.3.4. Une famille d'espaces métriques est *uniformément localement simplement connexe* s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que tout lacet contenu dans un des espaces métriques et de longueur au plus ε soit homotope à un point.

On donne ci-dessous une courte liste des propriétés des espaces gradués sur un arbre.

(1) Si toutes les pièces sont des arbres réels alors $\mathbb{F}$ est un arbre réel.

(2) Tout arc topologique joignant deux points distincts dans une pièce est contenu dans la pièce.

(3) Un sous-ensemble connexe par arcs A intersectant une pièce M en au plus un point se projette sur M en un unique point a. De plus, tout chemin continu reliant un point de A à un point de M contient a.

(4) Supposons que l'ensemble des pièces soit uniformément localement simplement connexe. Alors $\pi_1(\mathbb{F})$ est le produit libre des $\pi_1(M)$, pour tout $M \in \mathcal{P}$. La condition de simple connexité locale uniforme des pièces est naturelle, si on songe aux anneaux hawaïens

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C\left(\left(0, \frac{1}{n}\right), \frac{1}{n}\right), \text{ où } C\left(\left(0, \frac{1}{n}\right), \frac{1}{n}\right) \text{ est le cercle de centre } \left(0, \frac{1}{n}\right) \text{ et de rayon } \frac{1}{n},$$

avec la topologie induite par $\mathbb{R}^2$. Le groupe fondamental de cet espace est infini non-dénombrable et non libre [DES].

(5) Tout sous-ensemble A de $\mathbb{F}$ connexe par arcs et sans point de coupure est entièrement contenu dans une pièce.

(6) Soient $(\mathbb{F}, \mathcal{P})$ et $(\mathbb{F}', \mathcal{P}')$ deux espaces gradués sur des arbres tels que toutes leurs pièces soient sans point de coupure. Tout homéomorphisme $\phi : \mathbb{F} \to \mathbb{F}'$ a la propriété que pour tout $M \in \mathcal{P}$ il existe un unique $M' \in \mathcal{P}'$ tel que $\phi(M) = M'$.

La dénomination des espaces gradués sur des arbres est partiellement justifiée par l'existence d'arbres transverses aux pièces. Plus précisément, on peut définir, pour tout point x, la réunion T_x des arcs topologiques ayant x comme une de ses extrémités et intersectant chaque pièce en au plus un point. On a que :

(t1) Si $y \in T_x$ alors $T_x = T_y$.
(t2) Chaque T_x est un arbre réel.
(t3) Chaque T_x est un sous-ensemble fermé.
(t4) Tout arc topologique joignant deux points de T_x est entièrement contenu dans T_x.

On peut opérer plusieurs modifications dans la liste des pièces. On en rappelle une ci-dessous. Introduisons tout d'abord la terminologie nécessaire. Soient (M_1, x_1), $(M_2, x_2), \ldots,$ (M_k, x_k) des espaces métriques pointés. Le *bouquet* de ces espaces, $\bigvee_{i=1}^k (M_i, x_i)$, est l'espace obtenu à partir de la réunion disjointe des M_i en identifiant tous les points x_i. Appelons le point x ainsi obtenu *le point de coupure du bouquet*. On peut définir une métrique sur $\bigvee_{i=1}^k (M_i, x_i)$ à partir des métriques sur M_i.

Lemme 1.3.5. *Soit $\mathbb{F}$ un espace gradué sur un arbre par rapport à $\mathcal{P} = \{M_k\ ;\ k \in K\}$. Soit $I \subset K$ tel que pour tout $i \in I$ la pièce M_i soit le bouquet d'une famille finie de sous-ensembles, $\{M_i^j\}_{j\in F_i}$. Alors $\mathbb{F}$ est gradué sur un arbre par rapport à*

$$\mathcal{P}' = \{M_k\ ;\ k \in K \setminus I\} \cup \{M_i^j\ ;\ j \in F_i,\, i \in I\}\,.$$

Pour d'autres modifications possibles dans la liste des pièces voir [10, §2.2].

Les espaces gradués sur un arbre sont reliés de façon naturelle aux espaces topologiques avec un point de coupure. La propriété (T_2') implique que tout espace gradué sur un arbre contenant plus qu'une pièce admet un point de coupure. Réciproquement, tout espace métrique géodésique ayant des points de coupure peut être représenté de façon unique comme un espace gradué sur un arbre. Pour montrer ceci, on introduit tout d'abord une relation d'ordre partielle sur l'ensemble des collections de pièces d'un espace gradué. Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont des collections de sous-ensembles de X telles que X est gradué sur un arbre par rapport à $\mathcal{P}$, respectivement par rapport à $\mathcal{P}'$, on écrit que $\mathcal{P} \prec \mathcal{P}'$ si pour tout ensemble $M \in \mathcal{P}$ il existe $M' \in \mathcal{P}'$ tel que $M \subset M'$. La relation $\prec$ est une relation d'ordre partielle, car d'apres la Remarque 1.3.3, (2), une pièce de $\mathcal{P}$ (respectivement de $\mathcal{P}'$) ne peut pas contenir une autre pièce de la même collection.

Lemme 1.3.6. *Soit X un espace métrique géodésique complet contenant au moins deux points et soit $\mathcal{C}$ un ensemble non-vide de points de coupure de X.*

(a) Il existe une collection $\mathcal{P}_0$ de sous-ensembles de X, qui est la plus grande par rapport à la relation $\prec$ parmi les collections $\mathcal{P}$ qui vérifient les propriétés suivantes :
   - *X est gradué sur un arbre par rapport à $\mathcal{P}$;*
   - *toute pièce dans $\mathcal{P}$ est ou bien un singleton ou bien un ensemble sans points de coupure dans $\mathcal{C}$.*

   De plus, toute intersection non-vide entre deux sous-ensembles distincts de $\mathcal{P}_0$ est un point dans $\mathcal{C}$.

(b) Si $\mathcal{C} = X$ alors il existe une unique collection de singletons et de sous-ensembles sans points de coupure par rapport à laquelle X est gradué sur un arbre. En particulier ceci est vrai si X est un espace homogène ayant au moins un point de coupure.

Dans (a) ce n'est pas toujours vrai que tout point dans $\mathcal{C}$ apparaît comme point d'intersection entre deux pièces distinctes. Par exemple, dans un arbre réel T sans extrémités, on peut prendre $\mathcal{C} = T$, et pour $\mathcal{P}$ l'ensemble de tous les singletons de T.

Soit Γ un groupe de type fini et $\mathrm{Con}^\omega(\Gamma; e, d)$ un cône asymptotique, où $d = (d_n)$. Supposons que $\mathrm{Con}^\omega(\Gamma)$ admette un point de coupure. Le lemme 1.3.6 et la remarque 1.2.10 impliquent que $\mathrm{Con}^\omega(\Gamma)$ est gradué sur un arbre par rapport à une famille uniquement déterminée $\mathcal{P}$ de pièces qui sont ou bien des singletons ou bien sans point de coupure. Si toutes les pièces sont des singletons alors le cône est un arbre réel homogène, par conséquent la valence est la même en chaque point. Dans ce cas ou bien le cône est isométrique à $\mathbb{R}$ ou bien tout point est un point de ramification. Le premier cas s'avère être très particulier.

Proposition 1.3.7. *Soit $\mathcal{G}$ une famille de groupes de type fini et non-virtuellement cycliques. Pour toute suite de groupes $\Gamma_n \in \mathcal{G}$ avec des métriques des mots dist_n, toute suite (λ_n) de nombres positifs, tout $e \in \Pi\Gamma_n/\omega$ et tout ultrafiltre ω, l'ultralimite $\lim^\omega(\Gamma_n, \lambda_n \mathrm{dist}_n)_e$ n'est ni un singleton ni isométrique à $\mathbb{R}$.*

Corollaire 1.3.8. *Un groupe de type fini ayant un cône asymptotique isométrique à $\mathbb{R}$ ou à un singleton est virtuellement cyclique.*

D'après la remarque 1.2.10, Γ_e^ω agit transitivement par isométries sur $\mathrm{Con}^\omega(\Gamma; e, d)$. Or on a le résultat suivant.

Proposition 1.3.9. *Soit $\mathbb{F}$ un espace gradué sur un arbre par rapport à une famille de sous-ensembles propres $\mathcal{P}$, $\mathbb{F}$ non-isométrique à $\mathbb{R}$. Un groupe G agissant transitivement sur $\mathbb{F}$ contient un sous-groupe libre non-abélien.*

Corollaire 1.3.10. *Soit* Γ *un groupe infini de type fini non-virtuellement cyclique. Si un cône asymptotique* $\mathrm{Con}^\omega(\Gamma; e, d)$ *admet un point de coupure alors l'ultrapuissance* Γ_e^ω *contient un sous-groupe libre non-abélien.*

A partir de ces résultats, on donne dans la suite des exemples de groupes asymptotiquement sans point de coupure, au sens de la définition 1.2.6, c'est-à-dire tels que tout cône asymptotique n'a pas de point de coupure. Pour simplifier, on introduit la terminologie suivante.

Définition 1.3.11. Un groupe *étalé* est un groupe asymptotiquement sans point de coupure.

Un groupe *rétréci* est un groupe asymptotiquement avec point de coupure. Un groupe *non-rétréci* est un groupe ayant au moins un cône asymptotique sans point de coupure.

Un groupe non-rétréci peut bien sûr ne pas être étalé : on peut avoir des groupes de type fini dont certains cônes asymptotiques ont des points de coupure et d'autres pas.

La classe des groupes rétrécis s'avère être reliée à la classe des groupes relativement hyperboliques. Cette relation sera traitée plus loin dans le texte (voir la Section 2.2).

La définition 1.3.11 a aussi une variante uniforme.

Définition 1.3.12. Une famille de groupes $\mathcal{G}$ est *uniformément étalée* si pour toute suite de groupes Γ_n dans $\mathcal{G}$ munis de métriques des mots dist_n, tout ultrafiltre ω et toute suite de scalaires positifs (λ_n), l'ultralimite $\lim^\omega(\Gamma_n, \lambda_n \mathrm{dist}_n)_1$ n'a pas de point de coupure.

Une famille de groupes $\mathcal{G}$ est *uniformément non-rétrécie* si pour toute suite de groupes Γ_n dans $\mathcal{G}$ munis de métriques des mots dist_n, il existe un ultrafiltre ω et une suite de scalaires positifs (λ_n) avec $\lim_\omega \lambda_n = 0$ tels que l'ultralimite $\lim^\omega(\Gamma_n, \lambda_n \mathrm{dist}_n)_1$ n'a pas de point de coupure.

Les exemples de groupes étalés et de classes de groupes uniformément étalées ou rétrécies qui suivent présentent de l'intérêt surtout dans la perspective des théorèmes de rigidité 2.2.18, 2.2.20, 2.2.23 et 2.2.24.

1.3.2 Groupes satisfaisant une identité

Soit $w(x_1, \dots, x_n)$ un mot réduit en n lettres $x_1, \dots, x_n$ et leurs inverses. Rappelons que *réduit* veut dire que w ne contient pas de sous-mots de la forme xx^{-1}. On dit qu'un groupe Γ *satisfait l'identité* $w(x_1, \dots, x_n) = 1$ si l'identité est verifiée dans Γ pour tout remplacement des lettres $x_1, \dots, x_n$ par des éléments de Γ.

Exemples de groupes satisfaisant une identité :

1. les groupes abéliens : dans ce cas $w = x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}$;
2. plus généralement, les groupes résolubles de classe au plus $m \in \mathbb{N}$;
3. les groupes de Burnside libres. Rappelons que le groupe de Burnside libre $B(n, m)$ est le quotient de $\mathbb{F}_n$ par son sous-groupe distingué engendré par tous les éléments f^m, où $f \in \mathbb{F}_n$. Ces groupes sont infinis pour $n > 1$ et pour m suffisamment grand (voir [NA], [Ad_1], [Ol_2], [Iv], [Ly], [DG] et leurs références).

Remarques 1.3.13. (1) Si Γ vérifie une identité alors toute ultrapuissance Γ^ω vérifie la même identité. Par conséquent ceci est vrai aussi pour le sous-groupe Γ_e^ω.

(2) Même plus, on a l'équivalence suivante : Γ vérifie une identité si et seulement si toute ultrapuissance Γ^ω ne contient pas de sous-groupe libre non-abélien.

L'équivalence de la Remarque 1.3.13, (2), permet d'ajouter à la liste d'exemples de groupes satisfaisant une identité les groupes uniformément moyennables. Rappelons qu'un groupe discret Γ est *moyennable* si, pour tout sous-ensemble fini K de Γ et tout $\epsilon \in (0,1)$, il existe un sous-ensemble fini F de Γ tel que $\operatorname{card} KF < (1+\epsilon) \operatorname{card} F$. Le groupe Γ est *uniformément moyennable* si de plus on a $\operatorname{card} F \leq C$, où C est une constante qui ne dépend que de ϵ et de $\operatorname{card} K$.

Pour des détails sur cette notion voir [Kel], [Bož] et [Wys]. On dispose d'une caractérisation des groupes uniformément moyennables avec des ultraproduits.

Théorème 1.3.14. *([Wys])*
Soit Γ un groupe discret dénombrable.
(1) Si Γ est uniformément moyennable alors pour tout ultrafiltre ω l'ultrapuissance Γ^ω est uniformément moyennable, en particulier Γ^ω est moyennable.
(2) S'il existe un ultrafiltre ω tel que Γ^ω soit moyennable alors Γ est uniformément moyennable.

Corollaire 1.3.15. *Si Γ est uniformément moyennable alors toute ultrapuissance Γ^ω n'a pas de sous-groupe libre non-abélien. En particulier Γ satisfait une identité.*

Le fait que tout groupe uniformément moyennable satisfait une identité a été déjà démontré dans [Kel], par des méthodes plus abstraites.

L'argument pour déduire le Corollaire 1.3.15 est standard : puisque toute ultrapuissance Γ^ω est moyennable, elle ne peut pas avoir de sous-groupe libre non-abélien. Ceci marche parce que la moyennabilité ainsi qu'on l'a définie est héritée par les sous-groupes. Remarquons toutefois que les ultrapuissances Γ^ω ne sont pas localement compactes. Dans ce contexte, les différentes façons de définir la moyennabilité ne sont pas forcément équivalentes, et il y a des types de moyennabilité qui ne sont plus hérités par les sous-groupes. C'est le cas pour la moyennabilité définie par l'existence d'une moyenne invariante à gauche sur l'ensemble des fonctions uniformément continues à gauche ([H$_1$], [BHV, Appendice G]). Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et si $G = U(\mathcal{H})$ est le groupe des opérateurs unitaires sur $\mathcal{H}$ muni de la topologie opératorielle faible, alors $U(\mathcal{H})$ est moyennable, au sens de l'existence d'une moyenne invariante [H$_1$]. D'autre part, en prenant $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{F}_2)$, où $\mathbb{F}_2$ est le groupe libre à deux générateurs, on voit que $U(\ell^2(\mathbb{F}_2))$ contient $\mathbb{F}_2$ vu comme ensemble d'opérateurs unitaires sur $\ell^2(\mathbb{F}_2)$ [BHV, Remarque G.3.7].

Pour revenir au cas général des groupes vérifiant une identité, la Proposition 1.3.9 et la Remarque 1.3.13, (2), impliquent le résultat suivant.

Théorème 1.3.16. *Soit Γ un groupe de type fini non-virtuellement cyclique vérifiant une identité. Alors Γ est étalé, dans la terminologie de la définition 1.3.11.*

Ceci peut se généraliser à une version uniforme, comme suit.

Théorème 1.3.17. *Une famille de groupes de type fini non-virtuellement cycliques vérifiant la même identité est uniformément étalée, dans la terminologie de la définition 1.3.12.*

1.3.3 Groupes avec un élément central d'ordre infini

Soit Γ un groupe de type fini contenant un sous-groupe cyclique infini $H = \langle a \rangle$ dans son centre.

Lemme 1.3.18. *Soit* $\mathrm{Con}^\omega(\Gamma; e, d)$ *un cône asymptotique de* Γ*. Pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe* $h = (h_n)^\omega$ *dans* $\Gamma_e^\omega \cap H^\omega$*,* h *isométrie de* $\mathrm{Con}^\omega(\Gamma; e, d)$*, telle que*

$$\mathrm{dist}(hx, x) = \epsilon\,,\ \forall x \in \mathrm{Con}^\omega(\Gamma; e, d)\,.$$

Supposons maintenant qu'un cône $\mathrm{Con}^\omega(\Gamma; e, d)$ admette un point de coupure. Alors il est un espace gradué sur un arbre. Cet espace est ou bien un singleton, ou bien une droite, ou bien un arbre dont chaque point est un point de ramification, ou bien un espace gradué qui a aussi des pièces non-réduites à un point. Dans les deux derniers cas il n'est pas difficile de voir que $\mathrm{Con}^\omega(\Gamma; e, d)$ ne peut pas avoir d'isométrie telle que celle décrite dans le lemme 1.3.18 (voir [10, §6.1]). Il s'ensuit que $\mathrm{Con}^\omega(\Gamma; e, d)$ est ou bien un singleton, ou bien une droite réelle. Le corollaire 1.3.8 permet alors de conclure comme suit.

Théorème 1.3.19. *Soit* Γ *un groupe de type fini non-virtuellement cyclique, contenant un sous-groupe cyclique infini central. Alors* Γ *est étalé.*

Le résultat uniforme qui peut être obtenu pour ce type de groupes est le suivant.

Théorème 1.3.20. *Soit* $\mathcal{G}$ *la famille de tous les groupes de type fini non-virtuellement cycliques, contenant un sous-groupe cyclique infini central. La famille* $\mathcal{G}$ *est uniformément non-rétrécie, dans la terminologie de la définition 1.3.12.*

1.3.4 Autres exemples, questions

Il y a aussi d'autres exemples de groupes étalés.

Exemples 1.3.21. (1) les réseaux uniformes dans des espaces symétriques ou des immeubles euclidiens de rang au moins deux. Ceci est dû au théorème ci-dessous.

Théorème 1.3.22. *([KlL]) Soit* X *un espace symétrique ou un immeuble euclidien irréductible. Tout cône asymptotique* $\mathbf{K}$ *de* X *est un immeuble euclidien irréductible homogène du même rang que* X *et* $2^{\aleph_0}$*-épais. Cet immeuble a comme appartements des ensembles limite de suites de plats maximaux de* X*. De même, les plats singuliers, les chambres de Weyl et leurs murs dans* $\mathbf{K}$ *sont des ensembles limites de suites d'objets similaires dans l'espace* X*.*

Rappelons qu'un immeuble euclidien est *c-épais*, où c est un nombre cardinal, si chaque hyperplan singulier est le bord d'au moins c demi-appartements d'intérieurs deux à deux disjoints.

(2) les groupes fondamentaux des variétés graphées [KaL_3].

La question d'une transposition au niveau du groupe du Corollaire 1.3.10, obtenu au niveau des ultrapuissances, se pose tout naturellement.

Question 1.3.23. Un groupe de type fini non-virtuellement cyclique et rétréci contient-il un sous-groupe libre non-abélien ?

Cette question est reliée à la question 2.2.9.

L'intérêt pour les groupes rétrécis, et surtout pour les groupes non-rétrécis, provient principalement des théorèmes de rigidité 2.2.18, 2.2.23 et 2.2.24. Une réponse affirmative à la question 1.3.23 impliquerait que les groupes suivants sont non-rétrécis :

(1) les groupes moyennables ;

(2) les groupes qui ne contiennent pas de sous-groupe libre non-abélien.

Remarquons que la deuxième classe de groupes est strictement plus grande que la première, d'après les exemples donnés dans [Ol_1], [Ad_2] et [OlS_1].

Il est vraisemblable que pour un groupe moyennable on peut même dire qu'il est étalé.

La question 1.3.23 a une version plus forte.

Question 1.3.24. Si un groupe Γ de type fini non-virtuellement cyclique a un cône asymptotique lent (dans la terminologie de la Définition 1.2.12) ayant un point de coupure, le groupe Γ contient-il un sous-groupe libre non-abélien ?

La condition que le cône asymptotique soit lent est une condition nécessaire. On peut adapter une construction de Rips-Olshanskii pour construire un exemple de groupe ayant un cône asymptotique qui est un arbre réel, et qui n'a pas de sous-groupes libres non-abéliens [Del]. Le cône asymptotique qui est un arbre est un cône épars.

1.4 Groupe fondamental des cônes asymptotiques

1.4.1 Connexité et simple connexité

Même les propriétés les plus simples des cônes asymptotiques se reflètent de façon décisive dans la géométrie des groupes.

Proposition 1.4.1. *([Gr_4], [11, Proposition 4.2]) Soit Γ un groupe discret muni d'une métrique invariante à gauche* dist *telle que toutes les boules soient finies.*

(1) Si tous les cônes asymptotiques de (Γ, dist) *sont connexes par arcs alors Γ est de type fini.*

(2) Si de plus tous les cônes asymptotiques de (Γ, dist) *sont simplement connexes alors Γ est de présentation finie.*

Une métrique comme ci-dessus peut être obtenue si le groupe Γ agit proprement discontinûment librement sur un espace géodésique localement compact X. On identifie Γ à une orbite Γx et on le munit de la métrique induite, dist_X.

Remarque 1.4.2. La preuve de la proposition 4.2 dans [11] implique en fait plus dans ce cas particulier. Si dist_w est une métrique des mots de Γ alors pour tout $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, on a

$$\lambda_1 \,\mathrm{dist}_X(\gamma_1 \,,\, \gamma_2) \leq \mathrm{dist}_w(\gamma_1 \,,\, \gamma_2) \leq \lambda_2 \,\mathrm{dist}_X(\gamma_1 \,,\, \gamma_2)^\alpha \,,$$

où λ_i et α sont des constantes positives, $\alpha \geq 1$.

Un cas particulier du précédent est celui où Γ est un sous-groupe d'un groupe de type fini G. Pour $X = \mathrm{Cayley}(G)$ et $x = 1$ on obtient que dist_X est la métrique des mots de G restreinte à Γ. La remarque 1.4.2 peut alors se reformuler comme suit.

Remarque 1.4.3. Si dans tout cône asymptotique de G, l'ensemble limite de Γ est connexe par arcs alors Γ est de type fini et sa distorsion dans G est au plus polynomiale.

De telles précisions peuvent aussi être apportées pour la proposition 1.4.1, (2), qu'on peut voir comme une variante en dimension 2 de (1).

Théorème 1.4.4. *([Gr_4, §5.F], [Pp_3], [Pp_5], [2]) Soit Γ un groupe de présentation finie tel que tous les cônes asymptotiques de Γ sont simplement connexes. Pour toute présentation finie de Γ les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(1) L'ordre de la fonction de Dehn de Γ est au plus polynomial.

(2) L'ordre de la fonction rayon de remplissage de Γ est au plus linéaire.

(3) Supposons de plus que dans chaque cône asymptotique de Γ la fonction de remplissage vérifie

$$A(\ell) \le C\ell^p ,$$

avec $C > 0$ et $p \ge 1$ des constantes universelles. Alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe ℓ_ϵ tel que la fonction de Dehn de Γ vérifie

$$A_\Gamma(\ell) \le \ell^{p+\epsilon} \text{ pour tout } \ell \ge \ell_\epsilon .$$

Le théorème 1.4.4, (1), admet une réciproque faible.

