Qu'est-ce qu'une tautologie ?

Damian RÖSSLER *

25 mars 2014

> ...For the moment, I do not know how to define 'tautology'. [footnote : The importance of 'tautology' for a definition of mathematics was pointed to me by my former pupil Ludwig Wittgenstein, who was working on the problem. I do not know whether he has solved it, or even whether he is alive or dead.]

On rappelle qu'une tautologie, ou truisme, est un énoncé qui doit pouvoir être identifié comme vrai sans avoir à faire d'expérience. Une tautologie est un énoncé complètement dénué de 'contenu empirique'.

Wittgenstein s'est beaucoup intéressé à la notion de tautologie dans le Tractatus. Dans le contexte de sa théorie de la proposition comme tableau, les tautologies apparaissent commes des cas limites nécessaires :

'4.4611 Tautologie und Kontradiktion sind aber nicht unsinnig ; sie gehören zum Symbolismus, und zwar ähnlich wie die 0 zum Symbolismus der Arithmetik.

4.462 Tautologie und Kontradiktion sind nicht Bilder der Wirklichkeit. Sie stellen keine mögliche Sachlage dar. Denn jene lässt j e d e mögliche Sachlage zu, diese k e i n e. In der Tautologie heben die Bedingungen der Übereinstimmung mit der Welt - die darstellenden Beziehungen - einander auf, sodass sie in keiner darstellenden Beziehung zur Wirklichkeit steht.'

Un point sur lequel Wittgenstein insiste beaucoup est le fait que l'existence des tautologies est une nécessité structurelle interne du langage (formel). De ce fait, une tautologie ne dit rien, elle ne doit pas être considérée comme un énoncé signifiant. Cependant,

*Institut de Mathématiques, Equipe Emile Picard, Université Paul Sabatier, 118 Route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 9, FRANCE, E-mail : rossler@math.univ-toulouse.fr

comme le langage et le monde partagent une même forme, le fait qu'il y a des tautologies dit quelque-chose sur le monde :

'6.124 Die logischen Sätze beschreiben das Gerüst der Welt, oder vielmehr, sie stellen es dar. Sie handeln von nichts. Sie setzen voraus, dass Namen Bedeutung, und Elementarsätze Sinn haben : Und dies ist ihre Verbindung mit der Welt. Es ist klar, dass es etwas über die Welt anzeigen muss, dass gewisse Verbindungen von Symbolen - welche wesentlich einen bestimmten Charakter haben - Tautologien sind. Hierin liegt das Entscheidende.'

Nous allons nous intéresser au sens que prend le point de vue de Wittgenstein dans le contexte de la logique mathématique et de la théorie des modèles.

Une situation simple est celle de la logique propositionelle sans quantificateurs. C'est celle à laquelle W. s'intéresse en pratique dans le Tractatus. Plus précisément, il est question de propositions formées à partir d'autre propositions (qui apparaissent comme des variables) au moyen des signes $\wedge$, $\vee$ et $\neg$, en excluant les quantificateurs $\forall$ et $\exists$. Peut-on déterminer parmi ces dernières celles qui sont des tautologies ? En voici des exemples bien connus

$$A \Rightarrow A,\ A \vee \neg A,\ (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$$

Puisque les tautologies sont des énoncés vides, il est souhaitable qu'il apparaissent comme tels a priori. Précisons qu'une approche, qui est par exemple présentée dans les Principia Mathematica de Russell et Whitehead est de poser comme axiomes un petit nombre de tautologies (dont, typiquement, le principe du tiers exclu $A \vee \neg A$), puis d'inférer à partir de celles-ci les autres en utilisant les règles de déduction. Cette méthode semble tout à fait insatisfaisante à W., car d'une part elle implique la recherche malaisée d'énoncés dont la vérité devrait précéder toute activité énonciatrice et d'autre part elle postule sans justification que certains énoncés sont des tautologies. Pour sortir de cette impasse, W. propose la méthode tabulaire, qui fait à ma connaissance sa première apparition historique dans le Tractatus (?). Il s'agit d'un simple calcul de 'valeurs de vérité'. Pour établir qu'un énoncé en logique propositionnelle est une tautologie, on transforme l'énoncé de la manière suivante en fonction sur un produit cartésien de plusieurs $\mathbf{Z}/2$:

- proposition $\longrightarrow$ variable dans $\mathbf{Z}/2$;
- $\vee \longrightarrow +$;
- $\wedge \longrightarrow *$;
- $\neg \longrightarrow$ fonction d'échange Ex de 0 et de 1 ;

(on notera que $A \Rightarrow B$ peut aussi se noter $A \vee (\neg A \vee B) \vee \neg B$).

Ensuite, on vérifie que la fonction que l'on obtient est la fonction constante de valeur 0. Par exemple, pour le principe du tiers exclu : $x + \mathrm{Ex}(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbf{Z}/2$.

En utilisant la méthode tabulaire, on peut ainsi voir immédiatement si une proposition en logique propositionnelle est vraie et cela bien sûr sans devoir recourir à une expérience. De plus, la méthode tabulaire traite toutes les tautologies de manière uniforme et n'implique pas l'introduction d'une axiomatique.

