Retour sur Benacerraf : 'What numbers could not be'

Damian RÖSSLER *

25 mars 2014

Voici deux extraits de l'article de P. Benacerraf, qui nous serviront de point de départ :

'Imagine Ernie and Johnny, sons of two militant logicists - children who have not been taught in the vulgar (old-fashioned) way but for whom the pedagogical order of things has been the epistemological order. They did not learn straight off how to count. Instead of beginning their mathematical training with arithmetic as ordinary men know it, they first learned logic - in their case, actually set theory. Then they were told about the numbers...'

'...For Ernie, the successor under R of a number x was the set consisting of x and all the members of x, while for Johnny the successor of x was simply $[x]$, the unit set of x - the set whose only member is x. Since for each of them 1 was the unit set of the null set, their respective progressions were

(i) $[\emptyset], [\emptyset, [\emptyset]], [\emptyset, [\emptyset], [\emptyset, [\emptyset]]]$, for Ernie

and

(ii) $[\emptyset], [[\emptyset]], [[[\emptyset]]], \dots$ for Johnny.

There were further disagreements. As you will recall, Ernie had been able to prove that a set had n members if and only if it could be put into one-to-one correspondence with the set of numbers less than or equal to n. Johnny concurred. But they disagreed when Ernie claimed further that a set had n members if and only if it could be put into one-to-one correspondence with the number n itself. For Johnny, every number is single-membered. In short, their cardinality relations were different. For Ernie, 17 had 17 members, while

*Institut de Mathématiques, Equipe Emile Picard, Université Paul Sabatier, 118 Route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 9, FRANCE, E-mail : rossler@math.univ-toulouse.fr

for Johnny it had only one. And so it went. . .'

L'idée principale de l'article de Benacerraf est qu'il est problématique de donner une définition des nombres naturels en mathématiques, car si on insiste pour les définir, on devra en choisir un représentant ensembliste donné et ce choix sera (nécessairement ?) arbitraire :

'If numbers are sets, then they must be particular sets, for each set is some particular set. But if the number 3 is really one set rather than another, it must be possible to give some cogent reason for thinking so ; for the position that this is an unknowable truth is hardly tenable.'

Benacerraf conclut que les nombres naturels ne peuvent être des ensembles. Il reprend ensuite la citation suivante de R. Martin, qu'il met en exergue de son article :

'The attention of the mathematician focuses primarily upon mathematical structure, and his intellectual delight arises (in part) from seeing that a given theory exhibits such and such a structure, from seeing how one structure is "modelled" in another, or in exhibiting some new structure and showing how it relates to previously studied ones But... the mathematician is satisfied so long as he has some "entities" or "objects" (or "sets" or "numbers" or "functions" or "spaces" or "points") to work with, and he does not inquire into their inner character or ontological status.

The philosophical logician, on the other hand, is more sensitive to matters of ontology and will be especially interested in the kind or kinds of entities there are actually He will not be satisfied with being told merely that such and such entities exhibit such and such a mathematical structure. He will wish to inquire more deeply into what these entities are, how they relate to other entities Also he will wish to ask whether the entity dealt with is sui generis or whether it is in some sense reducible to (or constructible in terms of) other, perhaps more fundamental entities.'

Il fait le commentaire suivant :

'Martin correctly points out that the mathematician's interest stops at the level of structure. If one theory can be modeled in another (that is, reduced to another) then further questions about whether the individuals of one theory are really those of the second just do not arise. In the same passage, Martin goes on to point out (approvingly, I take it) that the philosopher is not satisfied with this limited view of things. He wants to know more and does ask the questions in which the mathematician professes no interest. I agree. He does. And mistakenly so. It will be the burden of the rest of this paper to argue that such questions miss the point of what arithmetic, at least, is all about.'

Pour résumer :

– Selon R. Martin, le mathématiciens ne s'intéresse qu'aux structures alors que le philosophe veut aller plus au fond des choses et examiner 'l'être même des choses'.
– Selon Benacerraf, le philosophe fait ainsi fausse route.

Nous allons examiner toutes ces assertions et conclusions les unes après les autres.