Théorème 1.4.5. *([Pp$_3$]) Un groupe de présentation finie dont l'ordre de la fonction de Dehn est au plus quadratique a tous les cônes asymptotiques simplement connexes.*

Il n'est pas vrai en général qu'un groupe de présentation finie dont l'ordre de la fonction de Dehn est au plus polynomial a tous les cônes asymptotiques simplement connexes (voir [SBR], [Bri]). Même si on ajoute l'hypothèse que l'ordre du rayon de remplissage est au plus linéaire, l'implication reste fausse [OlS$_2$].

Dans [Ri] est établie une relation entre l'ordre des fonctions de remplissage en dimension $k \ge 2$ et les groupes d'homotopie π_k des cônes asymptotiques, par des résultats similaires au théorème 1.4.4.

1.4.2 Groupes fondamentaux des cônes asymptotiques

Dans [Gr$_4$], M. Gromov pose deux questions concernant les groupes fondamentaux des cônes asymptotiques des groupes de type fini.

Question 1.4.6. Quels sont les groupes qui peuvent apparaître comme sous-groupes de groupes fondamentaux des cônes asymptotiques des groupes de type fini ?

Question 1.4.7. Est-ce vrai que le groupe fondamental d'un cône asymptotique d'un groupe de type fini est ou bien trivial ou bien infini non-dénombrable ?

Une réponse a la question 1.4.6 a été donnée dans [EO]. Il y est démontré que, sous des conditions assez faibles, tout espace métrique peut être plongé dans un cône asymptotique d'un groupe de type fini, isométriquement et tel que le plongement du groupe fondamental soit injectif. Ceci implique que tout groupe dénombrable apparaît comme sous-groupe du groupe fondamental d'un cône asymptotique d'un groupe de type fini.

Dans [10] plus de précisions sont apportées concernant la structure possible du groupe fondamental d'un cône asymptotique. Le théorème suivant est démontré.

Théorème 1.4.8. *([10, Théorème 7.33, Corollaire 7.32])*

(1) Pour tout groupe dénombrable C, le produit libre de $2^{\aleph_0}$ copies de C est le groupe fondamental du cône asymptotique d'un groupe à deux générateurs Γ.

(2) Il existe un groupe à deux générateurs Γ ayant la propriété suivante. Pour tout groupe de présentation finie G, le produit libre de $2^{\aleph_0}$ copies de G est le groupe fondamental d'un cône asymptotique de Γ.

Construction générale

Pour construire le groupe Γ du théorème 1.4.8, on modifie la construction utilisée dans [EO], elle-même l'adaptation d'une construction de [Ol_4].

Dans la suite, pour tout chemin c dans un graphe métrique, on note $|c|$ sa longueur. Par extension, pour tout élément w dans un groupe avec un système de générateurs fini fixé, on note $|w|$ la longueur minimale d'un chemin dans le graphe de Cayley joignant 1 à w. On retrouve ainsi la notation introduite dans la Section 1.1.1.

Soit A un alphabet et $\mathbb{F}_A$ le groupe libre engendré par A.

Définition 1.4.9 (propriété $C^*(\lambda)$). Un ensemble $\mathcal{W}$ de mots réduits dans $\mathbb{F}_A$, stable par inversion et permutation cyclique, vérifie la *propriété* $C^*(\lambda)$ si les conditions suivantes sont vérifiées.

(1) Tout sous-mot u d'un mot $w \in \mathcal{W}$ tel que $|u| \geq \lambda|w|$ apparaît une seule fois dans w ;

(2) Si u est un sous-mot commun de deux mots distincts $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$ alors $|u| \leq \lambda \min(|w_1|, |w_2|)$.

Proposition 1.4.10. *[EO] Soit $A = \{a, b\}$. Pour tout $\lambda > 0$ il existe un ensemble $\mathcal{W}$ de mots réduits dans $\mathbb{F}_A$, stable par inversion et permutation cyclique, satisfaisant la propriété $C^*(\lambda)$ et de plus les conditions suivantes :*

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{w \in \mathcal{W} \,;\, |w| \geq n\}$ vérifie $C^*(\lambda_n)$, où $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = 0$.

(2) Soit $\kappa(n) = \mathrm{card}\{w \in \mathcal{W} \,;\, |w| = n\}$. Alors $\lim_{n\to\infty}\kappa(n) = \infty$.

Dans la suite on considère $\lambda = \frac{1}{500}$, et un ensemble $\mathcal{W}$ de mots comme dans la proposition 1.4.10 pour cette valeur fixée de λ.

Considérons une suite $\mathcal{G}_n$ de graphes métriques ayant E_n arêtes, avec des longueurs comprises entre ζ^n et $\zeta^{[n/2]}$, où $\zeta \in (0,1)$ et où $[\cdot]$ signifie la partie entière. Soit dist_n la métrique de longueur sur $\mathcal{G}_n$, soit N_n l'ensemble des sommets de $\mathcal{G}_n$ et soit $O_n \in N_n$ un sommet fixé.

Définition 1.4.11. Une suite croissante (d_n) de nombres réels positifs est *à croissance rapide par rapport à la suite de graphes* $(\mathcal{G}_n)$ si :

(1) pour tout $i \geq [\zeta^n d_n]$, $\kappa(i) \geq E_n$;

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\zeta^n d_n}{d_{n-1}} = \infty$;

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{E_n}{\zeta^n d_n} = 0$.

Soit $d = (d_n)$ une suite à croissance rapide par rapport à la suite de graphes $(\mathcal{G}_n)$ fixée. Pour toute arête $e = (x, y)$ dans $\mathcal{G}_n$, on a $[d_n \mathrm{dist}(x, y)] \geq [\zeta^n d_n]$. La propriété (1) dans la définition 1.4.11 implique qu'on peut attacher à chaque arête e de $\mathcal{G}_n$ un mot $w_n(e)$ dans $\mathcal{W}$ de longueur $[d_n|e|]$ de sorte que :

(1) $w_n(e^{-1}) = w_n(e)^{-1}$;

(2) $w_n(e) \neq w_n(e')$ si $e \neq e'$.

Définition 1.4.12 (la présentation du groupe Γ). On définit l'ensemble de relations R_n comme suit : pour tout lacet $p = e_1 e_2 ... e_s$ dans $\mathcal{G}_n$ on inclut dans R_n la réduction libre du mot

$$w_n(p) = w_n(e_1) w_n(e_2) \ldots w_n(e_s).$$

Soit $R = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$ et soit $\Gamma = \langle a, b \mid R \rangle$.

Notation : On note $\Re_n$ la réunion des chemins dans $\mathrm{Cayley}(\Gamma, \{a, b\})$ issus de 1 et étiquetés par des mots $w_n(p)$, où p est un chemin dans $\mathcal{G}_n$ issu de O_n.

Proposition 1.4.13. *Pour tout ultrafiltre ω le cône asymptotique* $\mathrm{Con}^{\omega}(\Gamma; e, d)$ *est gradué sur un arbre par rapport à la famille de pièces :*

$$\mathcal{P} = \left\{ \lim^{\omega}(g_n \Re_n) \ ; \ (g_n)^{\omega} \in \Gamma^{\omega} \ \textit{tel que} \ \lim_{\omega} \frac{\mathrm{dist}(e_n, g_n \Re_n)}{d_n} < \infty \right\} . \tag{1.5}$$

Proposition 1.4.14. *Considérons les deux familles d'espaces métriques :*

$$\mathcal{P} = \left\{ \lim^{\omega}(g_n \Re_n) \ ; \ (g_n)^{\omega} \in \Gamma^{\omega} \ , \ \lim_{\omega} \frac{\mathrm{dist}(e_n, g_n \Re_n)}{d_n} < \infty \right\} \quad \textit{et} \tag{1.6}$$

$$\mathcal{M} = \{ \lim^{\omega}(N_n, \mathrm{dist}_n)_x \ ; \ x \in \Pi N_n / \omega \} . \tag{1.7}$$

Chaque $\lim^{\omega}(N_n, \mathrm{dist}_n)_x$ *est vu comme un espace pointé en* $\lim^{\omega}(x_n)$*, et chaque* $\lim^{\omega}(g_n \Re_n)$ *est pointé en* $\lim^{\omega}(y_n)$*, où* $\lim^{\omega}(y_n)$ *est la projection de* $\lim^{\omega}(e)$ *sur* $\lim^{\omega}(g_n \Re_n)$*.*

Tout espace pointé d'une des deux familles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{M}$ est isométrique à au moins un espace pointé de l'autre famille. De plus, tout espace pointé de $\mathcal{M}$ est isométrique à $2^{\aleph_0}$ espaces pointés distincts de $\mathcal{P}$.

Rappelons que deux espaces métriques pointés (X, dist_X, x) et (Y, dist_Y, y) sont *isométriques* s'il existe une isométrie $\phi : X \to Y$ telle que $\phi(x) = y$.

Réseaux et ultraboules

Plaçons-nous dans le cadre d'un espace métrique général (X, dist). Un sous-ensemble A de X est *δ-séparable* si deux points distincts arbitraires dans A se trouvent à distance au moins δ l'un de l'autre. Un sous-ensemble δ-séparable maximal de X vérifie de plus $\mathcal{N}_{\delta}(A) \supset X$. On appelle un tel sous-ensemble *δ-réseau.*

Remarque 1.4.15. Pour toute suite croissante (M_n) de sous-ensembles de X et toute suite décroissante (δ_n) de nombres réels positifs, il existe une suite croissante

$$N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_n \subset \cdots ,$$

telle que N_n est un δ_n-réseau de (M_n, dist).

Supposons que X soit un espace géodésique localement compact et considérons O un point fixe de X et B_n la boule fermée de centre O et de rayon n. Soit $\zeta \in (0, 1)$. Considérons une suite croissante de réseaux (N_n) correspondant à (B_n) et à (ζ^n). Pour chaque n, on considère le graphe métrique $\mathcal{G}_n$ de sommets N_n et dont les arêtes sont des géodésiques de X joignant des paires de points à distance au plus $\zeta^{[n/2]}$ (on considère une seule géodésique pour chaque paire). On munit chaque $\mathcal{G}_n$ de sa métrique de longueur dist_n.

Lemme 1.4.16. *(i) Pour tout $e \in \Pi N_n / \omega$, les espaces métriques pointés* $\lim^{\omega}(N_n, \mathrm{dist}_n)_e$, $\lim^{\omega}(\mathcal{G}_n, \mathrm{dist}_n)_e$ *et* $\lim^{\omega}(B_n, \mathrm{dist})_e$ *sont isométriques.*

(ii) En particulier si $D(e, O) < +\infty$ alors les espaces métriques pointés suivants sont isométriques : $\lim^{\omega}(N_n, \mathrm{dist}_n)_e$, $\lim^{\omega}(\mathcal{G}_n, \mathrm{dist}_n)_e$ *pointés en* $\lim^{\omega}(O)$ *et* (X, dist) *pointé en O.*

Une ultralimite $\lim^{\omega}(B_n, \mathrm{dist})_e$ est appelée *ultraboule dans X de centre O et de point d'observation e.*

Lemme 1.4.17. *([10, §7.1]) Pour tout groupe dénombrable C il existe un espace métrique géodésique localement compact pointé (Y_C, dist, O) tel que :*

(a) $\pi_1(Y_C) = C$;

(b) toute ultraboule de centre O dans Y_C est ou bien isométrique à Y_C ou bien simplement connexe.

Preuve du théorème 1.4.8

On considère la partition $\mathbb{N} = \coprod_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}_k$, où $\mathbb{N}_k = 2^k\mathbb{N} + 2^{k-1}$.

Soit $(M_k\,,\,\mathrm{dist}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'espace métriques géodésiques localement compacts, localement uniformément simplement connexes, pointés en O_k, et soit $\zeta \in (0,1)$. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. On applique la remarque 1.4.15 aux suites $\left(B_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ et $(\zeta^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $B_0^{(k)} = \{O_k\}$ et $B_n^{(k)} = \overline{B(O_k, n)}$, $n \in \mathbb{N}$. On obtient une suite croissante :

$$\{O_k\} \subset N_1^{(k)} \subset N_2^{(k)} \subset \cdots \subset N_n^{(k)} \subset \cdots\,, \tag{1.8}$$

telle que $N_n^{(k)}$ est un ζ^n-réseau dans $(B_n^{(k)}, \mathrm{dist}_k)$. Soit $\mathcal{G}_n^{(k)}$ le graphe de sommets $N_n^{(k)}$ et dont les arêtes sont des géodésiques de M_k joignant toute paire de sommets à distance au plus $\zeta^{[n/2]}$ l'un de l'autre (on considère une seule géodésique pour chaque paire). Soit $\mathrm{dist}_n^{(k)}$ la métrique de longueur sur $\mathcal{G}_n^{(k)}$. La suite de graphes métriques $\mathcal{G}_n^{(k)}$ vérifie les conditions énumérées avant la définition 1.4.11. On définit la suite $(\mathcal{G}_n\,,\,\mathrm{dist}_n\,,\,O_n)$ de graphes métriques pointés finis comme suit :

$$(\mathcal{G}_n\,,\,\mathrm{dist}_n\,,\,O_n) \equiv (\mathcal{G}_n^{(k)}\,,\,\mathrm{dist}_n^{(k)}\,,\,O_k) \quad \text{lorsque} \quad n \in \mathbb{N}_k\,.$$

Soit (d_n) une suite de nombres réels positifs à croissance rapide par rapport à $(\mathcal{G}_n)$. On construit le groupe $\Gamma = \langle a, b \mid R\rangle$ comme dans la définition 1.4.12.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit μ_k un ultrafiltre tel que $\mu_k(\mathbb{N}_k) = 1$.

Proposition 1.4.18. *Le cône asymptotique* $\mathrm{Con}^{\mu_k}(\Gamma; e, d)$ *est gradué sur un arbre par rapport à une famille de pièces $\mathcal{P}_k$ isométriques à des ultraboules de M_k de centre O_k. Les ultraboules ayant des points d'observation distincts correspondent à des pièces distinctes.*

Corollaire 1.4.19. *Supposons que M_k soit compact et localement uniformément simplement connexe. Le cône asymptotique* $\mathrm{Con}^{\mu_k}(\Gamma; e, d)$ *est gradué sur un arbre par rapport à une famille de pièces isométriques à M_k, et son groupe fondamental est le produit libre de $2^{\aleph_0}$ copies du groupe $\pi_1(M_k)$.*

Le corollaire 1.4.19 implique le théorème 1.4.8, (2). La proposition 1.4.18 et le lemme 1.4.17 impliquent le théorème 1.4.8, (1).

1.5 Dépendance du cône asymptotique de l'ultrafiltre

Dans [Gr$_4$], M. Gromov pose aussi la question de savoir combien de cônes asymptotiques non-isométriques peut avoir un groupe de type fini. Un premier exemple de groupe de type fini ayant deux cônes asymptotiques non-homéomorphes a été donné dans [TV].

Cette question s'est avérée être reliée à l'Hypothèse du Continu. Rappelons que l'Hypothèse du Continu consiste à dire qu'il n'y a pas d'autre nombre cardinal entre $\aleph_0$ et $2^{\aleph_0}$.

Soit Γ un réseau uniforme de $SL(n,\mathbb{R})$. Son cône asymptotique est le même que celui de $SL(n,\mathbb{R})$, c'est donc un immeuble euclidien, d'après le théorème de B. Kleiner et B. Leeb ([KlL], voir le théorème 1.3.22). Cet immeuble peut être décrit en termes de corps et de valuations, ainsi qu'il a été démontré par B. Leeb et Anne Parreau [Par], et aussi par L. Kramer, S. Shelah, K. Tent et S. Thomas [KSTT]. Ces derniers ont démontré de plus que :

- si l'Hypothèse du Continu n'est pas vérifiée alors tout réseau uniforme de $SL(n,\mathbb{R})$, $n \geq 3$, a $2^{2^{\aleph_0}}$ cônes asymptotiques non-isométriques ;

– si l'Hypothèse du Continu est vérifiée alors tous les cônes asymptotiques d'un réseau uniforme dans $SL(n,\mathbb{R})$, $n \geq 3$, sont isométriques. De plus, tout groupe de type fini a au plus $2^{\aleph_0}$ cônes asymptotiques non-isométriques.

Dans [10] on obtient le résultat suivant, indépendamment de l'Hypothèse du Continu.

Théorème 1.5.1. *Il existe un groupe à deux générateurs et de présentation récursive mais pas finie, ayant $2^{\aleph_0}$ cônes asymptotiques aux groupes fondamentaux non-isomorphes.*

Dans la construction d'un tel groupe, on suit la même démarche que dans la Section 1.4.2. On énumère les sous-ensembles finis non-vides de $\mathbb{N}$, en commençant par $\{1\}$, $\{1,2\}$, tous les sous-ensembles de $\{1,2,3\}$ contenant 3, tous les sous-ensembles de $\{1,2,3,4\}$ contenant 4 et ainsi de suite. On obtient la suite (F_k) des sous-ensembles finis non-vides de $\mathbb{N}$. Soit $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ le tore de dimension n pointé en $O = (0,\dots,0)$ et muni de la métrique riemannienne plate naturelle. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, considérons le bouquet de tores $\mathcal{B}_k = \bigvee_{n\in F_k}(\mathbb{T}^n, O)$ avec la métrique dist_k induite par les métriques sur les tores, et le point de coupure du bouquet O_k.

Soit $\Gamma = \langle a, b \mid R\rangle$ construit comme dans la Section 1.4.2, pour la suite d'espaces métriques pointés $(\mathcal{B}_k, \mathrm{dist}_k, O_k)_{k\in\mathbb{N}}$. On choisit $\zeta = \frac{1}{2}$ et tous les ζ^n-réseaux $N_n^{(k)}$ provenant des mêmes pavages des tores de différentes dimensions et de leurs subdivisions. Ainsi les ζ^n-réseaux $N_n^{(k)}$ peuvent être énumérés récursivement. Avec le même choix des ultrafiltres μ_k que dans la Section 1.4.2, le corollaire 1.4.19 et le lemme 1.3.5 impliquent le résultat suivant.

Proposition 1.5.2. *Le cône asymptotique* $\mathrm{Con}^{\mu_k}(\Gamma; e, d)$ *est gradué sur un arbre par rapport à un ensemble de pièces $\mathcal{P}_k$ tel que toute pièce soit isométrique à un des tores $\mathbb{T}^n$, $n \in F_k$.*

Notation : On note $\mathrm{Con}^{\mu_k}(\Gamma; e, d)$ par $\mathcal{C}_k$ et $\lim^{\mu_k}(e)$ par e_k.

Soit $I = \{i_1, i_2, \dots, i_n, \dots\}$ un sous-ensemble infini arbitraire de $\mathbb{N}$. Soit la suite croissante

$$F_{k_1} \subset F_{k_2} \subset \cdots \subset F_{k_n} \subset \cdots$$

définie par $F_{k_n} = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$. Associée à elle on a une suite de cônes asymptotiques de Γ, $(\mathcal{C}_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$. La proposition 1.2.17 implique que l'ultralimite $\lim^{\omega}(\mathcal{C}_{k_n})_{(e_{k_n})}$ est aussi un cône asymptotique de Γ, qu'on note $\mathcal{C}_\omega(I)$.

Proposition 1.5.3. *Le cône asymptotique $\mathcal{C}_\omega(I)$ est gradué sur un arbre par rapport à un ensemble de pièces $\mathcal{P}_\omega(I)$ tel que :*

(a) le groupe fondamental de chaque pièce est abélien ;

(b) chaque pièce est ou bien isométrique à un des tores $\mathbb{T}^n$, $n \in I$, ou bien elle contient la copie isométrique et π_1-injectée de $\mathbb{T}^m$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

(c) pour chaque $n \in I$ il existe $2^{\aleph_0}$ pièces distinctes isométriques à $\mathbb{T}^n$.

Corollaire 1.5.4. *Si $I \neq J$ alors les groupes fondamentaux de $\mathcal{C}_\omega(I)$ et de $\mathcal{C}_\omega(J)$ ne sont pas isomorphes.*

En effet, la proposition 1.5.3 et la propriété (4) des espaces gradués implique que le groupe fondamental de $\mathcal{C}_\omega(I)$ est un produit libre de $\mathbb{Z}^i$, $i \in I$, et de groupes abéliens de rang infini. Le théorème de Kurosh [LS] implique que si $j \notin I$ alors $\mathbb{Z}^j$ ne peut pas être un facteur libre de ce groupe.

D'après la remarque 1.2.11, chaque cône asymptotique $\mathcal{C}_k$ est isométrique à un cône asymptotique au sens restreint. De plus, on peut appliquer la proposition 1.2.19 pour conclure que chaque cône asymptotique $\mathcal{C}_\omega(I)$ est aussi un cône asymptotique au sens restreint.

Remarquons pour finir que dans toutes les constructions de groupes ayant des cônes asymptotiques distincts, ce qui apparaît toujours ce sont des cônes asymptotiques épars. La question suivante reste ouverte.

Question 1.5.5. Existe-t-il un groupe de type fini ayant deux cônes asymptotiques lents non-isométriques (non-homeomorphes) ?

Chapitre 2

Groupes hyperboliques et relativement hyperboliques

2.1 Groupes hyperboliques

2.1.1 Cônes asymptotiques, remplissage, automorphismes extérieurs

On peut caractériser les espaces métriques hyperboliques comme suit.

Théorème 2.1.1. *([Gr_4, §2.A], [5])*
Soit X un espace métrique géodésique.
(1) Si X est hyperbolique alors tout cône asymptotique de X est un arbre réel.
(2) Si pour un ultrafiltre ω fixé, tout cône asymptotique $\mathrm{Con}^{\omega}(X; e, d)$ est un arbre réel alors X est hyperbolique.
(3) Si tous les cônes asymptotiques au sens restreint de X sont des arbres réels alors X est hyperbolique.

On peut apporter plus de précisions sur la structure des cônes asymptotiques des groupes hyperboliques non-élémentaires. Rappellons tout d'abord qu'il existe une arbre réel complet $\mathcal{A}$ ayant la puissance du continu tel que tout point est un point de ramification duquel partent $2^{\aleph_0}$ directions distinctes. Un tel arbre est universel dans le sens que tout arbre réel ayant la puissance du continu peut être plongé isométriquement dans $\mathcal{A}$. En particulier l'arbre $\mathcal{A}$ est unique à isométrie près.

Théorème 2.1.2. *([DP]) Tout cône asymptotique d'un groupe hyperbolique non-élémentaire est isométrique à $\mathcal{A}$.*

On peut déduire du théorème 2.1.1 et de la remarque 1.2.9 le comportement par rapport aux quasi-isométries.

Théorème 2.1.3. *([Gr_3]) L'hyperbolicité est une propriété géométrique.*

Une autre preuve de ce théorème utilise la définition de l'hyperbolicité avec des triangles géodésiques fins et le lemme suivant.

Lemme 2.1.4 (lemme de Morse). *Dans un espace géodésique hyperbolique, tout segment quasi-géodésique est à distance uniformément bornée du segment géodésique joignant ses extrémités.*

Remarquons que le théorème 2.1.1 implique aussi, avec la proposition 1.4.1, que tout groupe hyperbolique est de présentation finie. Ceci a été déjà démontré dans [Gr_3, Théorème 2.3.A]. Concernant l'ordre de remplissage et l'ordre du rayon de remplissage, les résultats suivants sont connus.

Théorème 2.1.5. *([Gr_3])*
Soit X un espace métrique géodésique.
(1) Si X est hyperbolique alors l'ordre de la fonction de remplissage est linéaire.
(2) Si $A_X(\ell) = o(\ell^2)$ alors l'espace X est hyperbolique.

Plusieurs preuves du théorème 2.1.5, (2), ont été données dans [Ol_3], [Pp_2] et [Bow_2]. En utilisant les cônes asymptotiques, on peut prouver facilement la version de (2) ci-dessous [4].

Théorème 2.1.6. *Soit X un espace métrique géodésique, $\mathfrak{C}$ l'ensemble de tous les lacets lipschitziens dans X, $Ar : \mathfrak{C} \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction qui vérifie la propriété (IQ) énoncé dans la Section 1.1.3 et $A : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ la fonction définie par $A(\ell) = \sup\{Ar(c)\ ;\ c \in \mathfrak{C},\ c$ de longueur au plus $\ell\}$.*
Si $A(\ell) = o(\ell^2)$ alors X est un espace hyperbolique.

La version la plus forte du théorème 2.1.5, (2), est la suivante.

Théorème 2.1.7. *([Gr_3], [Ol_3], [Pp_1])*
Soit X un espace métrique géodésique. S'il existe N et L suffisamment grands et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tels que pour tout lacet c dans X vérifiant $N \leq Ar(c) \leq LN$ l'on ait

$$Ar(c) \leq \varepsilon \operatorname{long}(c)^2 ,$$

alors l'espace X est hyperbolique.

Dans [CDP, Chapitre 6, Théorème 2.1], il est démontré que si X est une variété riemannienne simplement connexe et complète satisfaisant des conditions supplémentaires faibles, alors dans le théorème 2.1.7 il suffit de prendre $\varepsilon < \frac{1}{16\pi}$.

Une preuve du théorème 2.1.7 avec des cônes asymptotiques semble hors de portée.

Pour ce qui est de l'ordre du rayon de remplissage, on obtient ce qui suit.

Théorème 2.1.8. *([Gr_3, Section 6], [4, Proposition 3.7]) Soit X un espace géodésique μ_0-simplement connexe et soit $r : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ la fonction rayon de remplissage dans cet espace. On a l'équivalence suivante :*
(1) X est hyperbolique ;
(2) $r(\ell) = o(\ell)$;
(3) $r(\ell) = O(\ln \ell)$.

Remarque 2.1.9. On peut remplacer dans le théorème précédent le rayon de remplissage par l'étranglement. Pour un lacet lipschitzien simple $c : \mathbb{S}^1 \to X$ de longueur ℓ et pour un nombre $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ on définit le *λ-étranglement du lacet* c comme étant $etr_\lambda(c) = \inf\{d(x,y)\ ;\ x, y \in c(\mathbb{S}^1)$ points qui décomposent $c(\mathbb{S}^1)$ en deux arcs de longueur au moins $\lambda\ell\}$. Pour $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ fixé on définit la fonction de *λ-étranglement* comme $etr_\lambda : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$,

$$etr_\lambda(\ell) = \sup\{etr_\lambda(c)\ ;\ c \text{ lacet lipschitzien simple de longueur } \leq \ell\} .$$

Le théorème 2.1.8 reste valable si on remplace le rayon de remplissage par etr_λ, avec $\lambda \in (0, 1/4]$ et si on enlève l'hypothèse de μ_0-simple connexité, qui n'est plus nécessaire [4].

Les estimations $r(\ell) = O(\ln \ell)$ et $etr_\lambda(\ell) = O(\ln \ell)$ sont les meilleures possibles. Ceci est illustré par un exemple dans le modèle du demi-espace $\{(x, y, t) \; ; \; t > 0\}$ de $\mathbb{H}^3$. Dans ce modèle, le cercle de rayon ℓ dans le plan horizontal $t = 1$ a le rayon de remplissage ainsi que le λ-étranglement pour tout $\lambda \in (0, 1/2)$ d'ordre $\ln \ell$.

Il y a aussi une variante forte du théorème 2.1.8, similaire au théorème 2.1.7.

Théorème 2.1.10. *(M. Gromov, [Pp$_4$]) Soit Γ un groupe de présentation finie. S'il existe ℓ_0 tel que $r(\ell) \leq \ell/73$ pour tout $\ell \geq \ell_0$, alors Γ est hyperbolique.*

Dans ce théorème la constante attendue est non pas 1/73 mais 1/8 [Pp$_4$].

A nouveau, il ne semble pas possible de démontrer le théorème 2.1.10 avec des cônes asymptotiques.

Une autre conséquence du théorème 2.1.1 concerne le groupe d'automorphismes extérieurs. Rappelons que pour tout groupe Γ son *groupe d'automorphismes extérieurs* $Out(\Gamma)$ est le quotient du groupe d'automorphismes $Aut(\Gamma)$ par le sous-groupe normal d'automorphismes intérieurs $Inn(\Gamma)$, c'est-à-dire d'automorphismes de conjugaison par des éléments du groupe.

Théorème 2.1.11 ([Pau]). *(1) Soit Γ un groupe hyperbolique. Si $Out(\Gamma)$ est infini alors Γ agit par isométries sur un arbre réel sans point fixe global et avec des stabilisateurs d'arêtes virtuellement cycliques.*

(2) Soit Γ un groupe hyperbolique ayant la propriété (T). Alors $Out(\Gamma)$ est fini.

L'affirmation (2) est une conséquence de (1), car la propriété (T) implique que toute action par isométries sur un arbre réel a un point fixe global.

2.1.2 Groupes hyperboliques et propriété de décroissance rapide (DR)

Soit Γ un groupe discret et soit L une fonction de longueur. Rappelons la définition de la propriété de décroissance rapide (DR) par rapport à L. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, *l'espace de Sobolev d'ordre s par rapport à L* est l'ensemble $H^s_L(\Gamma)$ des fonctions $x : \Gamma \to \mathbb{C}$ telles que $(1 + L)^s x \in l^2(\Gamma)$. L'espace des *fonctions à décroissance rapide sur Γ par rapport à L* est l'ensemble $H^\infty_L(\Gamma) = \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s_L(\Gamma)$.

L'algèbre du groupe Γ, $\mathbb{C}\Gamma$, est l'ensemble des fonctions $x : \Gamma \to \mathbb{C}$ à support fini. On note $\mathbb{R}_+\Gamma$ le sous-ensemble des fonctions prenant des valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Chaque élément $x \in \mathbb{C}\Gamma$ agit sur $l^2(\Gamma)$ par $\phi \mapsto x * \phi$, où

$$x * \phi(h) = \sum_{h_1 h_2 = h} x(h_1)\phi(h_2)\,.$$

On appelle l'opérateur sur $l^2(\Gamma)$ ainsi défini *opérateur de convolution* de x. C'est un opérateur borné. L'action de $\mathbb{C}\Gamma$ sur $l^2(\Gamma)$ est fidèle. On peut donc identifier $\mathbb{C}\Gamma$ à un sous-espace de l'espace $\mathbf{B}(l^2(\Gamma))$ des opérateurs bornés sur $l^2(\Gamma)$.

Pour chaque $x \in \mathbb{C}\Gamma$ soit $\|x\|_*$ sa norme en tant qu'opérateur,

$$\|x\|_* = \sup\{\, \|x * \phi\| \; ; \; \|\phi\| = 1\,\}\,.$$

L'adhérence $C^*_r(\Gamma)$ de $\mathbb{C}\Gamma$ dans la norme opératorielle est appelée *la C^*-algèbre réduite de* Γ.

Définition 2.1.12. Le groupe Γ a *la propriété de décroissance rapide (DR) par rapport à la fonction de longueur L* si l'inclusion de $\mathbb{C}\Gamma$ dans $C^*_r(\Gamma)$ s'étend à une inclusion continue de $H^\infty_L(\Gamma)$ dans $C^*_r(\Gamma)$.

Voir [C], [J], [CR] pour plus de détails sur cette propriété.

Lemme 2.1.13. *([CR]) On a l'équivalence :*

(1) Γ a la propriété (DR) par rapport à L ;

(2) Il existe un polynôme P tel que pour tout $r > 0$, tout $x \in \mathbb{R}_+\Gamma$ dont le support se trouve dans la boule fermée $\{g \in \Gamma \; ; \; L(g) \leq r\}$, et tout $\phi \in l^2(\Gamma)$,

$$\|x * \phi\| \leq P(r) \, \|x\| \cdot \|\phi\| \, . \tag{2.1}$$

Définition 2.1.14. Le groupe Γ a *la propriété (DR)* s'il existe une fonction de longueur L sur Γ par rapport à laquelle le groupe a la propriété (DR).

Remarque 2.1.15. Le lemme 1.1.1 implique qu'un groupe de type fini a la propriété (DR) si et seulement s'il a la propriété (DR) par rapport à toute fonction de longueur des mots.

La propriété (DR) est reliée à la conjecture de Novikov [CM] et à la conjecture de Baum-Connes [L].

Théorème 2.1.16. *([J], [H$_2$], [C]) Tout groupe hyperbolique a la propriété (DR).*

2.2 Groupes relativement hyperboliques (au sens fort)

2.2.1 Définition, cônes asymptotiques

La notion de groupe relativement hyperbolique a été introduite par M. Gromov dans [Gr$_3$] comme généralisation de la notion de groupe hyperbolique, destinée à formaliser aussi le cas des réseaux non-uniformes d'isométries des espaces hyperboliques. Plusieurs définitions ont été énoncées ultérieurement, similaires aux définitions équivalentes connus pour les groupes hyperboliques (voir [Bow$_3$], [Fa], [Os], [Dah$_2$], [Ya] et leurs références). Rappelons ici la définition de B. Farb, légèrement modifiée telle qu'elle apparaît dans [Os].

Soit Γ un groupe de type fini et soit $\{H_1, \dots, H_m\}$ une famille de sous-groupes de Γ. Soit S une partie génératrice finie de Γ stable par inversion. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble $\bigsqcup_{i=1}^{m}(H_i \setminus \{1\})$. Le graphe Cayley$(\Gamma, S)$ est un sous-graphe de Cayley$(\Gamma,\, S \cup \mathcal{H})$, ayant le même ensemble de sommets mais moins d'arêtes. On a $\mathrm{dist}_{S\cup\mathcal{H}}(u, v) \leq \mathrm{dist}_S(u, v)$, pour toute paire de sommets u, v. Notons aussi que Cayley$(\Gamma,\, S \cup \mathcal{H})$ n'est en général pas localement fini.

Définition 2.2.1. On dit que le groupe Γ est *relativement hyperbolique au sens faible par rapport à* $\{H_1, \dots, H_m\}$ si le graphe Cayley$(\Gamma,\, S \cup \mathcal{H})$ est hyperbolique.

Définition 2.2.2. Soit $\mathfrak{p}$ un chemin continu dans Cayley$(\Gamma,\, S \cup \mathcal{H})$. Une *$\mathcal{H}$-composante* de $\mathfrak{p}$ est un sous-chemin maximal de $\mathfrak{p}$ entièrement contenu dans une classe à gauche gH_i, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $g \in \Gamma$. Le chemin $\mathfrak{p}$ est *sans retour* s'il n'a pas deux $\mathcal{H}$-composantes distinctes dans la même classe à gauche gH_i.

Notation : Pour tout arc topologique $\mathfrak{q}$, on note $\mathfrak{q}_-$ son point de départ et $\mathfrak{q}_+$ son point d'arrivée.

Pour définir l'hyperbolicité relative forte, il faut ajouter à l'hyperbolicité relative faible la propriété suivante.

Définition 2.2.3. La paire $(\Gamma\,,\, \{H_1, \dots, H_m\})$ vérifie la propriété de *pénétration bornée des classes à gauche (BCP)* si, pour tout $\lambda \geq 1$, il existe $a = a(\lambda)$ ayant la propriété suivante. Soient $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ deux arcs topologiques λ-bilipschitz et sans retour dans Cayley$(\Gamma,\, S \cup \mathcal{H})$, tels que $\mathfrak{p}_- = \mathfrak{q}_-$ et $\mathrm{dist}_S(\mathfrak{p}_+, \mathfrak{q}_+) \leq 1$.

(1) Soit s une $\mathcal{H}$-composante de $\mathfrak{p}$ telle que $\mathrm{dist}_S(s_-, s_+) \geq a$. Alors $\mathfrak{q}$ a une $\mathcal{H}$-composante dans la même classe à gauche que s ;

(2) Soient s et t deux $\mathcal{H}$-composantes de $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$, respectivement, contenues dans la même classe à gauche. Alors $\mathrm{dist}_S(s_-, t_-) \leq a$ et $\mathrm{dist}_S(s_+, t_+) \leq a$.

Définition 2.2.4. Le groupe Γ est *relativement hyperbolique (au sens fort) par rapport à* $\{H_1, \ldots, H_m\}$ s'il est relativement hyperbolique au sens faible par rapport à $\{H_1, \ldots, H_m\}$ et si $(\Gamma\,,\,\{H_1, \ldots, H_m\})$ vérifie la propriété BCP.

Exemples 2.2.5. 1. Le groupe fondamental d'une variété hyperbolique de volume fini est relativement hyperbolique par rapport aux sous-groupes fondamentaux des pointes ;

2. Un groupe hyperbolique Γ est relativement hyperbolique par rapport à $\{1\}$, et aussi par rapport à toute famille finie de sous-groupes quasi-convexes $\{H_1, \ldots, H_k\}$ telle que chaque H_i coïncide avec son normalisateur dans Γ, et telle que $gH_ig^{-1} \cap H_j$ est fini si $i \neq j$ ou $g \notin H_i$;
3. Un produit libre de groupes est relativement hyperbolique par rapport à ses facteurs ;
4. Le groupe fondamental d'une variété de Haken ayant au moins une composante hyperbolique ; celui-ci est relativement hyperbolique par rapport aux groupes fondamentaux des composantes maximales qui sont des variétés graphées, et aux groupes fondamentaux des tores et des bouteilles de Klein qui ne sont pas contenus dans ces composantes ;
5. Un groupe ω-résiduellement libre (appelé aussi groupe limite de Sela [Se]) ; un tel groupe est relativement hyperbolique par rapport à la famille de sous-groupes abéliens maximaux non-cycliques [Dah$_1$].

Les groupes relativement hyperboliques peuvent aussi être caractérisés à l'aide des cônes asymptotiques comme suit.

Théorème 2.2.6. *([10, §8 et Appendice]) Soit Γ un groupe de type fini et soit $\{H_1, \ldots, H_m\}$ une famille de sous-groupes.*

(1) Si Γ est relativement hyperbolique par rapport à $\{H_1, \ldots, H_m\}$ et si chaque H_i est de type fini alors tout cône asymptotique $\mathrm{Con}^\omega(\Gamma; e, d)$ *est gradué sur un arbre par rapport à*

$$\mathcal{P}_\omega = \{\lim^\omega(g_nH_i)\ ;\ (g_n) \in \Gamma^\omega, i \in \{1, 2, \ldots, m\}\}\ .$$

(2) Si pour un ultrafiltre ω fixé, tout cône asymptotique $\mathrm{Con}^\omega(\Gamma; e, d)$ *est gradué sur un arbre par rapport à $\mathcal{P}_\omega$ alors Γ est relativement hyperbolique par rapport à $\{H_1, \ldots, H_m\}$ et chaque H_i est de type fini.*

(3) Si tout cône asymptotique au sens restreint $\mathrm{Con}^\omega(\Gamma; e, (n))$ *est gradué sur un arbre par rapport à $\mathcal{P}_\omega$ alors Γ est relativement hyperbolique par rapport à $\{H_1, \ldots, H_m\}$ et chaque H_i est de type fini.*

Ce théorème et la propriété (4) des espaces gradués sur un arbre impliquent que la réponse à la question 1.4.7 est positive pour le cas particulier des groupes relativement hyperboliques.

Corollaire 2.2.7. *Soit Γ un groupe relativement hyperbolique par rapport à $\{H_1, \ldots, H_m\}$ de type fini. Le groupe fondamental d'un cône asymptotique de Γ est ou bien trivial ou bien infini non-dénombrable.*

Toujours le théorème 2.2.6, le lemme 1.3.5 et le fait que les groupes H_i sont quasi-convexes dans $\mathrm{Cayley}(\Gamma, S)$ impliquent le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.8. *Si un groupe Γ est relativement hyperbolique par rapport à $\{H_1, \dots, H_m\}$ de type fini, et si chaque H_i est relativement hyperbolique par rapport à une famille de sous-groupes $\{H_i^1, \dots, H_i^{n_i}\}$ de type fini, alors Γ est relativement hyperbolique par rapport à $\{H_i^j \,;\, i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n_i\}\}$.*

Le théorème 2.2.6 montre que les groupes relativement hyperboliques sont des exemples de groupes rétrécis. On peut se poser la question si ce n'est pas le seul exemple.

Question 2.2.9. Est-ce qu'on peut améliorer l'énoncé du théorème 2.2.6 comme suit : un groupe Γ est relativement hyperbolique si et seulement si Γ est rétréci ?

Rappelons que si un cône asymptotique de Γ admet un point de coupure alors, d'après le lemme 1.3.6, (2), il est gradué sur un arbre avec comme ensemble de pièces ou bien des singletons ou bien des pièces sans points de coupure. Mais on ne sait pas si ces pièces sont des ensembles limite de classes à gauche de sous-groupes.

Le théorème 2.2.6 et le théorème de Stallings sur les bouts ([St$_1$], [St$_2$]) impliquent :

Corollaire 2.2.10. *Un groupe étalé a un seul bout.*

La réciproque n'est par vraie, comme il est illustré par l'exemple des réseaux uniformes d'isométries de $\mathbb{H}^3$.

Il existe un théorème similaire au théorème 2.1.5, formulé pour les groupes relativement hyperboliques, dans [Os].

2.2.2 Caractérisation métrique de l'hyperbolicité relative

La référence pour cette section, sauf mention contraire, est [10].

Le théorème 2.2.6 fournit la première caractérisation de l'hyperbolicité relative qui fait intervenir seulement le graphe de Cayley du groupe par rapport à une partie génératrice finie. Toutes les autres définitions font appel ou bien au graphe Cayley$(\Gamma,\, S \cup \mathcal{H})$, ou bien à d'autres modifications de Cayley(Γ, S). On peut obtenir davantage du théorème 2.2.6, à savoir une caractérisation de l'hyperbolicité relative en termes de graphe de Cayley seulement, sans faire intervenir les cônes asymptotiques. Cette caractérisation comprend trois propriétés, dont les énoncés approximatifs sont ceux-ci :

(α_1) deux classes à gauche distinctes restent "parallèles" le long de sous-ensembles uniformément bornés ;

(α_2) un segment géodésique de longueur ℓ dont les extrémités sont à une distance plus petite que $\ell/2$ d'une classe à gauche, passe uniformément près de cette classe à gauche ;

(α_3) les polygones géodésiques "gros" sont contenus dans le voisinage d'une classe à gauche.

Ces propriétés sont purement métriques et ont un sens dans un espace métrique pour une famille de sous-ensembles. On peut donc travailler dans ce contexte. Introduisons tout d'abord la définition suivante.

Définition 2.2.11 (espace asymptotiquement gradué sur un arbre). Soit (X, dist) un espace métrique et soit $\mathcal{A} = \{A_i \,;\, i \in I\}$ une famille de sous-ensembles de X. Dans chaque cône asymptotique $\mathrm{Con}^\omega(X; e, d)$, considérons la famille d'ensembles limite

$$\mathcal{A}_\omega = \left\{ \lim{}^\omega(A_{i_n}) \,;\, (i_n)^\omega \in I^\omega \text{ telle que la suite } \left(\frac{\mathrm{dist}(e_n, A_{i_n})}{d_n} \right) \text{ soit bornée} \right\}.$$

On dit que X est *asymptotiquement gradué sur un arbre par rapport à $\mathcal{A}$* si tout cône asymptotique $\mathrm{Con}^\omega(X; e, d)$ est gradué sur un arbre par rapport à $\mathcal{A}_\omega$.

Il suffit que la propriété soit vérifiée ou bien pour un ultrafiltre fixé ou bien par les cônes asymptotiques au sens restreint, pour qu'elle soit vérifiée par tous les cônes asymptotiques.

Définissons maintenant les polygones géodésiques "gros". Dans ce qui suit, par polygone on entend l'image d'un polygone euclidien par une application dont la restriction à chaque arête est une géodésiques ou une quasi-géodésique. Soit P un polygone aux arêtes géodésiques et soit $\mathcal{V}$ l'ensemble de ses sommets. Les points dans $P \setminus \mathcal{V}$ sont appelés *points intérieurs de* P. Pour tout sommet $x \in \mathcal{V}$, on note $\mathcal{O}_x$ la réunion des arêtes de P qui n'ont pas x comme extrémité.

Soit $p \in P$. Le *rayon inscrit dans* p par rapport à P est ou bien la distance de p à $\mathcal{O}_p$, si p est un sommet, ou bien la distance de p à $P \setminus \mathfrak{q}$ si p est contenu dans l'intérieur d'une arête $\mathfrak{q}$.

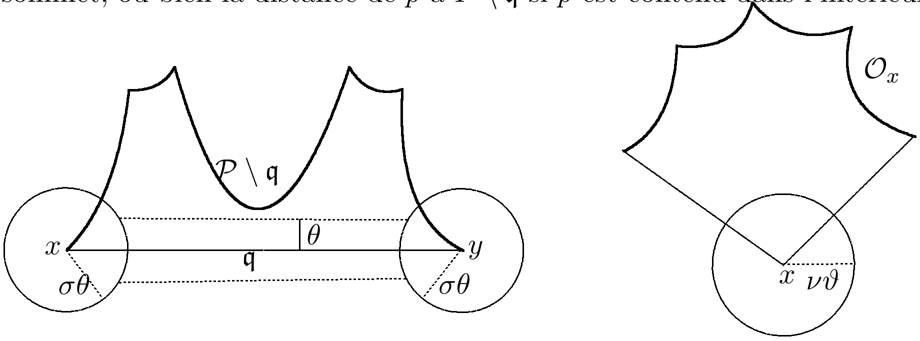

FIG. 2.1 – Propriétés (F_1) et (F_2).