La définition des nombres naturels comme ensemble demande de faire un choix arbitraire.

Ce type de difficulté apparaît de manière générale lorsqu'on considère des structures mathématiques à isomorphisme (même unique) près.

Un exemple plus sophistiqué de ce phénomène est donné par les théories de cohomologie. Si on souhaite calculer la cohomologie d'un faisceau sur un espace topologique, on doit choisir une résolution acyclique du faisceau puis appliquer le foncteur des sections globales à ce faisceau. L'homologie du complexe qui en résulte s'identifie canoniquement à la cohomologie du faisceau et un point essentiel est qu'un autre choix de résolution donnera une cohomologie canoniquement isomorphe. Le choix de la résolution est donc *en pratique* sans importance et son choix peut être - et est souvent - conditionné par les spécificités de l'espace topologique que l'on considère. Cependant, ce choix est une action du mathématicien et il ne peut être associé à une propriété naturelle de la cohomologie.

Cependant, on demandera (à juste titre ?) *quelle est* exactement la cohomologie du faisceau. Voici une réponse naïve : il suffit de considérer les classes d'isomorphisme de faisceaux de cohomologie, pour *toutes* les résolutions possibles. Cependant, fait alors face à une problème ensembliste : cette classe 'n'est pas un ensemble' ou autrement dit on a affaire à une définition purement intensionelle d'un ensemble et ce type de définition n'a pas de sens dans la théorie des ensembles constructive de Zermelo-Fränkel.

L'exemple des théories de cohomologie est intéressant car il concerne une construction particulièrement importante dans les mathématiques modernes et par ailleurs le choix de la résolution évoqué plus haut est souvent intimement lié aux spécificités de la situation que l'on considère.

Ce qui vient d'être dit pour les théories de cohomologie s'applique à l'arithmétique. N'importe quels deux exemplaires des nombres naturels sont canoniquement isomorphes mais par ailleurs, on ne peut choisir 'la mère des tous les exemplaires' en considérant des classes d'isomorphie, car on se trouve alors confronté à un problème de théorie des ensembles. Comme pour les théories des cohomologie, le choix de l'exemplaire que l'on considère dépendra de la situation qui intéresse le mathématicien. C'est en fait à ce type de problème que s'est trouvé confronté Frege. Dans les 'Grundlagen der Arithmetik', il définit un nombre naturel comme une propriété d'un ensemble donné de manière intensionelle, à savoir la donnée de sa cardinalité. Cette propriété se résume alors à la classe d'équivalence de tous les ensembles équipotents, ce qui mène aux difficultés ensemblistes mentionnées plus haut. Frege ne s'est rendu compte de ce problème qu'après l'apparition du paradoxe de Russell.

Par exemple, si on s'intéresse à des problèmes purement diophantiens, on choisira peut-être une des présentations des nombres naturels donnée plus haut alors que si on s'intéresse aux solutions réelles d'équations diophantiennes on choisira une présentation des nombres naturels comme sous-ensemble des nombres réels.

Remarquons maintenant un autre problème qui apparaît dans les discussions entre Ernie et Johnny. Comme la présentation ensembliste des nombres naturels de Johnny diffère de celle de Ernie, Johnny remarque que ses nombres naturels ont des propriétés que ceux de Ernie n'a pas (comme par exemple le nombre de sous-ensembles d'un nombre naturel). Ce fait souligne qu'un choix privilégié d'un représentant des nombres naturels semble impossible car ce choix aurait toujours des propriétés 'parasites', qui ne sont pas celles de tous les nombres naturels.

Benacerraf voudrait un représentant des nombres naturels tel que ses seules propriétés soient celles que l'on attend, ie (typiquement) les axiomes de Peano. Mais ceci n'est pas possible à cause de l'apparition de propriétés parasites, comme mentionné plus haut. Benacerraf en conclut que les nombres naturels ne peuvent former un ensemble.

Pour résumer : les deux approches possibles pour définir les nombres naturels, à savoir considérer des classes d'isomorphisme et choisir un représentant privilégié, ne peuvent aboutir.

Cependant, il faut maintenant s'interroger sur ce que l'on exige de cet objet élusif qu'est $\mathbf{N}$. Benacerraf voudrait disposer d'un objet 'sans propriété' parasite, ie un objet dont les propriétés sont exactement ce que l'on sait des nombres naturels, ie les axiomes de Peano (mettons). Dit de manière plus grandiloquente : un objet dont les axiomes de Peano épuisent l'être.

Pour mieux comprendre la nature de cette exigence, il est utile de revenir au contexte mathématique. De prime abord, dans ce contexte, il est tout à fait possible - et il semble même essentiel qu'il soit possible - de produire des objets entièrement défini par un ensemble de propriétés. Par exemple, si l'on travaille dans les nombres réels, les nombres naturels sont entièrement définis comme sous-ensemble de $\mathbf{R}$. Si on se donne un certain domaine des mathématiques, les choses se passent comme Benacerraf le souhaiterait : on peut entièrement définir certains objets par des propriétés.

Cependant, comment peut-on 'travailler dans un certain domaine des mathématiques' ? Pour cela, il faut d'abord passer par certaines étapes préliminaires. Il faut d'abord choisir une axiomatique en logique du premier ordre pour la théorie des ensembles. Ensuite il faut choisir un modèle de cette axiomatique et c'est dans ce modèle que l'on peut travailler. On fait donc à ce moment-là un choix, qui est fortement arbitraire : en effet, comme la théorie des ensembles est incomplète (Gödel), il existe des modèles non-isomorphes.

On se trouve face au problème suivant : on voudrait dans un modèle donné pouvoir 'parler' des éléments du modèle et non pas seulement faire des énoncés qui seraient valables dans tout modèle. De fait, ceci est impossible : on ne peut en mathématiques parler des éléments du modèle que l'on utilise. Ceci est vrai même si la théorie avec laquelle on travaille est complète.

En d'autres termes : l'individualité, la singularité même de l'objet dont on parle est inaccessible. On ne peut connaître les individus qu'en termes généraux.

Il est intéressant qu'on touche ici à un problème ancien en épistémologie.

Je cite ici un passage de la Somme contre les Gentils de Saint Thomas d'Aquin :

'Species intelligibles ad intellectum nostrum perveniunt per viam resolutionis, scilicet per abstractionem a conditionibus materialibus et individuantibus, unde per eas singularia a nobis cognosci non possunt : ad intellectum autem substantise separatae perveniunt species intelligibiles quasi per viam compositionia, habet enim species intelligibiles ex assimilatione sui ad primam intelligibilem speciem intellectus - divini quae quidam non est a rebus abstracta sed rerum factiva (c. g. 2. 100).'

Ainsi, dans les mots de Domet de Vorges : 'Ainsi l'intelligence humaine unie à un corps ne connaît directement que des universaux.'

Comment Wittgenstein, quant à lui, voit-il ce problème ? Pour comprendre cela, il est utile de revenir à la notion de 'Elementarsatz' ou proposition élémentaire, qui apparaît dans le Tractatus. Voici quelques uns des extraits que j'avais présentés lors du dernier exposé :

'4.21 Der einfachste Satz, der Elementarsatz, behauptet das Bestehen eines Sachverhaltes.

4.22 Der Elementarsatz besteht aus Namen. Er ist ein Zusammenhang, eine Verkettung, von Namen.

4.221 Es ist offenbar, dass wir bei der Analyse der Sätze auf Elementarsätze kommen müssen, die aus Namen in unmittelbarer Verbindung bestehen. Es frägt sich hier, wie kommt der Satzverband zustande.

4.2211 Auch wenn die Welt unendlich komplex ist, so dass jede Tatsache aus unendlich vielen Sachverhalten besteht und jeder Sachverhalt aus unendlich vielen Gegenständen zusammen- gesetzt ist, auch dann müsste es Gegenstände und Sachverhalte geben.

4.23 Der Name kommt im Satz nur im Zusammenhange des Elementarsatzes vor.'

Une proposition élémentaire doit ainsi être logiquement indépendante d'autres propositions élémentaires et c'est dans ces propositions qu'apparaissent les noms, qui établissent le lien entre le langage et la réalité.