Définition 2.2.12 (polygones gros). Soient $\vartheta > 0$ et $\nu \geq 8$. Un k-gone P aux arêtes géodésiques est (ϑ, ν)-*gros* si les conditions suivantes sont vérifiées :

(F_1) (**grands angles de comparaison, grands rayons inscrits dans des points intérieurs**) pour chaque arête $\mathfrak{q}$ d'extrémités $\{x, y\}$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\operatorname{dist}\left(\mathfrak{q} \setminus \mathcal{N}_{2\vartheta}(\{x,y\}),\, P \setminus \mathfrak{q}\right) \geq \vartheta;$$

(F_2) (**longues arêtes, grands rayons inscrits dans les sommets**) chaque sommet x vérifie

$$\operatorname{dist}(x, \mathcal{O}_x) \geq \nu\vartheta.$$

Théorème 2.2.13. *Soit* (X, dist) *un espace métrique géodésique et soit* $\mathcal{A} = \{A_i \,;\, i \in I\}$ *une famille de sous-ensembles de* X*. L'espace métrique* X *est asymptotiquement gradué sur un arbre par rapport à* $\mathcal{A}$ *si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(α_1) *Pour tout* $\delta > 0$*, les intersections* $\mathcal{N}_\delta(A_i) \cap \mathcal{N}_\delta(A_j)$*, si non-vides, ont des diamètres bornés uniformément en* i *et* j*,* $i \neq j$*.*

(α_2) *Pour tout* $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ *il existe* $M > 0$ *tel que pour toute géodésique* $\mathfrak{q}$ *de longueur* ℓ *et tout ensemble* $A \in \mathcal{A}$ *satisfaisant* $\{\,\mathfrak{q}(0)\,,\, \mathfrak{q}(\ell)\,\} \subset \mathcal{N}_{\theta\ell}(A)$*, on a* $\mathfrak{q}([0,\ell]) \cap \mathcal{N}_M(A) \neq \emptyset$*.*

(α_3) *Pour tout* $k \geq 2$ *il existe* $\vartheta > 0$*,* $\nu \geq 8$ *et* $\chi > 0$ *tels que tout* k*-gone aux arêtes géodésiques dans* X *qui est* (ϑ, ν)*-gros est contenu dans le* χ*-voisinage d'un ensemble* $A \in \mathcal{A}$*.*

Les théorèmes 2.2.6 et 2.2.13 impliquent l'équivalence suivante.

Corollaire 2.2.14. *Soit* Γ *un groupe de type fini,* dist *une métrique des mots sur* Γ *et, pour une famille finie de sous-groupes* $\{H_1, \dots, H_m\}$, *soit la famille des classes à gauche* $\mathcal{A} = \{gH_i\ ;\ g \in \Gamma/H_i\,,\ i \in \{1, 2, \dots, m\}\}$. *Le groupe* Γ *est relativement hyperbolique par rapport à* $\{H_1, \dots, H_m\}$ *si et seulement si* $(\Gamma, \mathrm{dist}, \mathcal{A})$ *vérifient* (α_1), (α_2) *et* (α_3).

Le théorème 2.2.13 permet aussi de définir la notion d'*espace métrique relativement hyperbolique* par rapport à une famille de sous-ensembles.

On dispose également d'une variante du lemme de Morse (lemme 2.1.4), dans ce contexte. Plus précisément, soit $\Gamma = \langle S \rangle$ un groupe relativement hyperbolique par rapport à une famille de sous-groupes $\{H_1, \dots, H_m\}$ et soit $\mathfrak{g}$ une géodésique arbitraire dans $\mathrm{Cayley}(\Gamma, S)$. Pour une constante positive M, on définit *la M-saturation de* $\mathfrak{g}$, noté $\mathrm{Sat}_M(\mathfrak{g})$, comme la réunion de $\mathfrak{g}$ avec toutes les classes à gauche gH_i telles que $\mathcal{N}_M(gH_i)$ intersecte $\mathfrak{g}$.

Théorème 2.2.15 (Lemme de Morse). *Il existe une constante positive M dépendante de S telle que les propriétés suivantes sont vérifiées. Soit* $\mathfrak{g}$ *une géodésique dans* $\mathrm{Cayley}(\Gamma, S)$ *et soit* $\mathfrak{q} : [0, \ell] \to \mathrm{Cayley}(\Gamma, S)$ *un segment (L, C)-quasi-géodésique joignant les extrémités de* $\mathfrak{g}$. *On a :*

(1) $\mathfrak{q}$ *est contenu dans le τ-voisinage de* $\mathrm{Sat}_M(\mathfrak{g})$, *où* $\tau = \tau(L, C)$.

(2) Soient gH_i et $g'H_j$ deux classes à gauche contenues dans $\mathrm{Sat}_M(\mathfrak{g})$. *Supposons qu'il existe un sous-segment quasi-géodésique $\mathfrak{q}'$ de $\mathfrak{q}$ joignant $a \in \mathcal{N}_\tau(gH_i)$ et $b \in \mathcal{N}_\tau(g'H_j)$ et dont les intersections avec $\mathcal{N}_\tau(gH_i)$ et $\mathcal{N}_\tau(g'H_j)$ sont de diamètre au plus δ. Alors $\{a\,,\, b\} \subset \mathcal{N}_\kappa(\mathfrak{g})$, où $\kappa = \kappa(L, C, \tau, \delta)$.*

Le même résultat reste vrai si on remplace une des deux classes à gauche $gH_i, g'H_j$ par un point de $\mathfrak{g}$.

(3) Dans $\mathrm{Cayley}(\Gamma, S \cup \mathcal{H})$, $\mathfrak{q}$ *est à distance de Hausdorff au plus $\varkappa$ de toute géodésique dans le même graphe joignant ses extrémités, où $\varkappa = \varkappa(S, L, C)$.*

Un autre résultat parallèle à ceux dans les groupes hyperboliques est le suivant.

Théorème 2.2.16 (centre d'un triangle géodésique). *Il existe une constante absolue R telle que tout triangle géodésique dans* $\mathrm{Cayley}(\Gamma, S)$ *se trouve dans l'une des deux situations suivantes.*

(C) Il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $B(\gamma, R)$ intersecte chacune des trois arêtes du triangle ;

(P) Il existe une unique classe à gauche gH_i telle que $\mathcal{N}_R(gH_i)$ intersecte chacune des trois arêtes du triangle.

2.2.3 Groupes relativement hyperboliques et propriété (DR)

Mis à part le cas des groupes hyperboliques déjà cité, la propriété (DR) a été déjà démontrée dans plusieurs cas particuliers de groupes relativement hyperboliques :

1. un produit amalgamé de deux groupes A et B au dessus d'un sous-groupe fini F vérifie la propriété (DR) si et seulement si A et B la vérifient [J] ;
2. un groupe Γ relativement hyperbolique par rapport aux sous-groupes $\{H_1, \dots, H_m\}$ de type fini et de croissance polynomiale, a la propriété (DR) [CR]. Rappelons que la croissance polynomiale implique (DR) [J].

Dans [8] on démontre le résultat suivant.

Théorème 2.2.17. *Soit Γ un groupe de type fini relativement hyperbolique par rapport aux sous-groupes $\{H_1, \dots, H_m\}$ de type fini. Le groupe Γ a la propriété (DR) si et seulement si $H_1, \dots, H_m$ ont la propriété (DR).*

L'implication directe s'ensuit du fait que tout sous-groupe d'un groupe ayant la propriété (DR) vérifie lui-même la propriété (DR) par rapport à la fonction de longueur induite [J, Proposition 2.1.1].

Dans la preuve du théorème 2.2.17 on suit en gros la même démarche que dans la preuve du théorème 2.1.16, et à l'aide du théorème 2.2.16 et du théorème 2.2.15, (2), on montre que l'inégalité (2.1) se ramène toujours à une inégalité similaire dans chaque H_i, avec des fonctions modifiées.

2.2.4 Rigidité des groupes relativement hyperboliques

Référence : Pour cette section, sauf mention contraire, la référence est à nouveau [10].

Une question naturelle est de savoir si la propriété d'hyperbolicité relative est une propriété géométrique, à l'image de l'hyperbolicité. Il faut tout d'abord chercher des conditions sur les sous-groupes H_i qui assureraient une telle rigidité. Le théorème 2.2.6 et la propriété (6) des espaces gradués sur un arbre suggèrent qu'une telle condition serait "H_i ayant un cône asymptotique sans point de coupure", c'est-à-dire "H_i non-rétréci", pour tout i. Le résultat suivant confirme cette supposition.

Théorème 2.2.18. *Soit Γ un groupe de type fini relativement hyperbolique par rapport aux sous-groupes $\{H_1, \dots, H_m\}$ de type fini. Soit S un groupe non-rétréci. L'image de S par un (L, C)-plongement quasi-isométrique $\mathbf{q} : S \to \Gamma$ est contenue dans le M-voisinage d'une classe à gauche gH_i, $g \in \Gamma$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, où $M = M(L, C, S, \Gamma)$.*

L'hypothèse que S est un groupe non-rétréci est aussi nécessaire. On peut voir ceci pour l'exemple $S = \Gamma$ qui ne la vérifie pas.

Le théorème 2.2.18 reste vrai dans le cadre plus général des espaces métriques. Plus précisément on peut remplacer Γ et $\{gH_i \ ; \ g \in \Gamma/H_i \, , i \in \{1, 2, \dots, m\}\}$ par X et $\mathcal{A}$, X asymptotiquement gradué sur un arbre par rapport à $\mathcal{A}$, et S par un espace métrique non-rétréci. Une conséquence de cette variante généralisée est le Lemme du quasi-plat de [Sch_1].

Un résultat similaire au théorème 2.2.18 est obtenu dans [PW, §3], pour Γ un groupe fondamental d'un graphe de groupes avec des groupes d'arêtes finis, et pour S un groupe à un bout. Dans le théorème 2.2.18 on ne peut pas affaiblir la condition sur S à "S groupe à un bout" (voir le corollaire 2.2.10). Par exemple si S est un réseau non-uniforme d'isométries de $\mathbb{H}^3_{\mathbb{R}}$, alors S a un seul bout et d'autre part il est relativement hyperbolique par rapport aux sous-groupes fondamentaux des pointes. Ainsi S est plongé quasi-isométriquement dans S par l'identité, et l'image ne se trouve pas uniformément proche d'une classe à gauche d'un groupe fondamental d'une pointe.

Remarque 2.2.19. Le théorème 2.2.18 paraît naturel quand S est nilpotent, mais il le paraît moins si on prend S un groupe résoluble ou de Burnside (on peut le faire, d'après le théorème 1.3.16). Les cônes asymptotiques de tels groupes sont composés de copies d'anneaux hawaïens ([Gr_4], [Bu]), donc un comportement rigide au plongement quasi-isométrique dans un groupe relativement hyperbolique n'est pas assuré a *priori*.

Le théorème 2.2.18 admet la variante uniforme suivante.

Théorème 2.2.20. *Soit Γ un groupe de type fini relativement hyperbolique par rapport aux sous-groupes $\{H_1, \dots, H_m\}$ de type fini. Soit $\mathcal{G}$ une famille de groupes de type fini uniformément non-rétrécie. Pour tout $L \geq 1$ et $C \geq 0$ il existe une constante $M = M(L, C, \mathcal{G}, \Gamma)$ telle que pour tout groupe S dans $\mathcal{G}$, l'image de S par un (L, C)-plongement quasi-isométrique $\mathbf{q} : S \to \Gamma$ est contenue dans le M-voisinage d'une classe à gauche gH_i, $g \in \Gamma$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.*

D'après les théorèmes 1.3.17 et 1.3.20, ce résultat uniforme s'applique à la classe des groupes non-virtuellement cycliques ayant un élément central d'ordre infini, ou à toute classe de groupes non-virtuellement cycliques vérifiant une identité.

Corollaire 2.2.21. *Tout sous-groupe S infini et de type fini, non-distordu dans Γ et non-rétréci est contenu dans un conjugué gH_ig^{-1}, $g \in \Gamma$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.*

Pour la définition d'un sous-groupe non-distordu dans un groupe voir la Section 3.1. On peut apporter même plus de précisions sur les sous-groupes de type fini non-distordus de Γ.

Théorème 2.2.22. *Soit S un sous-groupe de type fini non-distordu de Γ. Alors S est relativement hyperbolique par rapport à des sous-groupes $H'_1, ..., H'_k$, où chaque H'_i est un des sous-groupes $S \cap gH_jg^{-1}$, $g \in \Gamma$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.*

Le théorème 2.2.18 implique que la relative hyperbolicité est une propriété géométrique sous certaines conditions sur les groupes $\{H_1, \ldots, H_m\}$.

Théorème 2.2.23. *Soit Γ un groupe de type fini relativement hyperbolique par rapport aux sous-groupes $\{H_1, \ldots, H_m\}$ de type fini. Supposons que H_i est non-rétréci, $i = 1, ..., m$.*

Soit Γ' un groupe de type fini quasi-isométrique à Γ. Alors Γ' est relativement hyperbolique par rapport aux sous-groupes $H'_1, ..., H'_n$ tels que chaque H'_i est quasi-isométrique à un des sous-groupes $H_1, ..., H_m$.

Le cardinal m de la famille des sous-groupes H_i du théorème 2.2.23 n'est pas un invariant de quasi-isométrie. On peut voir ceci sur l'exemple d'un groupe fondamental d'une variété hyperbolique non-compacte de volume fini et du groupe fondamental d'un revêtement fini de la variété.

Le théorème 2.2.23 a été déjà démontré dans des cas particuliers : pour les groupes fondamentaux des variétés de Haken non-géométriques ayant au moins une composante hyperbolique ([KaL$_1$], [KaL$_2$]), et pour les réseaux non-uniformes d'isométries des espaces symétriques de rang un [Sch$_1$]. Aussi, dans [PW] on fait la classification à quasi-isométrie près des produits libres de groupes, et plus généralement des groupes fondamentaux des graphes de groupes avec des groupes d'arêtes finis.

Concernant le groupe des automorphismes extérieurs, on a les résultats suivants.

Théorème 2.2.24. *Soit Γ un groupe de type fini relativement hyperbolique par rapport aux sous-groupes $\{H_1, \ldots, H_m\}$ de type fini. Supposons que H_1 est non-rétréci et que chaque H_i, $i = 2, ..., m$, est ou bien non-rétréci ou bien il ne contient pas de sous-groupe isomorphe à H_1. Soit $\mathrm{Fix}(H_1)$ le sous-groupe du groupe des automorphismes de Γ composé des automorphismes φ telles que $\varphi(H_1) = H_1$. Alors :*

(1) $\mathrm{Inn}(\Gamma)\mathrm{Fix}(H_1)$ *est d'indice au plus $m!$ dans* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$.

(2) $\mathrm{Inn}(\Gamma) \cap \mathrm{Fix}(H_1) = \mathrm{Inn}_{H_1}(\Gamma)$, *où* $\mathrm{Inn}_{H_1}(\Gamma)$ *est par définition* $\{i_h \in \mathrm{Inn}(\Gamma)\ ;\ h \in H_1\}$.

(3) Il existe un morphisme d'un sous-groupe de $\mathrm{Out}(\Gamma)$ *d'indice au plus $m!$ dans* $\mathrm{Out}(H_1)$, *défini par $\phi \mapsto i_{g_\phi}\phi|_{H_1}$, où g_ϕ est un élément de Γ tel que $i_{g_\phi}\phi \in \mathrm{Fix}(H_1)$, et $|_{H_1}$ signifie la restriction de l'automorphisme à H_1.*

Corollaire 2.2.25. *Soit Γ un groupe de type fini relativement hyperbolique par rapport aux sous-groupes $\{H_1, \ldots, H_m\}$ non-rétrécis. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, m\}$, il existe un morphisme d'un sous-groupe de $Out(\Gamma)$ d'indice au plus $m!$ dans $Out(H_i)$.*

Corollaire 2.2.26. *Soit Γ un groupe de type fini relativement hyperbolique par rapport au sous-groupe H non-rétréci. Alors :*

(1) $\mathrm{Inn}(\Gamma)\mathrm{Fix}(H) = \mathrm{Aut}(\Gamma)$.

(2) $\mathrm{Inn}(\Gamma) \cap \mathrm{Fix}(H) = \mathrm{Inn}_H(\Gamma)$.

(3) Il existe un morphisme de $\mathrm{Out}(\Gamma)$ *dans* $\mathrm{Out}(H)$.

2.2.5 Questions

Question 2.2.27. Peut-on obtenir le théorème 2.2.23 sans l'hypothèse que $H_1, \ldots, H_m$ sont non-rétrécis ?

L'argument de [10] ne s'applique pas dans ce cas, puisqu'il utilise le théorème 2.2.18, ou l'hypothèse "non-rétréci" est essentielle.

Remarquons qu'une réponse affirmative à la question 2.2.9 impliquerait une réponse partielle à la question 2.2.27.

Question 2.2.28. Est-ce que l'hyperbolicité relative faible est une propriété géométrique ?

A nouveaux, l'ingrédient principal des arguments de [10], le théorème 2.2.18, n'est plus valable. Ceci est clair dans le cas du groupe $\mathbb{Z}^2$, relativement hyperbolique au sens faible par rapport à $H = \mathbb{Z} \times \{0\}$. Évidemment, il existe des plongements quasi-isométriques de H dans $\mathbb{Z}^2$ dont les images ne sont pas à distance de Hausdorff finie d'une classe à gauche de H.

Question 2.2.29. Peut-on généraliser le théorème 2.1.2 comme suit : si Γ est un groupe relativement hyperbolique par rapport aux sous-groupes $\{H_1, \ldots, H_m\}$ et si H_i a tous les cônes asymptotiques isométriques à un espace métrique $\mathcal{C}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, alors Γ a tous les cônes asymptotiques isométriques à un espace gradué sur un arbre qui est "universel" parmi les espaces gradués sur un arbre de puissance continu et dont les pièces sont isométriques à un des espaces $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m$?

Chapitre 3

Espaces symétriques et réseaux d'isométries

3.1 Préliminaires

Un espace métrique (Y, dist_Y) contenu en tant qu'ensemble dans un autre espace métrique (X, dist_X) est *non-distordu dans* X, si l'ensemble

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{\mathrm{dist}_Y(y_1, y_2)}{\mathrm{dist}_X(y_1, y_2)} \; ; \; y_1, y_2 \in Y, \; y_1 \neq y_2 \right\}$$

admet une borne supérieure finie et une borne inférieure positive. Une borne supérieure de $\mathcal{D}$ est appelée *constante de non-distorsion de* Y *dans* X. Une borne supérieure d'un sous-ensemble de $\mathcal{D}$ de la forme

$$\mathcal{D}_\delta = \left\{ \frac{\mathrm{dist}_Y(y_1, y_2)}{\mathrm{dist}_X(y_1, y_2)} \; ; \; y_1, y_2 \in Y, \; \mathrm{dist}_X(y_1, y_2) \geq \delta \right\} ,$$

où $\delta > 0$, est appelée *constante de non-distorsion de* Y *dans* X *pour des distances suffisamment grandes.*

En particulier, si Γ_1 est un sous-groupe de type fini dans un groupe de type fini Γ, on dit que Γ_1 est *non-distordu dans* Γ s'il l'est en tant qu'espace métrique avec une métrique des mots dans Γ avec une métrique des mots.

Soit (X, dist) un espace métrique géodésique localement $CAT(0)$. Soit r un rayon géodésique dans X. *La fonction de Busemann associée à* r est la fonction

$$f_r : X \to \mathbb{R}, \; f_r(x) = \lim_{t \to \infty} [\, \mathrm{dist}(x, r(t)) - t \,].$$

On appelle l'hypersurface $H(r) = \{x \; ; \; f_r(x) = 0\}$ *l'horosphère déterminée par le rayon* r. On appelle les ensembles $Hb(r) = \{x \; ; \; f_r(x) \leq 0\}$ et $Hbo(r) = \{x \; ; \; f_r(x) < 0\}$ *l'horoboule fermée* et respectivement *l'horoboule ouverte déterminés par* r. On peut aussi définir d'autres horosphères par $H_a(r) = \{x \; ; \; f_r(x) = a\}$, où $a \in \mathbb{R}$. De la même manière on définit des horoboules fermées et ouvertes $Hb_a(r)$ et $Hbo_a(r)$.

Supposons de plus que X soit simplement connexe et complet (dans ce cas on dit que X est $CAT(0)$). Rappelons que son bord $\partial_\infty X$ est l'ensemble des classes de rayons géodésiques asymptotes. Pour tout point x dans X et tout $\xi \in \partial_\infty X$, il existe un unique rayon géodésique d'origine x et de point à l'infini ξ. Ainsi $\partial_\infty X$ peut être identifié à l'ensemble des rayons géodésiques issus de x. La topologie induite sur $\partial_\infty X$ par cette identification s'appelle la *topologie conique*. Elle ne dépend pas du point x choisi.

Les fonctions de Busemann de deux rayons géodésiques asymptotes diffèrent par une constante [BrH]. Ceci implique qu'elles définissent les mêmes familles d'horosphères et d'horoboules. On peut donc parler, pour tout $\xi \in \partial_\infty X$, d'horosphère et d'horoboule *de point base* ξ.

Soit X un produit d'espaces symétriques de type non-compact et d'immeubles euclidiens, de rang $\mathbf{r}$. Son bord $\partial_\infty X$ est un immeuble sphérique de rang $\mathbf{r}$ ([Mo, Chapitres 15,16], [BGS, Appendice 5], [KlL, §4.2.1]). Il s'ensuit que $\partial_\infty X$ admet un étiquetage qui permet de définir une projection *pente* : $\partial_\infty X \to \Delta$ sur une chambre sphérique modèle Δ. L'image d'un point ξ par la projection *pente* est appelée *la pente de* ξ.

Si M est un rayon géodésique, une chambre de Weyl, un mur de chambre de Weyl ou un plat dans X, on note $M(\infty)$ l'ensemble de ses points à l'infini, vu comme sous-ensemble de $\partial_\infty X$. Pour tout rayon géodésique r de X on appelle $pente(r(\infty))$ aussi *la pente de* r. Elle montre quelle est la position de r dans chaque chambre de Weyl de sommet $r(0)$ qui la contient. Si X se décompose en un produit $X_1 \times X_2$ et si r est contenu dans $X_1 \times \{x_2\}$, pour un $x_2 \in X_2$, on dit que la pente du rayon r est *parallèle à un facteur*. On utilise la même terminologie pour le point à l'infini $r(\infty)$.

Tous les appartements de $\partial_\infty X$ sont isométriques à un complexe de Coxeter sphérique, qu'on appelle le *complexe de Coxeter sphérique de* X.

Supposons que X n'a pas comme facteur d'immeuble euclidien. Son groupe d'isométries G est un groupe de Lie semisimple sans facteur compact et de centre trivial. On identifie X au quotient $K\backslash G$, où K est un sous-groupe compact maximal [He]. On considère donc l'action de G sur X par isométries *à droite*. Par conséquent l'action de G sur G par conjugaison est aussi considérée à droite, c'est-à-dire $a : G \to Aut\,(G)\,,\ a(g_0)(g) = g_0^{-1} g g_0$.

Soit r un rayon géodésique dans X. Le *groupe parabolique* $P(r)$ de r est le groupe composé par les éléments $g \in G$ tels que le rayon rg est à distance de Hausdorff finie de r. Le *groupe unipotent* $U(r)$ de r est le sous-groupe de $P(r)$ composé par les éléments $\mathbf{u}$ tels que $\lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}(r(t), r(t)\mathbf{u}) = 0$. Le *groupe unipotent opposé* $U_+(r)$ de r est le groupe unipotent du rayon opposé à r.

Un *réseau* dans G est un sous-groupe discret Γ tel que G/Γ admette une mesure finie invariante induite par la mesure de Haar de G. Si G/Γ est compact, on dit que Γ est un réseau *uniforme*, sinon on dit qu'il est *non-uniforme*.

L'espace localement symétrique quotient X/Γ contient un nombre fini de secteurs euclidiens totalement géodésiques, éventuellement collés le long des faces, $W_1, \dots, W_m$, tels que X/Γ soit à distance de Hausdorff finie de $W_1 \cup \cdots \cup W_m$. Pour des détails voir [BoS] et [Le]. Rappelons que si X est de rang au moins 2 alors X/Γ, si non-compact, a un seul bout topologique. Si X est de rang un par contre, X/Γ peut avoir plusieurs bouts et dans ce cas $W_1, \dots, W_m$ sont des rayons géodésiques deux à deux disjoints. Dans tous les cas, la profondeur dans un bout contenant le secteur/rayon W_i peut être mesurée par la fonction de Busemann $f_{\bar{r}}$ correspondant à un rayon géodésique $\bar{r}$ contenu dans W_i.

Remarque 3.1.1. Soit r un relèvement du rayon $\bar{r}$ et soit proj : $X \to X/\Gamma$ la projection canonique. Pour $a < 0$ tel que $|a|$ est suffisamment grand, la projection $\mathrm{proj}(Hb_a(r))$ est $Hb_a(\bar{r})$.

3.2 Horosphères et groupes résolubles

3.2.1 Non-distorsion des horosphères

Dans certains cas, les résultats énoncés dans la proposition 1.4.1, la remarque 1.4.2 et le théorème 1.4.4 peuvent être améliorés. C'est le cas des horosphères dans des espaces symétriques de rang au moins 2, ou, en terme de groupes, c'est le cas de certains sous-groupes résolubles dans des groupes semisimples. Dans ces cas, les informations obtenues dans les cônes asymptotiques sont transférées avec très peu de variations aux espaces mêmes.

Des résultats sur la non-distorsion des horosphères ont été obtenus dans [Gr_4] pour des rayons réguliers dans des espaces symétriques et aussi, de façon implicite, dans [LMR] pour des horosphères qui délimitent l'espace noyau d'un réseau de $\mathbb{Q}$-rang un (voir le théorème 3.2.5 pour la définition d'un tel espace).

Soit r un rayon géodésique dans un espace symétrique ou un immeuble euclidien X. Dans tout cône asymptotique l'ensemble limite de l'horosphère $H(r)$ est l'horosphère correspondant au rayon géodésique qui apparaît comme limite de r. Ceci se généralise à une suite de rayons géodésiques comme suit.

Proposition 3.2.1. *([1]) Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rayons géodésiques dans (X, dist) espace métrique géodésique $CAT(0)$. Soit $Con_\omega(X; e, d)$ un cône asymptotique quelconque de X et soit ρ le rayon limite $\lim^\omega(r_n)$. On a les égalités suivantes :*

(a) $f_\rho(y) = \lim_\omega f_{r_n}(y_n)$, pour tout $y = \lim^\omega(y_n)$, où f_{r_n} est la fonction de Busemann de r_n dans $\left(X, \frac{1}{d_n}\mathrm{dist}\right)$;

(b) $\lim^\omega(Hb(r_n)) = Hb(\rho)$ et $\lim^\omega(H(r_n)) = H(\rho)$.

Ainsi, par le théorème 1.3.22, on est ramené à un étude des horosphères dans des immeubles euclidiens. Dans [1] et [6] le résultat suivant est démontré.

Théorème 3.2.2. *Soit $\mathbf{K}$ un immeuble euclidien 3-épais de rang au moins 2 et soit ρ un rayon géodésique dans $\mathbf{K}$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

($\mathbf{P}_1$) *$H(\rho)$ avec la métrique de longueur est non-distordue dans $\mathbf{K}$;*

($\mathbf{P}_2$) *$H(\rho)$ est connexe ;*

($\mathbf{P}_3$) *la pente de ρ n'est pas parallèle à un facteur de rang 1 de $\mathbf{K}$.*

Si ρ vérifie une de ces trois propriétés, on peut trouver une constante C_0 de non-distorsion de $H(\rho)$ qui dépend seulement du complexe de Coxeter sphérique de $\mathbf{K}$ et de la pente du rayon ρ. Cette constante C_0 peut être calculée effectivement (voir [6, Remarque 3.C.4]).

Contrairement au cas général présenté dans la proposition 1.4.1 et la remarque 1.4.2, le théorème 3.2.2 "descend" tel quel dans l'espace métrique initial. On obtient ainsi :

Théorème 3.2.3. *([1], [6]) Soit X un produit d'espaces symétriques de type non-compact et d'immeubles euclidiens, de rang au moins 2, et soit r un rayon géodésique dans X. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

($\mathbf{P}_1^*$) *$H(r)$ avec la métrique de longueur est non-distordue dans X ;*

($\mathbf{P}_2^*$) *la pente de r n'est pas parallèle à un facteur de rang 1 de X .*

Preuve du théorème 3.2.3 à partir du théorème 3.2.2.

Pour chaque cône asymptotique $\mathbf{K}$ de X, soit ρ le rayon géodésique qui est limite de r. La condition **($\mathbf{P}_2^*$)** pour r implique la condition **($\mathbf{P}_3$)** pour ρ. On peut donc appliquer à ρ le théorème 3.2.2. Dans la preuve de ce théorème on démontre en fait plus : si $H(\rho)$ est non-distordue, alors deux points $x, y \in H(\rho)$ arbitraires peuvent être joints dans $H(\rho)$ par une ligne polygonale composée d'au plus q_0 segments géodésiques, de longueur au plus $C_0\,\mathrm{dist}(x, y)$. Les constantes C_0 et q_0 dépendent du complexe de Coxeter sphérique de $\mathbf{K}$ (qui est le même que celui de X), et C_0 dépend aussi de la pente de ρ (qui est la même que la pente de r). Ceci implique que dans X deux points $x, y \in H(r)$ qui se trouvent à une distance suffisamment grande peuvent être joints dans $H(r)$ par un chemin composé d'au plus q_0 segments géodésiques dont la somme des longueurs est au plus $C_0 \mathrm{dist}(x, y)$, auxquels s'ajoutent au plus $q_0 + 1$ chemins de longueur $o(\,\mathrm{dist}(x, y)\,)$. Appelons un tel chemin entre x et y *chemin minimisant presque polygonal.* L'existence de tels chemins permet de conclure, et même d'apporter des précisions sur des constantes de non-distorsion, dans le théorème 3.2.3. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, $C_0 + \epsilon$ est une constante de non-distorsion de $H(r)$ pour des distances suffisamment grandes. Cette constante ne dépend que du complexe de Coxeter sphérique de X et de la pente du rayon r. On peut en déduire une estimation uniforme dans certains cas.

Corollaire 3.2.4. *([6, Corollary 3.C.7]) Soit X un produit d'immeubles euclidiens et d'espaces symétriques de type non-compact, chaque facteur étant de rang au moins* 2. *Il existe une constante $\mathbf{C}_0$, qui ne dépend que du complexe de Coxeter sphérique de X, telle que pour tout rayon géodésique r dans X, $\mathbf{C}_0$ est une constante de non-distorsion de $H(r)$ pour des distances suffisamment grandes.*

3.2.2 Ordre de remplissage dans les horosphères

Il s'agit d'étudier l'ordre de remplissage dans des horosphères et dans des réseaux de $\mathbb{Q}$-rang un, dans la lignée du théorème 1.4.4.

Références : Pour cette section, sauf mention contraire, les références sont [2] et [6].

Les horoboules dans un espace symétrique de type non-compact X étant convexes, la projection du complémentaire d'une horoboule ouverte $X \setminus Hbo(r)$ sur l'horosphère du bord $H(r)$ diminue les distances. Ainsi, toute estimation de l'ordre de remplissage dans $X_0 = X \setminus Hbo(r)$ reste valable pour $H(r)$.

L'étude du remplissage dans un réseau de $\mathbb{Q}$-rang un se ramène lui aussi à celui du complémentaire d'une famille dénombrable d'horoboules ouvertes.

Théorème 3.2.5. *([Ra], [Pr], [Le, section 5]) Soit Γ un réseau non-uniforme irréductible dans un groupe semisimple G de centre trivial sans facteurs compacts. Il existe un ensemble fini de rayons géodésiques $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k\}$ dans l'espace symétrique $X = K \backslash G$ tel que l'espace $X_0 = X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{\gamma \in \Gamma} Hbo(\rho_i \gamma)$, invariant par rapport à Γ, a un quotient X_0/Γ compact.*

Si de plus Γ est de $\mathbb{Q}$-rang 1 alors deux horoboules $Hbo(\rho_i \gamma)$ et $Hbo(\rho_j \gamma')$ sont ou bien disjointes ou bien confondues.

Appelons un tel espace X_0 *espace noyau associé à* Γ.

On peut décrire les cônes asymptotiques d'un espace de la forme

$$X_0 = X \setminus \bigsqcup_{\rho \in \mathcal{R}} Hbo(\rho)\,, \quad \text{où } \mathcal{R} \text{ est une famille de rayons géodésiques.} \tag{3.1}$$

Remarquons tout d'abord que si le cardinal de $\mathcal{R}$ est au moins trois, alors tous les rayons géodésiques ρ dans $\mathcal{R}$ ont la même pente.

Proposition 3.2.6. *Soit X un espace métrique géodésique CAT(0), soit X_0 un sous-espace de X comme dans (3.1), et soit $\mathbf{K} = \mathrm{Con}^{\omega}(X; e, d)$ un cône asymptotique de X. Si $\lim_{\omega} \frac{\mathrm{dist}(e_n, X_0)}{d_n} < \infty$ alors on a*

$$\lim{}^{\omega}(X_0) = \mathbf{K} \setminus \bigsqcup_{\rho_\omega \in \mathcal{R}_\omega} Hbo(\rho_\omega)\,,$$

où $\mathcal{R}_\omega$ est la famille de rayons géodésiques $\rho_\omega = \lim^{\omega}(\rho_n)$, $\rho_n \in \mathcal{R}$.

On démontre le résultat intermédiaire suivant.

Théorème 3.2.7. *Soit* $\mathbf{K}$ *un immeuble euclidien* 4*-épais, de rang au moins* 3*, et soit* $\mathbf{K}_0$ *un sous-espace de la forme :*

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{K} \setminus \bigsqcup_{\rho \in \mathcal{R}_\omega} Hbo(\rho)\,. \tag{3.2}$$

Supposons que $\mathbf{K}_0$ *a les propriétés suivantes :*

($\mathcal{P}_1$*) par chaque point de* $\mathbf{K}_0$ *passe un appartement entièrement contenu dans* $\mathbf{K}_0$ *;*

($\mathcal{P}_2$*) tous les rayons* $\rho \in \mathcal{R}_\omega$ *ont la même pente, qui n'est pas parallèle à un facteur de rang* 1 *ou* 2 *de* $\mathbf{K}$*.*

Alors

(1) l'ordre de remplissage dans $\mathbf{K}_0$ *est au plus cubique, c'est-à-dire*

$$A_1(\ell) \leq C \cdot \ell^3\,,\ \forall \ell > 0\ ,$$

où C *dépend de la pente commune des rayons* $\rho \in \mathcal{R}_\omega$ *et du complexe de Coxeter sphérique de* $\mathbf{K}$ *;*

(2) si l'ensemble de rayons $\mathcal{R}_\omega$ *est fini, alors pour tout lacet* $\mathfrak{C}$ *dans* $\mathbf{K}_0$ *composé d'au plus* m *segments et de longueur* ℓ*, l'aire de remplissage vérifie*

$$Ar_1(\mathfrak{C}) \leq C \cdot \ell^2\,,$$

où C *dépend de* m*, de la pente commune des rayons* $\rho \in \mathcal{R}_\omega$ *et du complexe de Coxeter sphérique de* $\mathbf{K}$*.*

De ce théorème on peut déduire le résultat qui suit.

Théorème 3.2.8. *Soit* X *un produit d'espaces symétriques de type non-compact et d'immeubles euclidiens,* X *de rang au moins* 3*, et soit* X_0 *un sous-ensemble qui peut être écrit comme*

$$X_0 = X \setminus \bigsqcup_{\rho \in \mathcal{R}} Hbo(\rho)\ .$$

Supposons que X_0 *a les propriétés suivantes.*

(P_1*) pour tout point* x *de* X_0 *il existe un plat maximal* $F \subset \mathcal{N}_d(X_0)$ *tel que* $x \in \mathcal{N}_d(F)$*, où* d *est une constante absolue ;*

(P_2*) tous les rayons* ρ *dans* $\mathcal{R}$ *ont la même pente, et cette pente n'est pas parallèle à un facteur de* X *de rang* 1 *ou* 2*.*

Alors

(1) on a pour l'ordre de remplissage dans X_0 *l'estimation suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \ell_\varepsilon \text{ tel que } A_1(\ell) \leq \ell^{2+\varepsilon}\,,\ \forall \ell \geq \ell_\varepsilon\ ;$$

(2) si l'ensemble des rayons $\mathcal{R}$ *est fini alors on a*

$$A_1(\ell) \leq C\ell^2\,,\ \forall \ell,$$

où la constante C *dépend de* X *et du cardinal de* $\mathcal{R}$*.*

Du théorème 3.2.7, (2), on peut déduire le théorème 3.2.8, (2), en deux étapes. Tout d'abord on déduit du théorème 3.2.7, (2), qu'un lacet composé d'au plus N chemins minimisants presque polygonaux admet une aire de remplissage quadratique. Après, on utilise un argument de remplissage inductif [6, §4.4].

Le théorème 3.2.7, (1), implique le théorème 3.2.8, (1), par l'argument suivant. Il suffit de démontrer que pour tout cône asymptotique $\mathbf{K}_0$ le remplissage est quadratique, puis d'appliquer le théorème 1.4.4, (3). On fait ceci en utilisant la forme particulière d'un disque de remplissage d'aire $O(\ell^3)$ pour un lacet de longueur ℓ, telle qu'elle est obtenue dans la preuve du théorème 3.2.7, (1). A savoir qu'un tel disque est composé d'un nombre $O(\ell^3)$ de briques qui entourent des triangles euclidiens entièrement contenus dans $\mathbf{K}_0$ et par un nombre $O(\ell^2)$ de briques sur lesquelles on ne peut apporter aucune précision. En diminuant la constante λ qui définit l'aire de remplissage (voir Section 1.1.3), cette aire tend à devenir de plus en plus quadratique. Ceci, et le fait que pour tout facteur α il existe une similarité de facteur α agissant dans la famille des cônes asymptotiques de X_0 [6, Remarque 2.1.1], donne l'estimation quadratique finale dans tous les cônes.

Corollaire 3.2.9. *Soit X un espace symétrique de type non-compact, de rang au moins 3 et soit ρ un rayon géodésique dont la pente n'est pas parallèle à un facteur de rang 1 ou 2 de X. Soit S un groupe de Lie agissant par isométries, transitivement et avec des stabilisateurs compacts sur $H(\rho)$. Dans S muni d'une métrique invariante à gauche l'ordre de remplissage est quadratique. La même conclusion reste vraie pour tout groupe discret Γ agissant proprement discontinûment et avec quotient compact sur $H(\rho)$, Γ muni d'une métrique des mots.*

Le résultat précédent a été obtenu indépendamment par E. Leuzinger et Chr. Pittet [LP] dans le cas $X = SL_n(\mathbb{R})/SO(n)\,,\ n \geq 4$.

Corollaire 3.2.10. *Soit Γ un réseau irréductible de $\mathbb{Q}-$rang 1 dans un groupe semisimple de $\mathbb{R}$-rang au moins 3, Γ muni d'une métrique des mots. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe ℓ_ε tel que*

$$A(\ell) \leq \ell^{2+\varepsilon},\ \forall \ell \geq \ell_\varepsilon\ .$$

3.3 Réseaux et espaces localement symétriques

3.3.1 Rigidité quasi-isométrique des réseaux

Question générale 3.3.1. Étant donné un réseau non-uniforme Γ d'isométries d'un espace symétrique (de type non-compact) X, si un groupe de type fini Λ est quasi-isométrique à Γ, que peut-on dire sur Λ ?

Le premier théorème obtenu dans ce sens est le suivant :

Théorème 3.3.2. *([Sch$_1$])*

(1) Soit Λ un groupe de type fini et soit Γ un réseau non-uniforme d'isométries d'un espace symétrique de rang 1, $X \neq \mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$. Si Λ est quasi-isométrique à Γ alors il existe une suite exacte

$$1 \to F \to \Lambda \to \Gamma_1 \to 1\,, \tag{3.3}$$

où F est fini et Γ_1 est un réseau non-uniforme d'isométries de X.

(2) Soient Γ_i réseaux non-uniformes d'isométries des espace symétriques X_i de rang 1, $i = 1,2$. Supposons que Γ_1 soit quasi-isométrique à Γ_2. Alors $X_1 = X_2 = X$. De plus, si $X \neq \mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ alors il existe une isométrie g de X telle que $g\Gamma_1 g^{-1} \cap \Gamma_2$ soit d'indice fini dans $g\Gamma_1 g^{-1}$ et dans Γ_2.

Si Γ est un réseau non-uniforme d'isométries d'un espace symétrique X, on peut lui associer un espace noyau X_0, d'après le théorème 3.2.5. Une quasi-isométrie $\mathbf{q} : \Gamma \to \Gamma$ induit une quasi-isométrie $\mathbf{q} : X_0 \to X_0$, où X_0 est considéré avec sa métrique de longueur. D'après [LMR], on peut remplacer cette métrique avec la métrique induite par celle de X.

Il n'est pas difficile de voir que si un groupe Λ est quasi-isométrique à Γ, alors Λ agit par quasi-isométries sur Γ, donc sur X_0. Le théorème 3.3.2 est une conséquence du résultat de rigidité suivant.

Théorème 3.3.3 (rigidité [Sch$_1$]). *Soit X un espace symétrique de rang 1, $X \neq \mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$, soit Γ un réseau non-uniforme d'isométries de X et soit X_0 un espace noyau associé à Γ.*

Si $\mathbf{q} : X_0 \to X_0$ est une (L,C)-quasi-isométrie, pour X_0 muni de la métrique induite, alors il existe une constante positive $D = D(L, C, X_0)$ et une isométrie g dans le commensurateur de Γ telles que

$$\mathrm{dist}\,(\,\mathbf{q}\,,\, g|_{X_0}\,) \leq D\,.$$

Ci-dessus $g|_{X_0}$ signifie la restriction de g à X_0. Rappelons que le commensurateur $Comm(\Gamma)$ de Γ est composé par les éléments g de G tels que $g\Gamma g^{-1} \cap \Gamma$ soit un sous-groupe d'indice fini dans $g\Gamma g^{-1}$ et dans Γ.

Corollaire 3.3.4. *Le groupe des quasi-isométries $QI(\Gamma)$ coïncide avec $Comm(\Gamma)$.*

Des résultats similaires ont été obtenus pour une classe de groupes de $\mathbb{Q}$-rang un incluant les groupes modulaires de Hilbert dans [FS] et [Sch$_2$]. Dans [Sch$_2$] il est conjecturé que les théorèmes 3.3.2 et 3.3.3 sont vérifiés pour X espace symétrique de rang au moins 2, sans facteurs de rang 1. Ces deux théorèmes ont été démontrés par A. Eskin dans [E]. Dans [3] une preuve alternative pour les deux théorèmes de A. Eskin est donnée, à l'aide des cônes asymptotiques et des arguments dans [KlL]. On donne une courte présentation de la preuve de [3] dans la suite. Le théorème 3.3.2 est impliqué par le théorème 3.3.3 via des arguments dus à R. Schwartz combinés avec un théorème de N. Shah [Sh]. On présente la preuve du théorème 3.3.3.

Esquisse de preuve du théorème 3.3.3 :

Pour trouver l'isométrie g à partir de $\mathbf{q}$, on utilise le théorème de Tits :

Théorème 3.3.5. *([Ti]) Soit X un espace symétrique de type non-compact, sans facteurs de rang 1. Soit $\Phi : \partial_\infty X \to \partial_\infty X$ isomorphisme simplicial entre immeubles sphériques, qui de plus est un homéomorphisme par rapport à la topologie conique. Alors il existe une unique isométrie g de X telle que $\partial g = \Phi$.*

Pour simplifier, on suppose dans la suite que X est irréductible. Cette hypothèse servira surtout à simplifier l'argument à la fin de II.

I. Il existe des chambres de Weyl qui s'éloignent très vite de X_0, par exemple les chambres de Weyl contenant des rayons $\rho_i\gamma$ qui déterminent l'espace noyau X_0. A partir de $\mathbf{q}$ on ne peut donc pas trouver tout de suite Φ. On peut par contre trouver une application uniformément continue $\partial\tilde{\mathbf{q}}$ définie sur un ensemble dense de chambres de $\partial_\infty X$.

On dit qu'un plat maximal F dans X est *R-logarithmique par rapport à un point* $x \in X$ si $x \in \mathcal{N}_{\ln R}(F)$ et si pour tout $\lambda \geq R$ la sphère $S(x, \lambda) \cap F$ est contenue dans $\mathcal{N}_{C_0 \ln \lambda}(X_0)$, où C_0 est une constante universelle.

Une chambre de Weyl W de sommet x' est *R-logarithmique d'incidence par rapport à un point* x si $\mathrm{dist}(x, x') \leq \ln R$ et s'ils existent deux plats maximaux F, F' qui sont R-logarithmiques par rapport à x et tels que $W(\infty) = F(\infty) \cap F'(\infty)$.

Un plat maximal F dans X est *R-logarithmiquement ramifié par rapport à x* s'il est R-logarithmique par rapport à x et si toutes les chambres de Weyl de F de sommet la projection de x sur F sont R-logarithmiques d'incidence par rapport à x.

On fixe F_0 plat maximal dans X passant par le point fixé $x_0 \in X_0$. On a le lemme essentiel suivant :

Lemme 3.3.6. *La mesure de l'ensemble*

$$Log(R) = \{\, \bar{g} \in G/\Gamma \; ; \; F_0 g \text{ est } R - \text{logarithmiquement ramifié par rapport à } x_0 g \,\}$$

est au moins $1 - \frac{\kappa}{\ln R}$, où κ est une constante universelle.

En particulier, pour presque tout $\bar{g} \in G/\Gamma$, le plat $F_0 g$ est logarithmiquement ramifié par rapport à $x_0 g$. Dans [KM$_1$] il est démontré que pour presque tout $\bar{g} \in G/\Gamma$, le plat $F = F_0 g$ passant par $x = x_0 g$ vérifie

$$\limsup_{\rho \to \infty} \frac{\sup \{ d\,(y, x_0\Gamma) \mid y \in F \cap S(x, \rho) \}}{\ln \rho} = c\,,$$

où c est une constante ne dépendant que de G et de Γ.

Puisque Γ agit avec quotient compact sur X_0, la remarque 1.2.10, (1), implique qu'il suffit de considérer les cônes asymptotiques $\mathrm{Con}^\omega(X_0; e^0, d_n)$ avec $e_n^0 = x_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ces cônes, l'ensemble limite F_ω d'un plat logarithmique F par rapport à un point x est entièrement contenu dans l'ensemble limite de X_0. La quasi-isométrie $\mathbf{q}$ induit un homéomorphisme bilipschitzien $\mathbf{q}_\omega : \lim^\omega(X_0) \to \lim^\omega(X_0)$. Il s'ensuit que $\mathbf{q}_\omega(F_\omega)$ est un plat bilipschitz dans $\lim^\omega(X_0)$. Soit $\pi_0 : X \to X_0$ une projection. On a que $\mathbf{q}_\omega(F_\omega) = \lim^\omega(\mathbf{q}(\pi_0(F)))$.