Je rappelle par ailleurs que Wittgenstein se plaint dans ses carnets de ne pouvoir exhiber aucune proposition élémentaire.

Pourquoi cette difficulté à trouver une proposition élémentaire ?

Il me semble que cette difficulté est liée au problème de la singularité inaccessible évoqué plus haut. En effet, une proposition élémentaire devrait, via un nom, faire un énoncé sur l'objet nommé et seulement sur celui-ci. Sinon, on ne pourrait apparemment pas parler du monde : il faut bien que les noms *réfèrent* à des objets directement, sans qu'une substitution par un objet isomorphe soit possible.

Encore une fois, l'exemple des mathématiques donné plus haut illustre bien le problème : il est bien possible en mathématiques de parler des objets mais on ne peut décider parler de l'objet *dans le modèle*. La singularité de l'objet dans le modèle est une zone de non-dit.

Ceci suggère qu'une vraie proposition élémentaire ne peut exister, car elle devrait pouvoir faire référence à un objet dans sa singularité même. Cependant, cette notion a un sens dans une certaine totalité prédéterminée (un modèle).

Il est intéressant de remarquer que Saint Thomas, quant à lui, précise bien que si la singularité des objets n'est pas connaissable par les hommes, elle est effectivement connue par Dieu, qui est ainsi une sorte de garant de cette singularité (je n'ai pas retrouvé le passage).

À la lumière de ces commentaires, que faut-il maintenant penser de l'énoncé de Benacerraf que 'les nombres naturels ne peuvent former un ensemble' ? Il me semble clair que si on parle des nombres naturels, on ne peut manquer de parler d'un ensemble. Le problème de Benacerraf est en substance qu'il exige des nombres naturels une singularité qui est inaccessible en toute situation - même, comme le dit St Thomas, dans la situation que Benacerraf appelle empirique. La nature spécifique des nombres naturels n'est donc pas à l'origine de la difficulté.

On pourrait même dire que c'est l'universalité apparente des nombres naturels qui semble forcer une singularité particulière de cet objet dans l'esprit de Benacerraf - une singularité que l'on n'exigerait pas, en pratique (en physique, par exemple) d'un objet physique.

Essayons de creuser ce dernier point. Il peut, après tout, sembler naturel d'espérer qu'un objet aussi fondamental que les nombres naturels soit une donnée directement accessible à l'intellect et qu'on en soit pas séparé par la nécessité d'une abstraction supplémentaire. Cependant, comme nous avons vu plus haut, on ne peut rien espérer de tel. Il me semble qu'on peut tout au plus revenir aux pratiques de comptage que j'avais évoquées pendant mon premier exposé et qui sont sous-jacentes à la formulation des systèmes axiomatiques en logique du premier ordre. On peut argumenter que ces pratiques montrent que le comptage et par delà les nombres naturels, sont un usage fondamental, un présupposé tacite irréductible. Il est cependant clair, comme nous l'avons déjà souligné plusieurs fois, que ce présupposé est tacite : il s'agit d'un usage, d'une règle et non d'une définition. C'est le comptage qui et en jeu ici et non les nombres naturels et c'est justement cette possibilité du comptage qui est implicite chez Ernie, Johnny et leurs amis et que l'on voit à l'oeuvre dans les '...' de (i) et (ii) plus haut.

Revenons maintenant sur le commentaire de Benacerraf

'Martin correctly points out that the mathematician's interest stops at the level of structure. [. . .] Martin goes on to point out (approvingly, I take it) that the philosopher is not satisfied with this limited view of things. [. . .] I agree. He does. And mistakenly so.'

Du point de vue développé plus haut, il me semble qu'il faut donner raison à Benacerraf. Cependant, il faut bien comprendre que le fait qu'on doit s'arrêter au niveau de la structure ne doit pas suggérer, de ce point de vue, que les mathématiques doivent devenir une science des paradigmes (je fais référence ici à la postérité structuraliste de l'article de Benacerraf), car en s'intéressant aux paradigmes on ne fait que déplacer le problème sur un autre niveau de langage - celui des paradigmes. L'impossibilité de se fixer dans une classe d'isomorphisme doit rester un non-dit.

(suite au prochain exposé)