Lemme 3.3.7. *([KlL]) Un plat bilipschitzien dans un immeuble euclidien coïncide localement avec un éventail de chambres de Weyl.*

Rappelons qu'un *éventail de chambres de Weyl* est une réunion de chambres de Weyl ayant le même sommet, collées le long des faces et d'intérieurs deux à deux disjoints, composant un cône sur une sphère bilipschitzienne. Le lemme 3.3.7 s'applique à $\mathbf{q}_\omega(F_\omega)$. De là on déduit que $\mathbf{q}(\pi_0(F))$ "vu de $\mathbf{q}(x)$" s'approche de plus en plus d'un éventail de chambres de Weyl dans X lorsque la distance à $\mathbf{q}(x)$ tend vers l'infini. Dans [3, Définition 3.3.3] ce phénomène est formalisé et on dit de deux sous-ensembles infinies qui "vues d'un point y" s'approchent l'une de l'autre quand la distance à y croît qu'elles ont *le même horizon par rapport au point y*. De façon similaire on montre, pour une chambre de Weyl W logarithmique d'incidence par rapport à x, que $\mathbf{q}(\pi_0(W))$ a le même horizon par rapport à $\mathbf{q}(x)$ qu'une réunion de chambres de Weyl. Une conséquence pour le plat F et la chambre W est que dans tout cône asymptotique, $\mathbf{q}_\omega(F_\omega)$ coïncide avec un éventail de chambres de Weyl, et $\mathbf{q}_\omega(W_\omega)$ avec une réunion de chambres de Weyl.

II. Pour un plat maximal F on note $\mathcal{S}_F(m)$ l'ensemble des points x dans F tels que $\mathrm{dist}(x\Gamma\,,\, x_0\Gamma)$ est au plus m et tels que F est m-logarithmiquement ramifié par rapport à x.

L'ergodicité de l'action sur G/Γ d'un tore déployé sur $\mathbb{R}$ connexe maximal et le lemme 3.3.6 impliquent qu'il existe une suite de nombres positifs (ε_m) qui tend vers 0 quand m tend vers l'infini, telle que pour presque tout $\bar{g}$ dans G/Γ, le plat $F = F_0 g$ passant par $x = x_0 g$ satisfait la liste de propriétés suivante :

(1) pour tout $m \in \mathbb{N}$, la mesure de $\mathcal{S}_F(m) \cap B(x, \lambda)$ est au moins $(1 - \varepsilon_m)$ de la mesure de $F \cap B(x, \lambda)$ pour λ suffisamment grand ;

(2) la même propriété est satisfaite par tous les plats singuliers dans F contenant x ;

(3) F est logarithmiquement ramifié par rapport à x.

On appelle un plat maximal F vérifiant cette liste de propriétés un *bon plat* (excusez le jeu de mots) *logarithmiquement ramifié* par rapport à x. Appelons les chambres de Weyl de F de sommet x des *bonnes chambres de Weyl logarithmiques d'incidence* par rapport à x.

Fixons dans la suite un bon plat F. Dans tout cône asymptotique, F_ω vérifie la propriété que pour presque tout point $x \in F_\omega$, toute chambre de Weyl de sommet x contenue dans F_ω apparaît comme intersection avec un autre plat maximal entièrement contenu dans $\lim^\omega(X_0)$. On sait d'autre part que $\mathbf{q}_\omega(F_\omega)$ est un éventail de chambres de Weyl. L'image réciproque par $\mathbf{q}_\omega$ de la réunion des intérieurs des chambres de l'éventail est un ouvert, qui se décompose en un nombre fini de composantes connexes. Soit $\mathfrak{O}$ une de ces composantes connexes. L'application bilipschitz $\mathbf{q}_\omega$ restreinte à $\mathfrak{O}$ est différentiable en presque tout point x dans $\mathfrak{O}$. Fixons un tel point générique x. Le lemme 3.3.7 implique que pour toute chambre de Weyl W de sommet x, $\mathbf{q}_\omega(W)$ coïncide près de $\mathbf{q}_\omega(x)$ avec l'intersection d'un plat maximal avec un plat bilipschitz. Ceci implique que pour chaque W, $\mathbf{q}_\omega(W)$ coïncide près de $\mathbf{q}_\omega(x)$ avec une chambre de Weyl. Donc localement autour de x, $\mathbf{q}$ envoie plat singulier par x dans plat singulier par $\mathbf{q}_\omega(x)$. En suivant l'argument de [KlL], on déduit que la différentielle de $\mathbf{q}_\omega$ en presque tout x est une homothétie composée avec une isométrie du groupe de Weyl fini, donc une similarité. Par conséquent $\mathbf{q}_\omega$ restreint à $\mathfrak{O}$ est C^∞. Par continuité, on étend alors l'affirmation précédente à tous les points $x \in \mathfrak{O}$. La connexité de $\mathfrak{O}$ implique que l'isométrie du groupe de Weyl fini qui entre dans l'expression de la différentielle en chaque point est partout la même. L'argument dans [KlL, §6.4.4] implique que $\mathbf{q}_\omega|_{\mathfrak{O}}$ est une homothétie composée avec une isométrie du groupe de Weyl fini. Donc $\mathfrak{O}$ est aussi un intérieur de chambre de Weyl. On obtient ainsi que l'éventail de chambres de Weyl $\mathbf{q}_\omega(F_\omega)$ est en fait un plat maximal. On en déduit que :

Théorème 3.3.8. *Pour tout bon plat F logarithmiquement ramifié par rapport à x, $\mathbf{q}(\pi_0(F))$ a le même horizon qu'un plat maximal F', par rapport à $\mathbf{q}(x)$. Pour toute bonne chambre de Weyl logarithmique d'incidence W dans F de sommet x, $\mathbf{q}(\pi_0(W))$ a le même horizon qu'une chambre de Weyl de F', par rapport à $\mathbf{q}(x)$.*

De plus $\mathbf{q} \circ \pi_0(\mathcal{S}_F(m))$ est contenue dans $\mathcal{N}_{C_m}(F')$.

Pour la preuve de la dernière affirmation du théorème 3.3.8 voir [3, Remarque 4.2.8].

On définit ainsi une application injective $\tilde{\mathbf{q}}$ sur l'ensemble $\mathbf{L}$ des bonnes chambres de Weyl logarithmiques d'incidence, qui associe à une telle chambre W de sommet x la chambre de Weyl qui a le même horizon que $\mathbf{q}(\pi_0(W))$ et de sommet $\mathbf{q}(\pi_0(x))$. Cette application induit une application injective $\partial\tilde{\mathbf{q}}$ sur le sous-ensemble $\mathcal{L}$ de chambres de $\partial_\infty X$ qui sont des bords à l'infini de chambres dans $\mathbf{L}$.

III. On dit d'un sous-ensemble $\mathcal{E}$ dans un espace mesurable qu'il est *de mesure pleine* si son complémentaire est de mesure nulle. On a le lemme simple suivant :

Lemme 3.3.9. *Soit G un groupe de Lie, H un sous-groupe fermé et $\mathcal{E}$ un sous-ensemble de G de mesure pleine. Pour presque tout $g \in G$, on a que $g \in \mathcal{E}$ et que $Hg \cap \mathcal{E}$ est de mesure pleine.*

Soit M un mur de sommet x dans X. On note $St(M)$ l'ensemble des chambres de Weyl de sommet x contenant M. Une conséquence du lemme 3.3.9 est que pour tout $i \in \{0, \ldots, \mathbf{r} - 1\}$, presque tout mur M de dimension i a la propriété que $St(M) \cap \mathbf{L}$ est de mesure pleine. Rappelons que $\mathbf{r}$ signifie le rang de X.

Une autre conséquence du lemme 3.3.9 est que pour presque tout $g \in G$ le plat $F = F_0 g$ est un bon plat logarithmiquement ramifié par rapport à $x = x_0 g$ et de plus F vérifie la propriété suivante. Si H est un plat singulier dans F passant par x, presque tout plat maximal contenant H est également un bon plat logarithmiquement ramifié par rapport à x. Un tel plat maximal F est appelé *plat papillon par rapport à x*.

Proposition 3.3.10. *([3, Proposition 5.2.1]) Soit M un mur non-réduit à un point, tel que $St(M) \cap \mathbf{L}$ est de mesure pleine. Alors $\tilde{\mathbf{q}}$ est uniformément continu sur $St(M) \cap \mathbf{L}$.*

Soit Σ un immeuble sphérique de rang $\mathbf{r} \geq 2$. Étant donné un mur $\mathcal{M}$ dans Σ, on note $St(\mathcal{M})$ l'ensemble des chambres de Σ contenant $\mathcal{M}$. Soit $\mathcal{B}$ une chambre ou un appartement dans Σ. Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, \mathbf{r} - 1\}$ on note

$$E_i(\mathcal{B}) = \{\mathcal{W}' \text{ chambre dans } \Sigma \,;\, \mathcal{W}' \cap \mathcal{B} \text{ mur de codimension } \leq i\}.$$

La proposition 3.3.10 implique le résultat suivant :

Proposition 3.3.11. *Soit $\mathcal{A}$ un appartement dans $\partial_\infty X$ qui est bord à l'infini d'un plat papillon F. L'application $\partial\tilde{\mathbf{q}}$ induit un isomorphisme simplicial $\phi : E_{\mathbf{r}-1}(\mathcal{A}) \to E_{\mathbf{r}-1}(\mathcal{A}')$, où $\mathcal{A}'$ est l'horizon de $\mathbf{q}(\pi_0(F))$. De plus, pour tout mur $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{A}$, ϕ est uniformément continu sur $St(\mathcal{M})$.*

On dispose des deux résultats ci-dessous.

Théorème 3.3.12. *([Ti, Théorèmes 4.1.1, 4.1.2]) Soient Σ et Σ' deux immeubles sphériques de rang $\mathbf{r} \geq 3$. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux appartements dans Σ et Σ', respectivement. Un isomorphisme simplicial $\phi : E_2(\mathcal{A}) \to E_2(\mathcal{A}')$ s'étend de façon unique à un isomorphisme simplicial $\phi : \Sigma \to \Sigma'$.*

Lemme 3.3.13. *([3, Lemme 5.3.3]) Soit $\Phi : \partial_\infty X \to \partial_\infty X$ un isomorphisme simplicial tel que pour un appartement fixé $\mathcal{A}$ dans $\partial_\infty X$, Φ est continu sur $St(\mathcal{M})$, pour tout mur $\mathcal{M}$ de codimension 1 dans $\mathcal{A}$. Alors Φ est un homéomorphisme dans la topologie conique.*

A partir du bord de chaque plat papillon, $\partial\tilde{\mathbf{q}}$ peut être étendu à un isomorphisme simplicial $\Phi : \partial_\infty X \to \partial_\infty X$, qui est un homéomorphisme dans la topologie conique, si $\mathbf{r} \geq 3$. On veut qu'en plus Φ coïncide avec $\partial\tilde{\mathbf{q}}$ sur un ensemble dense de chambres. Pour ce faire, on prend un plat papillon avec des conditions supplémentaires. On appelle *plat pistil* par rapport à un point x un plat papillon F par rapport à x tel que, pour tout ensemble convexe $\mathcal{D}$ dans $F(\infty)$, presque tout plat maximal contenant $\mathcal{D}$ dans son bord est un plat papillon. Le lemme 3.3.9 implique que presque tout plat est un plat pistil. Fixons F plat pistil par rapport à x. Rappelons que toute chambre $\mathcal{W}$ de $\partial_\infty X$ a une chambre opposée dans $F(\infty)$. On a :

Lemme 3.3.14. *Presque toute chambre $\mathcal{W}$ de $\partial_\infty X$ forme avec toute chambre opposée dans $F(\infty)$ un appartement qui est le bord d'un plat papillon.*

Le théorème 3.3.12 et les lemmes 3.3.13 et 3.3.14 impliquent que si $\mathbf{r} \geq 3$, à partir de l'extension de $\partial\tilde{\mathbf{q}}$ à $E_2(\mathcal{A})$, où $\mathcal{A} = F(\infty)$, on peut construire un isomorphisme simplicial $\Phi : \partial_\infty X \to \partial_\infty X$ qui est un homéomorphisme dans la topologie conique, et qui coïncide avec $\partial\tilde{\mathbf{q}}$ sur un ensemble dense de chambres $\mathcal{L}'$. Si $\mathbf{r} = 2$ on peut construire un isomorphisme Φ avec toutes ces propriétés directement (voir [3, §5.2.B]).

IV. Soit $g_0 \in G$ tel que $\partial g_0 = \Phi$. On montre que $\mathrm{dist}(\mathbf{q}(z), zg_0) \leq D$ pour tout $z \in x_0\Gamma$, où $D = D(L, C)$.

Si R est grand, la mesure de l'ensemble des $\bar{g} \in G/\Gamma$ tels que $F_0 g$ est un bon plat R-logarithmiquement ramifié par rapport à $x_0 g$ est grande. Même plus, si R est suffisamment grand, on a une grande mesure aussi pour le sous-ensemble des $\bar{g} \in G/\Gamma$ tels que $F = F_0 g$ et $x = x_0 g$ satisfont les conditions qui suivent.

(RB) F est un bon plat R-logarithmiquement ramifié par rapport à x et, pour tout hyperplan singulier H dans F passant par x, il existe un plat maximal F_H qui intersecte F selon H, forme avec F un angle de $\pi/2$, et qui est lui-même un bon plat R-logarithmiquement ramifié par rapport à x.

Quitte à changer le point x_0 avec un autre point dans X_0, on peut supposer que $g = 1$ vérifie aussi les conditions (RB). Il s'ensuit que tout $\gamma \in \Gamma$ vérifie les mêmes conditions.

Soit $z \in x_0\Gamma$. Pour presque tout plat maximal par z, son bord à l'infini est composé de chambres dans $\mathcal{L}'$. On peut conclure qu'il existe un plat maximal F par z tel que F et z satisfont les conditions (RB), et de plus F, et chacun des plats F_H, ont leurs bords à l'infini composés de chambres dans $\mathcal{L}'$. Écrivons la famille finie de plats

$$\{F_H \ ; \ H \text{ hyperplan singulier passant par } x \text{ contenu dans } F\}$$

comme $\{F_1, \ldots, F_m\}$, et remplaçons dans la notation F par F_0. Pour chaque $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ le plat maximal $F_i g_0$ et $\mathbf{q}(\pi_0(F_i))$ ont le même horizon. La dernière affirmation dans le théorème 3.3.8 implique que $\mathbf{q}(z) \in \mathcal{N}_C(F_i g_0)$. On obtient alors que $\mathbf{q}(z) \in \bigcap_{i=0}^m \mathcal{N}_C(F_i g_0) \subset \mathcal{N}_D(z g_0)$.

Pour déduire que $g \in Comm(\Gamma)$ on utilise des résultats de N. Shah [Sh].

3.3.2 Approximation diophantienne sur des quadriques rationnelles

Dans toute la section, ψ désigne une fonction décroissante $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ vérifiant $\lim_{x\to\infty} \psi(x) = 0$, qu'on appelle *fonction d'approximation*. Soit $\|\cdot\|$ la norme sup sur $\mathbb{R}^n$. On peut définir l'ensemble des *vecteurs simultanément ψ-approximables* dans $\mathbb{R}^n$ par :

$$\mathcal{S}_\psi(\mathbb{R}^n) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|q\bar{x} - \bar{p}\| \le \psi(q) \text{ pour une infinité de } q \in \mathbb{N}\,, \, \bar{p} \in \mathbb{Z}^n\}\ .$$

Dans le cas particulier ou $\psi(x) = x^{-\alpha}$, avec $\alpha > \frac{1}{n}$, l'indice ψ est remplacé par l'indice α et l'ensemble est appelé ensemble des vecteurs *simultanément α-très bien approximables*. On peut aussi définir $\mathcal{ES}_\alpha(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}_\alpha(\mathbb{R}^n) \setminus \bigcup_{\alpha'>\alpha} \mathcal{S}_{\alpha'}(\mathbb{R}^n)$.

L'ensemble des *vecteurs linéairement ψ-approximables* est défini de façon similaire par :

$$\mathcal{L}_\psi(\mathbb{R}^n) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \ ; \ |\bar{q}\cdot\bar{x} - p| \le \psi(\|\bar{q}\|) \text{ pour une infinité de } \bar{q} \in \mathbb{Z}^n\,,\, p \in \mathbb{N}\}\ ,$$

où $\bar{q}\cdot\bar{x} = \sum_{i=1}^n q_i x_i$. Quand $\psi(x) = x^{-\beta}$, avec $\beta > n$, on remplace l'indice ψ par β et on appelle l'ensemble obtenu ensemble des vecteurs *linéairement β-très bien approximables*.

On a $\bigcup_{\alpha>1/n} \mathcal{S}_\alpha(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{\beta>n} \mathcal{L}_\beta(\mathbb{R}^n)$, d'après le principe de transfert de Khintchine, et cet ensemble est appelé *ensemble des vecteurs très bien approximables*. Le théorème de Khintchine-Groshev implique que cet ensemble est de mesure de Lebesgue nulle [BD].

Pour tout s positif on note $\mathcal{H}^s$ la mesure de Hausdorff correspondante.

Dans [Ja] il est démontré que pour tout $s \in [0, n)$ on a que :

$$\mathcal{H}^s(\mathcal{S}_\psi(\mathbb{R}^n)) = \begin{cases} 0\,, & \text{si } \sum_{k=1}^\infty k^{n-s}\psi(k)^s < \infty\,, \\ \infty\,, & \text{si } \sum_{k=1}^\infty k^{n-s}\psi(k)^s = \infty\,. \end{cases} \tag{3.4}$$

En particulier, pour tout $\alpha > \frac{1}{n}$,

$$d = \dim_H \mathcal{S}_\alpha(\mathbb{R}^n) = \frac{n+1}{\alpha+1} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^d(\mathcal{S}_\alpha(\mathbb{R}^n)) = \infty\,. \tag{3.5}$$

On peut remplacer ci-dessus $\mathcal{S}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ par $\mathcal{ES}_\alpha(\mathbb{R}^n)$.

Concernant l'approximation linéaire, en [DV] il est montré que pour $s \in (n-1, n)$, on a :

$$\mathcal{H}^s(\mathcal{L}_\psi(\mathbb{R}^n)) = \begin{cases} 0\,, & \text{si } \sum_{k=1}^{\infty} k^{2n-1-s}\psi(k)^{s-(n-1)} < \infty\,, \\ \infty\,, & \text{si } \sum_{k=1}^{\infty} k^{2n-1-s}\psi(k)^{s-(n-1)} = \infty\,. \end{cases} \tag{3.6}$$

En particulier pour tout $\beta > n$ on a les formules suivantes (voir aussi [BoD]).

$$d = \dim_H \mathcal{L}_\beta(\mathbb{R}^n) = n - 1 + \frac{n+1}{\beta+1} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^d(\mathcal{L}_\beta(\mathbb{R}^n)) = \infty\,. \tag{3.7}$$

Supposons dans la suite que M est une sous-variété de dimension m dans $\mathbb{R}^n$. On s'intéresse à la façon dans laquelle les ensembles $\mathcal{S}_\psi(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{L}_\psi(\mathbb{R}^n)$ intersectent M. Plus précisément, on veut savoir sous quelles conditions $\mathcal{S}_\psi(M) = \mathcal{S}_\psi(\mathbb{R}^n) \cap M$ et $\mathcal{L}_\psi(M) = \mathcal{L}_\psi(\mathbb{R}^n) \cap M$ satisfont des propriétés similaires à ceux exposés ci-dessus. Un mauvais cas est celui où M est un sous-espace rationnel affine, car dans ce cas $\mathcal{S}_{\frac{1}{m}}(M) = M$, et $M = \mathcal{L}_\beta(M)$ pour tout $\beta > n$. Il est donc naturel d'imposer à M la condition qu'elle soit "suffisamment courbée". On dit que M est *extrémale* si l'ensemble des vecteurs très bien approximables dans M est de mesure 0.

Un point $\bar{x}$ dans une variété M est *non-dégénéré* si dans un voisinage de $\bar{x}$ la variété est paramétrée par une fonction f qui est l fois continûment dérivable, et ses dérivées partielles en $\bar{x}$ jusqu'à l'ordre l engendrent $\mathbb{R}^n$. On dit que M est *non-dégénérée presque partout* si presque tout point $\bar{x} \in M$ est non-dégénéré.

Dans [KM$_2$] il est démontré que si M est non-dégénérée presque partout, alors M est extrémale. Des résultats d'extrémalité avaient déjà été démontrés auparavant sous des conditions de courbure (voir [DRV$_2$] et [DRV$_3$]).

Si M est de classe C^3, $m \geq 2$, et si au moins deux courbures principales sont non-nules, à l'exception d'un ensemble de points de dimension de Hausdorff au plus $m-1$, alors d'après [DRV$_1$] on a :

$$\dim_H \mathcal{L}_\beta(M) = m - 1 + \frac{n+1}{1+\beta}\,, \forall \beta \geq n\,. \tag{3.8}$$

Un résultat similaire est démontré dans [Bak] pour des courbes planes.

Sous l'hypothèse plus faible que M est extrémale, suivant [DD$_2$] on a l'inégalité :

$$\dim_H \mathcal{L}_\beta(M) \geq m - 1 + \frac{n+1}{1+\beta}\,, \forall \beta \geq n. \tag{3.9}$$

Dans [BDV$_2$] il est démontré que si M est non-dégénérée presque partout et $s \in (m-1, m)$,

$$\text{si} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)^{s-(m-1)} k^{n+m-1-s} = \infty \quad \text{alors} \quad \mathcal{H}^s(\mathcal{L}_\psi(M)) = \infty\,.$$

Pour $\psi(x) = x^{-\beta}$ ceci implique l'inégalité (3.9) et de plus, pour $d = m - 1 + \frac{n+1}{1+\beta}$, le fait que $\mathcal{H}^d\left(\mathcal{L}_\beta(M)\right)$ est ∞.

Pour ce qui est des vecteurs simultanément très bien approximables, les résultats suivants sont connus. Pour une fonction d'approximation ψ telle que $\lim_{x\to\infty} x\psi(x) = 0$ et pour $s \in (0,1)$, il est prouvé dans [BDV$_2$] que :

$$\mathcal{H}^s(\mathcal{S}_\psi(\mathbb{S}^1)) = \begin{cases} 0\,, & \text{si } \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\psi(k)}{k}\right)^s < \infty\,, \\ \infty\,, & \text{si } \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\psi(k)}{k}\right)^s = \infty\,. \end{cases}$$

En particulier (voir aussi [DD$_1$]) on a :

$$\dim_H \mathcal{S}_\alpha(\mathbb{S}^1) = \frac{1}{1+\alpha} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^{\frac{1}{1+\alpha}}(\mathcal{S}_\alpha(\mathbb{S}^1)) = \infty\,,\ \forall \alpha > 1. \tag{3.10}$$

Dans [BDV$_1$] sont obtenus des résultats plus généraux sur des courbes planes. Pour une fonction $f \in C^3([a,b])$, on considère sa courbe représentative

$$\mathcal{C}_f = \{(t, f(t))\ ;\ t \in [a,b]\}\,.$$

Soit $s \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

(1) Si $\sum_{k=1}^{\infty} k^{1-s}\psi(k)^{s+1} = \infty$ alors $\mathcal{H}^s(\mathcal{S}_\psi(\mathcal{C}_f)) = \infty$;

(2) Soit $\lambda_\psi = \liminf_{x\to\infty} \frac{-\ln\psi(x)}{\ln x}$. Si la dimension de Hausdorff de l'ensemble

$$\{t \in [a,b]\ ;\ f''(t) = 0\}$$

est au plus $\frac{2-\lambda_\psi}{1+\lambda_\psi}$ alors $d = \dim_H(\mathcal{S}_\psi(\mathcal{C}_f)) = \frac{2-\lambda_\psi}{1+\lambda_\psi}$.
Supposons de plus que $\lambda_\psi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Alors $\limsup_{x\to\infty} x^{2-d}\psi(x)^{d+1} > 0$ implique que $\mathcal{H}^d(\mathcal{S}_\psi(\mathcal{C}_f)) = \infty$.

Pour $\psi(x) = x^{-\alpha}$ et $\alpha \in (1/2, 1)$ ceci implique :

(1) $\dim_H \mathcal{S}_\alpha(\mathcal{C}_f) \geq d = \frac{2-\alpha}{1+\alpha}$ et $\mathcal{H}^d(\mathcal{S}_\alpha(\mathcal{C}_f)) = \infty$;

(2) Si de plus la dimension de Hausdorff de l'ensemble $\{t \in [a,b]\ ;\ f''(t) = 0\}$ est au plus $\frac{2-\alpha}{1+\alpha}$ alors $\dim_H \mathcal{S}_\alpha(\mathcal{C}_f) = d$.

En appliquant ces résultats au cercle on obtient $\dim_H \mathcal{S}_\alpha(\mathbb{S}^1) = \frac{2-\alpha}{1+\alpha}$ pour $\alpha \in [1/2, 1)$. Cette formule est différente de celle donnée dans (3.10) pour $\alpha > 1$. Ainsi, dans ce cas, contrairement aux cas traités dans (3.5), (3.7) et (3.8), la dimension de Hausdorff des ensembles de vecteurs très bien approximables est non pas une fonction rationnelle en α, mais une fonction rationnelle *par morceaux* en α, ayant des expressions différentes pour $\alpha \in [1/2, 1)$ et pour $\alpha > 1$.

Les résultats dans [BDV$_1$] semblent indiquer que pour des valeurs de α proches de $\frac{1}{n}$, il devrait exister une formule générale valable pour toute sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension fixée, non-dégénérée ou vérifiant des conditions de courbure. Cela ne peut pourtant pas être vrai pour tout $\alpha > \frac{1}{n}$. En effet, dans [Ry] il est démontré que pour chaque sous-variété M de classe C^k il existe deux sous-variétés M_z et M_p de classe C^k, arbitrairement C^k-proches de M et telles que pour α suffisamment grand $\mathcal{S}_\alpha(M_z) = \emptyset$ alors que $\dim_H \mathcal{S}_\alpha(M_p) > \frac{m+1}{k(\alpha+1)}$. Il s'ensuit que pour des grandes valeurs de α, des conditions sur la structure différentielle et dépendant continûment de cette structure ne peuvent pas suffire pour préciser la dimension de Hausdorff de $\mathcal{S}_\alpha(M)$.

Dans l'article [9] est traité le cas où M est une quadrique $\mathfrak{Q}_\mathfrak{q}$ définie par l'équation $\mathfrak{q} = 1$, où $\mathfrak{q} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique rationnelle non-dégénérée, qui n'est pas définie négative.

Théorème 3.3.15. *Soit ψ une fonction d'approximation telle que $\lim_{x\to\infty} x\psi(x) = 0$.*

(1) *Si $\mathfrak{Q}_\mathfrak{q} \cap \mathbb{Q}^n = \emptyset$ alors $\mathcal{S}_\psi(\mathfrak{Q}_\mathfrak{q}) = \emptyset$.*

(2) *Si $\mathfrak{Q}_\mathfrak{q} \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$ alors*

$$\dim_H \mathcal{S}_\psi(\mathfrak{Q}_\mathfrak{q}) = \sigma(n-1)\,,$$

où $\sigma = \limsup_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln x - \ln\psi(x)}$.
De plus, si $\limsup_{x\to\infty} x^{1-\sigma}\psi(x)^\sigma > 0$ alors on a $\mathcal{H}^{\sigma(n-1)}(\mathcal{S}_\psi(\mathfrak{Q}_\mathfrak{q})) = \infty$.
En particulier l'ensemble $\mathcal{S}_\alpha(\mathfrak{Q}_\mathfrak{q})$ est de dimension de Hausdorff $d = \frac{n-1}{1+\alpha}$ pour tout $\alpha > 1$, et $\mathcal{H}^d(\mathcal{S}_\alpha(\mathfrak{Q}_\mathfrak{q})) = \infty$. Les deux affirmations restent vraies pour l'ensemble $\mathcal{E}\mathcal{S}_\alpha(\mathfrak{Q}_\mathfrak{q})$.

D'après [BSh, Chapitre 1, §7], une forme quadratique rationnelle non-dégénérée en $n \geq 5$ variables s'annule sur $\mathbb{Z}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ si et seulement si elle n'est pas définie. On applique ce théorème à la forme quadratique $L_{\mathfrak{q}} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $L_{\mathfrak{q}}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_{n+1}^2 - \mathfrak{q}(x_1, \ldots, x_n)$. Il s'ensuit que pour tout $n \geq 4$, $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{q}} \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$ pour toute forme quadratique rationnelle non-dégénérée $\mathfrak{q}$. Pour $n = 2, 3$, voir [BSh, Chapitre 1, §7].

La partie (1) du théorème 3.3.15 s'ensuit facilement du lemme simple suivant :

Lemme 3.3.16. *Soit ψ une fonction d'approximation telle que $\lim_{x\to\infty} x\psi(x) = 0$. Soient $\bar{x} \in \mathfrak{Q}_{\mathfrak{q}}$ et $\frac{1}{q}\bar{p} \in \mathbb{Q}^n$ tels que*

$$\left\| \bar{x} - \frac{1}{q}\bar{p} \right\| \leq \frac{\psi(q)}{q} . \tag{3.11}$$

Pour q suffisamment grand, on a $\frac{1}{q}\bar{p} \in \mathfrak{Q}_{\mathfrak{q}}$.

Pour prouver le théorème 3.3.15, (2), on considère la composante connexe de l'identité $SO_I(L_{\mathfrak{q}})$ du stabilisateur de $L_{\mathfrak{q}}$, qui est un groupe semisimple (simple si $n \neq 3$). On considère également l'espace symétrique $\mathcal{P}_{n+1}(L_{\mathfrak{q}})$ associé à ce groupe, le réseau $\Gamma = SO_I(L_{\mathfrak{q}}) \cap SL(n+1, \mathbb{Z})$, l'espace localement symétrique $\mathcal{V} = \mathcal{P}_{n+1}(L_{\mathfrak{q}})/\Gamma$ et la projection proj : $\mathcal{P}_{n+1}(L_{\mathfrak{q}}) \to \mathcal{V}$. Le bord à l'infini $\partial_\infty \mathcal{P}_{n+1}(L_{\mathfrak{q}})$ s'identifie à l'immeuble sphérique d'incidence des drapeaux d'espaces linéaires totalement isotropes par rapport à $L_{\mathfrak{q}}$. En particulier, $\partial_\infty \mathcal{P}_{n+1}(L_{\mathfrak{q}})$ contient une strate singulière maximale $\wp$ correspondant aux droites (c'est-à-dire aux points projectifs). On dit qu'un rayon géodésique r dans $\mathcal{P}_{n+1}(L_{\mathfrak{q}})$ est *de type* $\wp$ si $r(\infty)$ se trouve dans $\wp$.

La quadrique $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{q}}$ peut être identifiée à un sous-ensemble ouvert Zariski dense de la strate $\wp$. Les points $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{q}} \cap \mathbb{Q}$ correspondent à des rayons géodésiques ayant des sous-rayons qui vont tout droit dans une pointe de l'espace localement symétrique $\mathcal{V}$; autrement dit, ces sous-rayons se projettent isométriquement dans $\mathcal{V}$. L'ensemble des vecteurs très bien approximables dans $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{q}}$ peut aussi être décrit en termes de la géométrie de $\mathcal{V}$ (voir [9]). En utilisant cette description, ainsi que la notion de système doué d'ubiquité et ses propriétés [BDV$_2$], on déduit le théorème 3.3.15, (2).

3.3.3 Rayons géodésiques et excursions dans une pointe

Le théorème 3.3.15 peut aussi être interprété en termes de rayons localement géodésiques qui s'éloignent dans une pointe de $\mathcal{V}$ une infinité de fois. Plus précisément, pour tout rayon géodésique ρ de type $\wp$, soit $U_+ = U_+(\rho)$ le groupe unipotent opposé de ρ. Remarquons que la dimension de U_+ est $n-1$. Le groupe U_+ peut être identifié à un sous-ensemble ouvert Zariski dense de la strate $\wp$ via la bijection $\mathbf{u} \mapsto \rho(\infty)\mathbf{u}$ (voir aussi la remarque 3.3.18). A tout point projectif dans cet ouvert Zariski dense on associe ainsi un unipotent. En particulier, à tout vecteur entier primitif $w \in \mathcal{P}\mathbb{Z}^{n+1}/\{-1, 1\}$ avec $L_{\mathfrak{q}}(w) = 0$, on associe un unipotent $\mathbf{u}_w$, si w engendre une droite contenue dans l'ouvert Zariski dense ci-dessus.

Rappelons que *l'ensemble des vecteurs entiers primitifs dans* $\mathbb{R}^{n+1}$, qu'on note $\mathcal{P}\mathbb{Z}^{n+1}$, est l'ensemble :

$$\left\{(p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{(0, \ldots 0)\} \; ; \; \mathrm{pgcd}(p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}) = 1\right\} . \tag{3.12}$$

On peut voir $\mathcal{P}\mathbb{Z}^{n+1}/\{-1, 1\}$ comme ensemble de points projectifs dans $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$.

Soit $\bar{r}_i$ un rayon géodésique dans $\mathcal{V}$ dont un relèvement r_i est de type $\wp$.

Soit $\phi : [a, +\infty) \to [b, +\infty)$, $a, b \in \mathbb{R}$, une application. On définit l'ensemble d'unipotents :

$$\mathcal{R}_\phi^i = \{\mathbf{u} \in U_+ \; ; \; -f_{\bar{r}_i}(\mathrm{proj}\,(\varrho(t)\mathbf{u})) \geq t - \phi(t) \text{ une infinité de fois pour } t \to \infty\} . \tag{3.13}$$

Dans le cas particulier $t - \phi(t) = \beta t$, où $\beta \in [0, 1]$, on remplace dans (3.13) l'indice ϕ par l'indice β. On peut voir ces ensembles comme des ensembles de rayons géodésiques, via l'identification $\mathbf{u} \mapsto \rho\mathbf{u}$.

Théorème 3.3.17. *Supposons que ϕ et $id - \phi$ sont des fonctions croissantes, et que ϕ est une bijection.*

(1) Soit $s \in [0, n-1)$. La mesure $\mathcal{H}^s(\mathcal{R}^i_\phi)$ est ∞ si et seulement si il existe un $T > 0$ suffisamment grand tel que

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{(n-1)kT - s\phi^{-1}(kT)}{2\sqrt{2}}} = \infty \, .$$

(2) Si pour un $T > 0$ suffisamment grand, $\lim_{k\to\infty}[kT - \phi^{-1}(kT)] = -\infty$ alors

$$d = \dim_H \mathcal{R}^i_\phi = \sigma \cdot (n-1), \text{ où } \sigma = \limsup_{k\to\infty} \frac{kT}{\phi^{-1}(kT)} \, .$$

Si de plus $\limsup_{k\to\infty}[kT - \sigma\phi^{-1}(kT)] > -\infty$ alors $\mathcal{H}^d(\mathcal{R}^i_\phi) = \infty$.

Dans la définition de l'ensemble $\mathcal{R}^i_\phi$ on peut remplacer la fonction ϕ par la fonction $\phi + c$, où c est une constante, sans que cela change l'énoncé du théorème 3.3.17.

Remarque 3.3.18. L'ensemble $P(\rho)U_+$ est ouvert Zariski dense dans G, où $P(\rho)$ est le groupe parabolique associé à ρ. Puisque $P(\rho)\backslash G$ peut être identifié à la strate $\wp$, il s'ensuit que U_+ peut être identifié à un sous-ensemble ouvert Zariski dense dans cette strate. Aussi, si un rayon géodésique r vérifie la condition :

$$-f_{\bar{r}_i}(\mathrm{proj}\,(r(t))) \geq t - \phi(t) \text{ une infinité de fois pour } t \to \infty \, ,$$

alors tout rayon asymptote à r vérifie la même condition, quitte à ajouter une constante à ϕ. Ainsi, le théorème 3.3.17 donne la formule de la dimension de l'ensemble des points de type $\wp$ dans le bord à l'infini correspondant à des rayons qui s'éloignent dans la pointe à une profondeur par rapport à $\bar{r}_i$ d'au moins $t - \phi(t) + c$ une infinité de fois, où c est une constante.

Corollaire 3.3.19. *(a) Pour tout $\beta \in (0, 1)$, l'ensemble $\mathcal{R}^i_\beta$ a la dimension de Hausdorff $d = (1-\beta)(n-1)$, et $\mathcal{H}^d\left(\mathcal{R}^i_\beta\right) = \infty$.*

(b) Les deux propriétés dans (a) sont vérifiées aussi par l'ensemble :

$$\mathcal{E}\mathcal{R}^i_\beta = \mathcal{R}^i_\beta \setminus \bigcup_{\beta' > \beta} \mathcal{R}^i_{\beta'} = \left\{ \mathbf{u} \in \mathcal{R}^i_\beta \, ; \, \limsup_{t\to+\infty} \frac{-f_{\bar{r}_i}(\mathrm{proj}\,(\varrho(t)\mathbf{u}))}{t} = \beta \right\} \, .$$

(c) L'ensemble $\mathcal{R}^i_0$ coïncide avec U_+ et l'ensemble $\mathcal{R}^i_1$ est contenu dans l'ensemble d'unipotents $\left\{\mathbf{u}_w \, ; \, w \in \mathcal{P}\mathbb{Z}^{n+1}/\{-1, 1\}, L_{\mathfrak{q}}(w) = 0\right\}$.

Les résultats de (3.4) et de (3.6) peuvent aussi être interprétés en termes de rayons géodésiques faisant des excursions de plus en plus loin dans une pointe, mais dans un autre espace localement symétrique. Ainsi, on considère le groupe simple $G = SL(n+1, \mathbb{R})$. L'espace symétrique associé $\mathcal{P}_{n+1} = SO(n+1)\backslash SL(n+1, \mathbb{R})$ peut être identifié à l'espace des formes quadratiques définies positives de déterminant un sur $\mathbb{R}^{n+1}$, en associant à chaque classe à gauche $SO(n+1)Y$ la forme quadratique dont la matrice dans la base canonique est $Y^T Y$. Dans la suite, les formes quadratiques de $\mathcal{P}_{n+1}$ sont identifiées à leurs matrices dans la base canonique. Le bord à l'infini $\partial_\infty \mathcal{P}_{n+1}$ peut être identifié à l'immeuble sphérique d'incidence de l'espace projectif $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$.

Soit le réseau $SL(n+1,\mathbb{Z})$, soit $\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{P}_{n+1}/SL(n+1,\mathbb{Z})$ et soit proj la projection de $\mathcal{P}_{n+1}$ sur $\mathcal{T}_{n+1}$.

L'ensemble des formes quadratiques $F = \{\mathrm{diag}(e^{t_1}, e^{t_2}, \dots, e^{t_{n+1}})\ ;\ t_1+t_2+\cdots+t_{n+1} = 0\}$ est un plat maximal dans $\mathcal{P}_{n+1}$. Le sous-ensemble $W = \{\mathrm{diag}(e^{t_1}, e^{t_2}, \dots, e^{t_{n+1}})\ ;\ t_1+t_2+\cdots+t_{n+1} = 0,\ t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_{n+1}\}$ est une chambre de Weyl. Son image $\mathrm{proj}(W)$ est isométrique à W et $\mathcal{T}_{n+1}$ est a distance de Hausdorff finie de $\mathrm{proj}(W)$.

Les rayons singuliers maximaux (c'est-à-dire les faces de dimension 1) de W, paramétrés par la longueur d'arc, sont les ensembles de formes quadratiques :

$$r_i = \{\mathrm{diag}\ (\underbrace{e^{\lambda_i t}, \dots, e^{\lambda_i t}}_{n+1-i \text{ fois}}, \underbrace{e^{-\mu_i t}, \dots e^{-\mu_i t}}_{i \text{ fois}})\ ;\ t \in \mathbb{R}_+\}\ , \tag{3.14}$$

où $\lambda_i = \sqrt{\frac{i}{(n+1)(n+1-i)}}$ et $\mu_i = \sqrt{\frac{n+1-i}{(n+1)i}}$, $i \in \{1, 2, \dots n\}$.

Le rayon r_i se projette sur un rayon géodésique dans $\mathcal{T}_{n+1}$, qu'on note $\bar{r}_i$. Le point à infini $r_1(\infty)$ est le point projectif $\langle e_{n+1}\rangle$. Le point à infini $r_n(\infty)$ est l'hyperplan dans $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ défini par l'équation $x_1 = 0$, qu'on note e_1^*. Ainsi, les orbites $r_1(\infty)G$ et $r_n(\infty)G$, qui sont des strates singulières maximales dans $\partial_\infty \mathcal{P}_{n+1}$, sont identifiées à l'ensemble des points projectifs et respectivement à l'ensemble des hyperplans projectifs dans $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathcal{S}_\psi(\mathbb{R}^n)$ peut être relié à un ensemble de rayons géodésiques similaire à $\mathcal{R}^i_\phi$ défini dans (3.13). Ainsi, on définit :

$$\mathcal{R}^1_\phi = \{\mathbf{u} \in U_+(r_1)\ ;\ -f_{\bar{r}_1}(\mathrm{proj}\,(r_1(t)\mathbf{u})) \geq t - \phi(t) \text{ une infinité de fois, pour } t \to \infty\}\ . \tag{3.15}$$

On peut définir un ensemble analogue pour le rayon géodésique r_n :

$$\mathcal{R}^n_\phi = \{\mathbf{u} \in U_+(r_n)\ ;\ -f_{\bar{r}_n}(\mathrm{proj}\,(r_n(t)\mathbf{u})) \geq t - \phi(t) \text{ une infinité de fois, pour } t \to \infty\}\ . \tag{3.16}$$

Si $t - \phi(t) = \beta t$ on remplace dans (3.15) et (3.16) l'indice ϕ par l'indice β.

Pour simplifier les formules, on note η_n la constante $\sqrt{\frac{n+1}{n}}$.

Théorème 3.3.20. *Soit $\phi : [a, +\infty) \to [b, +\infty)$ une fonction bijective telle que ϕ et $\eta_n^2\, id - \phi$ sont des fonctions croissantes. Alors on a, pour $i = 1, n$, que :*

$$\mathcal{H}^s\left(\mathcal{R}^i_\phi\right) = \begin{cases} 0\,, & si\ \sum_{k=1}^\infty k^n e^{-\frac{s\eta_n}{2}\phi^{-1}(2\eta_n \ln k)} < \infty\,, \\ \infty\,, & si\ \sum_{k=1}^\infty k^n e^{-\frac{s\eta_n}{2}\phi^{-1}(2\eta_n \ln k)} = \infty\,. \end{cases} \tag{3.17}$$

Dans la définition des ensembles de rayons $\mathcal{R}^i_\phi$, on peut à nouveau remplacer la fonction ϕ par la fonction $\phi + c$, avec c une constante, sans que cela change l'énoncé du théorème 3.3.20.

Corollaire 3.3.21. *(i) Pour tout $\beta \in (0,1)$, l'ensemble $\mathcal{R}^i_\beta$, $i = 1, n$, a la dimension de Hausdorff $d = n(1-\beta)$ et $\mathcal{H}^d(\mathcal{R}^i_\beta) = \infty$.*

(ii) Les deux propriétés énoncées dans (i) sont vérifiées aussi par l'ensemble :

$$\mathcal{E}\mathcal{R}^i_\beta = \mathcal{R}^i_\beta \setminus \bigcup_{\beta' > \beta} \mathcal{R}^i_{\beta'} = \left\{\mathbf{u} \in \mathcal{R}^i_\beta\ ;\ \limsup_{t\to\infty} \frac{-f_{\bar{r}_i}(\mathrm{proj}\,(r_i(t)\mathbf{u}))}{t} = \beta\right\}\ .$$

(iii) L'ensemble $\mathcal{R}^i_0$ coïncide avec $U_+(r_i)$. L'ensemble $\mathcal{R}^1_1$ est contenu dans $\{\mathbf{u} \in U_+(r_1)\ ;\ r_1(\infty)\mathbf{u} \in \mathcal{P}\mathbb{Z}^{n+1}/\{-1,1\}\}$. L'ensemble $\mathcal{R}^n_1$ est contenu dans $\{\mathbf{u} \in U_+(r_n)\ ;\ r_n(\infty)\mathbf{u} \in (\mathcal{P}\mathbb{Z}^{n+1})^*/\{-1,1\}\}$.

La notation $(\mathcal{P}\mathbb{Z}^{n+1})^*/\{-1,1\}$ signifie qu'on regarde $\mathcal{P}\mathbb{Z}^{n+1}/\{-1,1\}$ comme ensemble dans l'espace dual, c'est-à-dire comme l'ensemble des hyperplans rationnels.

L'ensemble $\mathcal{L}_\psi(\mathbb{R}^n)$ peut être relié aussi à des ensembles de rayons géodésiques. La nouveauté dans ce cas est qu'il faut considérer ou bien des rayons de pente $r_1(\infty)$ et leur divergence dans la pointe mesuré par rapport à $\bar{r}_n$, ou bien des rayons de pente $r_n(\infty)$ et leur divergence par rapport à $\bar{r}_1$. Remarquons tout d'abord que la profondeur maximale que peut atteindre $\mathrm{proj}\,(r_i(t)\mathbf{u})$ une infinité de fois, mesurée par rapport à $\bar{r}_j$, où $\{i,j\}=\{1,n\}$, est $\frac{1}{n}t+c$, avec c une constante. Une telle profondeur peut être atteinte une infinité de fois si et seulement si le rayon $\mathrm{proj}\,(r_i\mathbf{u})$ est contenu dans la même projection d'une chambre de Weyl qu'un rayon singulier maximal asymptote à $\bar{r}_j$ (voir le corollaire 3.3.23, (iii)). Par conséquent, dans ce cas en définissant l'ensemble de rayons il faut prendre une fonction sous la forme $\frac{1}{n}t-\phi(t)$, où $\phi:[a,+\infty)\to[b,+\infty)$. Ainsi on définit :

$$\mathcal{R}_\phi^{1n}=\left\{\mathbf{u}\in U_+(r_1)\ ;\ -f_{\bar{r}_n}\left(\mathrm{proj}\,(r_1(t)\mathbf{u})\right)\geq\frac{1}{n}t-\phi(t)\text{ une infinité de fois quand }t\to\infty\right\}.$$

De façon analogue on définit :

$$\mathcal{R}_\phi^{n1}=\left\{\mathbf{u}\in U_+(r_n)\ ;\ -f_{\bar{r}_1}\left(\mathrm{proj}\,(r_n(t)\mathbf{u})\right)\geq\frac{1}{n}t-\phi(t)\text{ pour une infinité de }t\to\infty\right\}.$$

Théorème 3.3.22. *Soit $\phi:[a,+\infty)\to[b,+\infty)$ une fonction bijective telle que ϕ et $\eta_n^2\,id-\phi$ sont des fonctions croissantes. Pour $\{i,j\}=\{1,n\}$,*

$$\mathcal{H}^s\left(\mathcal{R}_\phi^{ij}\right)=\begin{cases}0\,, & si\ \sum_{k=1}^\infty k^n e^{-(s-n+1)\frac{\eta_n}{2}\phi^{-1}(2\eta_n\ln k)}<\infty\,,\\ \infty\,, & si\ \sum_{k=1}^\infty k^n e^{-(s-n+1)\frac{\eta_n}{2}\phi^{-1}(2\eta_n\ln k)}=\infty\,.\end{cases}$$

Dans la définition des ensembles $\mathcal{R}_\phi^{ij}$, la fonction ϕ peut à nouveau être remplacée par $\phi+c$, où c est une constante.

Corollaire 3.3.23. *(i) Pour tout $\beta\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$, l'ensemble $\mathcal{R}_\beta^{ij}$, $\{i,j\}=\{1,n\}$, a la dimension de Hausdorff $d=n(1-\beta)$ et $\mathcal{H}^d(\mathcal{R}_\beta^{ij})=\infty$.*

(ii) Les mêmes propriétés sont vérifiées par l'ensemble :

$$\mathcal{E}\mathcal{R}_\beta^{ij}=\mathcal{R}_\beta^{ij}\setminus\bigcup_{\beta'>\beta}\mathcal{R}_{\beta'}^{ij}=\left\{\mathbf{u}\in\mathcal{R}_\beta^{ij}\ ;\ \limsup_{t\to\infty}\frac{-f_{\bar{r}_j}\left(\mathrm{proj}\,(r_i(t)\mathbf{u})\right)}{t}=\beta\right\}.$$

(iii) L'ensemble $\mathcal{R}_0^{ij}$ coïncide avec $U_+(r_i)$.
L'ensemble $\mathcal{R}_{\frac{1}{n}}^{1n}$ est composé d'éléments $\mathbf{u}\in U_+(r_1)$ tels que le point projectif $r_1\mathbf{u}(\infty)$ est contenu dans un des hyperplans d'équation $x_i=q$, où $q\in\mathbb{Z}$ et $i\in\{1,2,\dots,n\}$.
L'ensemble $\mathcal{R}_{\frac{1}{n}}^{n1}$ est composé d'éléments $\mathbf{u}\in U_+(r_n)$ tels que l'hyperplan $r_n\mathbf{u}(\infty)$ contient un des vecteurs e_i+qe_{n+1}, où $q\in\mathbb{Z}$ et $i\in\{1,2,\dots,n\}$.

Les corollaires 3.3.19, 3.3.21 et 3.3.23 suggèrent qu'il pourrait y avoir une formule générale pour la dimension de Hausdorff de l'ensemble de rayons s'éloignant dans une pointe une infinité de fois à une profondeur linéaire. Ceci justifie la question suivante.

Soit X un espace symétrique de type non-compact, soit G le groupe semisimple connexe d'isométries de X, soit Γ un réseau non-uniforme irréductible d'isométries de X, soit $\mathcal{V}=X/\Gamma$ et soit proj la projection de X sur $\mathcal{V}$. Considérons ϱ un rayon géodésique dans X, $\bar{r}$ un rayon géodésique dans $\mathcal{V}$ et r un relèvement de $\bar{r}$ dans X. Le rayon r est contenu dans une chambre de Weyl de sommet $r(0)$. Cette même chambre de Weyl contient un unique rayon ϱ_1 de sommet $r(0)$ et faisant partie de l'orbite ϱG. La fonction de Busemann f_r restreinte à ϱ_1 est de la forme $-\beta_0 t$ pour un $\beta_0 \geq 0$. Ceci implique que, dès que $\beta_0 > 0$, $\mathrm{proj}(\varrho_1)$ s'éloigne dans le bout de $\mathcal{V}$ qui contient $\bar{r}$ à une profondeur de $\beta_0 t$ au temps t, mesurée par rapport à $\bar{r}$. Parmi tous les rayons géodésiques de l'orbite ϱG ayant leur origine sur l'horosphère $H(r)$, le rayon ϱ_1 a la propriété que sa projection $\mathrm{proj}(\varrho_1)$ est à la profondeur maximale au moment t par rapport à $\bar{r}$.

Question 3.3.24. Pour tout $\beta \in (0, \beta_0)$, considérons l'ensemble

$$\mathcal{R}_\beta = \{\mathbf{u} \in U_+(\varrho)\ ;\ -f_{\bar{r}}\left(\varrho(t)\mathbf{u}\right) \geq \beta t \text{ une infinité de fois pour } t \to \infty\}\ .$$

Est-ce vrai que $d = \dim_H \mathcal{R}_\beta = (1-\beta) \dim U_+(\varrho)$ et que $\mathcal{H}^d\left(\mathcal{R}_\beta\right) = \infty$?

Bibliographie

[Ad$_1$] S.I. Adyan, The Burnside problem and identities in groups, Springer Verlag 1979.

[Ad$_2$] S.I. Adyan, *Random walks on free periodic groups*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), no. 6, 1139-1149.

[Al] J. Alonso, *Inégalités isoperimétriques et quasi-isométries*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série 1, **311** (1991), 761-764.

[Bak] R. C. Baker, *Dirichlet's theorem on Diophantine approximation*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **83** (1978), 37-59.

[BGS] W. Ballmann, M. Gromov, V. Schroeder, Manifolds of Non-positive Curvature, Springer, 1999.

[Bas] H. Bass, *The degree of polynomial growth of finitely generated nilpotent groups*, Proc. London Math. Soc. **2**5 (1972), 603-614.

[BHV] B. Bekka, P. de la Harpe, A. Valette, Kazhdan's Property (T), prépublication 2002.

[BD] V. I. Bernik, M. M. Dodson, Metric Diophantine Approximation on Manifolds, Cambridge Univ. Press, 1999.

[BDV$_1$] V. V. Beresnevich, H. Dickinson, S. L. Velani, *Diophantine approximation on planar curves and the distribution of rational points*, prépublication arXiv :math.NT/0401148.

[BDV$_2$] V. V. Beresnevich, H. Dickinson, S. L. Velani, *Measure theoretic laws for lim sup sets*, prépublication arXiv :math.NT/0401118.

[BoS] A. Borel, J.-P. Serre, *Corners and arithmetic groups.* Avec un appendice : *Arrondissement des variétés à coins*, par A. Douady et L. Hérault, Comment. Math. Helv. **48** (1973), 436-491.

[BSh] Z. I. Borevich, I. R. Shafarevich, Théorie des nombres, Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[Bou] N. Bourbaki, Topologie générale, quatrième édition, Hermann, Paris, 1965.

[BoD] J.D. Bovey, M. M. Dodson, *The Hausdorff dimension of systems of linear forms*, Acta Arithm. **45** (1986), 337-358.

[Bow$_1$] B. Bowditch, *Notes on Gromov's hyperbolicity criterion for path metric spaces*, Group Theory from a Geometrical Viewpoint, E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovski (eds), ICTP Trieste, World Scientific Publishing Co. 1991.

[Bow$_2$] B. Bowditch, *A short proof that a sub-quadratic isoperimetric inequality implies a linear one*, Mich. J. Math **4**2 (1995), 103-107.

[Bow$_3$] B. Bowditch, *Relatively hyperbolic groups*, prépublication Southampton, 1997.

[Boż] M. Bożejko, *Uniformly amenable discrete groups*, Math. Ann. **251** (1980), 1-6.

[Bri] M. Bridson, *Asymptotic cones and polynomial isoperimetric inequalities*, Topology **38** (1999), 543-554.

[BrH] M. R. Bridson, A. Haefliger, Metric Spaces of Non-positive Curvature, Springer, 1999.

[Bu] J. Burillo, *Dimension and fundamental groups of asymptotic cones*, J. London Math. Soc. **59** (1999), 557-572.

[BT] J. Burillo, J. Taback, *Equivalence of geometric and combinatorial Dehn functions*, New York J. Math. **8** (2002), 169-179.

[CR] I. Chatterji, K. Ruane, *Some geometric groups with rapid decay*, arXive :math.GR/0310356.

[C] A. Connes, Noncommutative Geometry, Academic Press, 1994.

[CM] A. Connes, H. Moscovici, *Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and hyperbolic groups*, Topology **29** (1990), 345-388.

[CDP] M. Coornaert, T. Delzant, A. Papadopoulos, Géométrie et théorie des groupes, Lecture Notes in Math. 1441, Springer, 1980.

[Dah_1] F. Dahmani, *Combination of convergence groups*, Geometry and Topology **7** (2003), 933-963.

[Dah_2] F. Dahmani, Les groupes relativement hyperboliques et leurs bords, thèse, Université de Strasbourg.

[Del] T. Delzant, communications privées.

[DG] T. Delzant, M. Gromov, *Groupes de Burnside et géométrie hyperbolique*, prépublication.

[DES] B. de Smit, *The fundamental group of the Hawaiian earring is not free*, Internat. J. Algebra Comput. **2** (1992), 33-37.

[DD_1] H. Dickinson, M. M. Dodson, *Simultaneous Diophantine Approximation on the circle and Hausdorff dimension*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **130** (2001), 515-522.

[DD_2] H. Dickinson, M. M. Dodson, *Extremal manifolds and Hausdorff dimension*, Duke Math. J. **101** (2000), 271-281.

[DV] H. Dickinson, S. L. Velani, *Hausdorff measure and linear forms*, J. reine angew. Math. **490** (1997), 1-36.

[DRV_1] M. M. Dodson, B. P. Rynne and J. A. G. Vickers, *Metric Diophantine approximation and Hausdorff dimension on manifolds*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **105** (1989), 547-558.

[DRV_2] M. M. Dodson, B. P. Rynne and J. A. G. Vickers, *Khintchine-type theorems on manifolds*, Acta Arith. **57** (1991), 115-130.

[DRV_3] M. M. Dodson, B. P. Rynne and J. A. G. Vickers, *Simultaneous Diophantine approximation and asymptotic formulae on manifolds*, J. Number Theory **58** (1996), 298-316.

[DP] A. Dyubina, I. Polterovich, *Structures at infinity of hyperbolic spaces*, (Russian) Uspekhi Mat. Nauk **53** (1998), no. 5 (323), 239-240 ; translation in Russian Math. Surveys **53** (1998), no. 5, 1093-1094.

[Dyu] A. Dyubina, *Instability of the virtual solvability and the property of being virtually torsion free for quasi-isometric groups*, Int. Math. Res. Notices **21** (2000), 1097-1101.

[EO] A. Erschler, D. Osin, *Fundamental groups of asymptotic cones*, prépublication arXiv :math.GR/0404111.

[E] A. Eskin, *Quasi-isometric rigidity of nonuniform lattices in higher rank symmetric spaces*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), 321-361.

[Fa] B. Farb, *Relatively hyperbolic groups*, Geom. Funct. Analysis **8** (1998), 810-840.

[FM_1] B. Farb, L. Mosher, *A rigidity theorem for the solvable Baumslag-Solitar groups*, With an appendix by Daryl Cooper, Invent. Math. **131** (1998), 419-451.

[FM_2] B. Farb, L. Mosher, *Quasi-isometric rigidity for the solvable Baumslag-Solitar groups II*, Invent. Math. **137** (1999), 613-649.

[FS] B. Farb and R.E. Schwartz, *The large scale geometry of Hilbert modular groups*, J. Diff. Geom. **44** (1996), 435-478.

[Ge] S. M. Gersten, *Isoperimetric and Isodiametric Functions of Finite Presentations*, Geometric Group Theory (vol. 1), G. A. Niblo, M. A. Roller (eds), Proceedings of the Symposium held in Sussex, London Math. Soc. Lecture Notes Series **181**, Cambridge University Press 1991.

[GH_1] E. Ghys, P. de la Harpe (eds), Sur les groupes hyperboliques d'après M. Gromov, Birkhäuser, 1990.

[GH_2] E. Ghys, P. de la Harpe, *Infinite groups as geometric objects (after Gromov)*, Ergodic theory, symbolic dynamics, and hyperbolic spaces, (Trieste, 1989), (ed. T. Bedford, M. Keane, C. Series), 299-314, Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1991.

[Gr_1] M. Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Publ. Math. IHES **53** (1981), 53-73.

[Gr_2] M. Gromov, *Infinite groups as geometric objects*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, (Warsaw, 1983), 385-392.

[Gr_3] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, Essays in group theory, 75-263, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 8, Springer, New York, 1987.

[Gr_4] M. Gromov, *Asymptotic Invariants of Infinite Groups*, Geometric Group Theory (vol. 2), G. A. Niblo, M. A. Roller (eds), Proc. of the Symposium held in Sussex, London Math. Soc. Lecture Notes Series **181**, Cambridge University Press 1991.

[Gui] Y. Guivarch, *Croissance polynomiale et périodes des fonctions harmoniques*, Bull. Soc. Math. France **101** (1973), 333-379.

[H_1] P. de la Harpe, *Moyennabilité de quelques groupes topologiques de dimension infinie*, C. R. Acad. Sci. Paris sér. I, **277** (1973), 1037-1040.

[H_2] P. de la Harpe, *Groupes hyperboliques, algèbres d'opérateurs et un théorème de Jolissaint*, C. R. Acad. Sci. Paris sér. I, **307** (1988), 771-774.

[He] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces, Academic Press, 1978.

[Iv] S. V. Ivanov, *The free Burnside groups of sufficiently large exponents*, Internat. J. Algebra Comput. **4** (1994), 1-307.

[Ja] V. Jarník, *Über die simultanen diophantischen Approximationen*, Math. Zeit. **33** (1931), 503-543.

[J] P. Jolissaint, *Rapidly decreasing functions in reduced C^*-algebras of groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **317** (1990), 167-196.

[KaL_1] M. Kapovich, B. Leeb, *On asymptotic cones and quasi-isometry classes of fundamental groups of nonpositively curved manifolds*, Geom. Funct. Analysis **3** (1995), 582-603.

[KaL_2] M. Kapovich, B. Leeb, *Quasi-isometries preserve the geometric decomposition of Haken manifolds*, Invent. Math. **128** (1997), no.2, 393-416.

[KaL_3] M. Kapovich, B. Leeb, 3-*manifold groups and nonpositive curvature*, Geom. Funct. Analysis **8** (1998), no. 5, 841-852.

[Kel] G. Keller, *Amenable groups and varieties of groups*, Illinois J. Math. **16** (1972), 257-268.

[KM_1] D. Kleinbock, G. A. Margulis, *Logarithm laws for flows on homogeneous spaces*, Invent. Math. **138** (1999), 451-494.

[KM_2] D. Kleinbock, G. A. Margulis, *Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds*, Ann. of Math. **148** (1998), 339-360.

[KlL] B. Kleiner, B. Leeb, *Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces and Euclidean buildings*, Publ. Math. IHES **86** (1997), 115-197.

[KSTT] L. Kramer, S. Shelah, K. Tent, S. Thomas, *Asymptotic cones of finitely presented groups*, prépublication, arXive, math.GT/0306420.

[L] V. Lafforgue, *KK-théorie bivariante pour les algèbres de Banach et conjecture de Baum-Connes*, Invent. Math. **149** (2002), 1-95.

[Le] E. Leuzinger, *An exhaustion of locally symmetric spaces by compact submanifolds with corners*, Invent. Math. **121** (1995), 389-410.

[LP] E. Leuzinger, Ch. Pittet, *Quadratic Dehn functions for solvable groups*, à paraître dans Math. Zeit.

[LMR] A. Lubotzky, Sh. Mozes, M. S. Raghunathan, *The word and Riemannian metrics on lattices of semisimple groups*, Publ. Math. IHES **91** (2000), 5-53.

[LS] R. Lyndon, P. Schupp, Combinatorial group theory, Springer-Verlag, 1977.

[Ly] I.G. Lysenok, *Infinite Burnside groups of even exponent*, Izv. Math. **60** (1996), no.3, 453-654.

[Mal] A.I. Mal'cev, *On a class of homogeneous spaces*, Izvestiya Akad. Nauk. SSSR. Ser. Mat. **13** (1949), 9-32.

[Mo] G. D. Mostow, Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces, Amer. Math. Soc. Studies no.78, Princeton University Press 1973.

[NA] P. S. Novikov, S. I. Adyan, *Infinite periodic groups* I, II, III, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **32** (1968), 212-244, 251-524, 709-731.

[Ol_1] A. Yu. Ol'shanskii, *On the question of the existence of an invariant mean on a group*, Uspekhi Mat. Nauk **35** (1980), no. 4, 199-200.

[Ol_2] A. Yu. Ol'shanskii, *The Novikov-Adyan theorem*, Mat. Sb. **118** (1982), 203-235.

[Ol_3] A. Yu. Ol'shanskii, *Hyperbolicity of groups with subquadratic isoperimetric inequalities*, Internat. J. Algebra Comput. **1** (1991), 282-290.

[Ol_4] A. Yu. Ol'shanskii, *Distortion functions for subgroups*, Group Theory Down Under (ed. J.Cossey, C.F. Miller, W.D. Neumann, M. Shapiro), de Gruyter, 1999, 281–291.

[OlS_1] A. Yu. Ol'shanskii, M. Sapir, *Non-amenable finitely presented torsion-by-cyclic groups*, Publ. Math. IHES **96** (2002), 43-169.

[OlS_2] A. Yu. Ol'shanskii, M. Sapir, *Groups with non-simply connected asymptotic cones*, prépublication.

[Os] D.V. Osin, *Relatively hyperbolic groups : intrinsic geometry, algebraic properties and algorithmic problems*, prépublication, arXive :math.GR/0404040, 2004.

[Pan_1] P. Pansu, *Croissance des boules et des géodésiques fermées dans les nilvariétés*, Ergod. Th. Dynam. Syst. **3** (1983), 415-445.

[Pp_1] P. Papasoglu, *An algorithm detecting hyperbolicity*, Geometric and computational perspectives on infinite groups (Minneapolis, MN and New Brunswick, NJ, 1994), 193-200, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. **2**5, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[Pp_2] P. Papasoglu, *On the subquadratic isoperimetric inequality*, Geometric group theory, R. Charney, M. Davis, M. Shapiro (eds), de Gruyter, Berlin-New-York, 1995.

[Pp_3] P. Papasoglu, *On the asymptotic cone of groups satisfying a quadratic isoperimetric inequality*, J. Differential Geom. **44** (1996), no. 4, 789-806.

[Pp_4] P. Papasoglu, *Quasi-flats in semihyperbolic groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), no. 5, 1267-1273.

[Pp_5] P. Papasoglu, communications privées.

[PW] P. Papasoglu, K. Whyte, *Quasi-isometries between groups with infinitely many ends*, Comment. Math. Helv. **77** (2002), no. 1, 133–144.

[Par] A. Parreau, Dégénérescences de sous-groupes discrets de groupes de Lie semisimples et actions de groupes sur des immeubles affines, thèse, Université de Paris-Sud, janvier 2000.

[Pau] F. Paulin, *Outer automorphisms of hyperbolic groups and small actions on $\mathbb{R}$-trees*, Arboreal group theory, R. Alperin (ed), pp. 331-343, Publ. M.S.R.I. 19, Springer Verlag 1991.

[Pr] G. Prasad, *Strong rigidity of Q-rank one lattices*, Invent. Math. **21** (1973), 255-286.

[Ra] M. S. Raghunathan, Discrete Subgroups of Lie Groups, Springer, 1972.

[Ri] T.R. Riley, *Higher connectedness of asymptotic cones*, Topology **42** (2003), no. 6, 1289–1352.

[Ry] B. P. Rynne, *Simultaneous Diophantine approximation on manifolds and Hausdorff dimension*, J. Number Theory **98** (2003), 1-9.

[SBR] M. V. Sapir, J. C. Birget, E. Rips, *Isoperimetric and isodiametric functions of groups*, Ann. of Math. **157** (2002), 345-466.

[Sch_1] R. E. Schwartz. *The quasi-isometry classification of rank one lattices*, Publ. Math. IHES **82** (1995), 133-168 (1996).

[Sch_2] R. E. Schwartz, *Quasi-isometric rigidity and Diophantine approximation*, Acta Math. **177** (1996), no. 1, 75-112.

[Se] Z. Sela, *Diophantine geometry over groups I : Makanin-Razborov diagrams*, Publ. Math. IHES **93** (2001), 31-105.

[Sh] N. Shah, *Invariant measures and orbit closures in homogeneous spaces for actions of subgroups generated by unipotent elements*, Lie groups and ergodic theory (Mumbai, 1996), 229-271, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., 14, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1998.

[She] S. Shelah, Classification theory and the number of non-isomorphic models, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 92, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[St_1] J. R. Stallings, *On torsion-free subgroups with infinitely many ends*, Ann. of Math. **88** (1968), 312-334.

[St_2] J. R. Stallings, Group theory and three dimensional manifolds, Yale Math. Monographs 4, Yale Univ. Press, New Haven, 1971.

[TV] S. Thomas, B. Velickovic, *Asymptotic cones of finitely generated groups*, Bull. London Math. Soc. **32** (2000), no. 2, 203-208.

[Ti] J. Tits, Buildings of Spherical Type and Finite BN-Pairs, Lecture Notes 386, Springer Verlag, 1974.

[Val] A. Valette, *Nouvelles approches de la propriété (T) de Kazhdan*, séminaire Bourbaki novembre 2002.

[VDW] L. van den Dries, A. J. Wilkie, *On Gromov's theorem concerning groups of polynomial growth and elementary logic*, J. of Algebra **89** (1984), 349-374.

[Wys] J. Wysoczánski, *On uniformly amenable groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **102** (1988), no. 4, 933-938.

[Ya] A. Yaman, *A topological characterisation of relatively hyperbolic groups*, à paraître dans J. reine angew. Math.

Articles

[1] Nondistorsion des horosphères dans des immeubles euclidiens et dans des espaces symétriques, Geom. Funct. Analysis **7** (1997), 712-754.

[2] Remplissage dans des réseaux de Q-rang 1 et dans des groupes résolubles, Pacific J. Math. **185** (1998), 269-305.

[3] Quasi-isometric classification of non-uniform lattices in semisimple groups of higher rank, Geom. Funct. Analysis **10** (2000), no. 2, 327-388.

[4] Cônes asymptotiques et invariants de quasi-isométrie pour des espaces métriques hyperboliques, Ann. Inst. Fourier **51** (2001), no. 1, 81-97.

[5] Quasi-isometry invariants and asymptotic cones, Internat. J. Algebra Comput. **12** (2002), 99-135.

[6] Filling in solvable groups and in lattices in semisimple groups, Topology **43** (2004), 983-1033.

[7] (en collaboration avec M. Sapir) Non-linear residually finite groups, J. of Algebra **284** (2005), 174-178.

[8] (en collaboration avec M. Sapir) Relatively Hyperbolic groups with Rapid Decay Property, à paraître dans Int. Math. Res. Notices.

[9] Diophantine approximation on rational quadrics, à paraître dans Math. Annalen.

[10] (en collaboration avec M. Sapir) Tree-graded spaces and asymptotic cones of groups, à paraître dans Topology.

[11] Quasi-isometry rigidity of groups, notes de cours, école d'été de Grenoble.