Qu'en est-il alors des propositions générales, dans lesquels les quantificateurs sont autorisés ? Autrement dit : y a-t-il une procédure simple établissant qu'un énoncé fait dans un langage du premier ordre, muni d'un ensemble arbitrairement grand de fonctions, relations et constantes, est vrai indépendamment des réalisations de de ces dernières ? Avant de pouvoir répondre à cette question, il faut bien sûr préciser ce que l'on entend par 'procédure'. Une définition célèbre passe par la notion de machine de Turing, dont les ordinateurs fournissent des incarnations physiques. Si l'on pose la question en termes de machines de Turing, il est bien connu - le premier résultat dans cette direction est dû à A. Church - qu'il n'en est rien. On peut démontrer qu'il n'existe pas de machine de Turing décidant si un énoncé du premier ordre est une tautologie. Autrement dit, la logique du premier ordre avec quantificateurs est indécidable. Ici, 'décider si un énoncé du premier ordre est une tautologie' signifie que l'on est en mesure de fournir une suite de déductions à partir des tautologies 'sans quantificateurs' évoquées plus haut. La méthode tabulaire de Wittgenstein peut être interprêtée comme la donnée d'un machine de Turing permettant de déterminer si une tautologie sans quantificateurs est une conséquence déductive des tautologies standard.

Le résultat de Church semble donc aller à l'encontre de l'idée de Wittgenstein que les tautologies sont 'transparentes', ie que leur vacuité peut être immédiatement élucidée.

Pour mieux comprendre la nature du problème, il faut cependant s'interroger sur les conditions de la démonstration de Church de l'indécidabilité de la logique du premier ordre. Pour mener à bien cette démonstration, il faut introduire une nouveau système formel du premier ordre, contenant un ensemble d'axiomes décrivant la logique du premier ordre. Ensuite, on formalise la notion de machine de Turing dans ce système et on donne une démonstration formelle de l'indécidabilité. La démonstration *effective* de l'indécidabilité se fait alors en considérant la logique du premier ordre comme un *modèle* du nouveau système formel. Pour pouvoir décrire formellement ce modèle, il est nécessaire d'introduire une théorie des ensembles dans laquelle on peut formaliser la notion de modèle. Il est intéressant maintenant de remarquer que dans ce modèle, les tautologies sans quantificateurs du système utilisé ne correspondent pas à des tautologies : elles correspondent à des identités bien connues de la théorie des ensembles, comme

$$A \cap A^c = \emptyset,\ (A \cap B^c)^c = A^c \cup B,\ \ldots$$

Pour démontrer l'indécidabilité de la logique du premier ordre, on est donc mené à devoir enlever leur statut de truisme aux tautologies sans quantificateurs. Cette transformation d'une tautologie en 'énoncé positif' a lieu chaque fois que l'on considère un modèle d'un système du premier ordre. Elle interviendrait déjà si l'on chercher à formaliser la théorie tabulaire de Wittgenstein. J'ai choisi ici de parler du théorème de Church car ce dernier a historiquement forcé une formalisation de ce type.

On se trouve donc dans une situation déroutante. Il semble qu'on ait à choisir entre les deux possibilités suivantes : soit la théorie tabulaire de Wittgenstein n'est pas une théorie formelle, soit elle l'est mais alors on doit implicitement voir les tautologies comme des énoncés non-tautologiques dans une théorie des ensembles. Ceci est d'autant moins satisfaisant que l'axiomatisation de la théorie des ensembles est largement arbitraire et sujette à des modes. On pourrait peut-être dans les considérations précédentes réduire la théorie des ensembles à une théorie de l'arithmétique, qui suffirait probablement pour parler d'une théorie du premier ordre en numérotant les énoncés. Cependant, les axiomes de l'arithmétique (à la Peano, par exemple) ne sont pas moins arbitraires.

Il est intéressant de remarquer que dans l'approche aux mathématiques de Frege et plus tard de Russell, des énoncés ensemblistes faisaient partie des tautologies. C'est le fameux paradoxe de Russell qui ruina l'espoir de pouvoir pratiquer une théorie des ensembles naïve, dont les énoncés pourraient être vus comme des tautologies.

Il semble ainsi que la notion de tautologie n'est pas facile à circonscrire. La remarque de Russell reproduite en exergue souligne cette difficulté.

Je voudrais maintenant rappeler quelques points de mon précédent exposé sur les '…' des *présupposés tacites*. Nous avons vu pendant cet exposé qu'il semble impossible de se défaire de présupposés tacites sur la pratique de l'arithmétique (ou plus généralement, des opérations ensemblistes) lorsqu'on met en place un système d'axiomes dans une présentation alphabétique moderne. Par ailleurs, la tautologie semble suspecte, comme nous avons vu plus haut, car lorsqu'on tente de la formaliser, on est contraint de la voir comme un énoncé 'positif' en théorie des ensembles. Cela suggère que que la nature tautologique d'une tautologie provient précisément de sa parenté avec la théorie des ensembles : une tautologie reflète une pratique, un présupposé tacite sur une manière de faire. De ce fait, il est aussi difficile de donner une justification formelle de la forme d'une tautologie qu'il est difficile de démontrer la consistance de l'arithmétique de Peano : on atteint ici la frontière entre formalisme et usage. Les tautologies ont de ce fait une 'signification' universelle mais qui ne peut être *dite*.

Je voudrais maintenant parler d'un autre point de la théorie du Tractatus, qui est discuté en détail dans le livre de E. Anscombe, 'An introduction to Wittgenstein's tractatus'. Il s'agit des notions de *proposition élémentaire* et de *nom*. Je reproduis ici un passage du Tractatus qui concerne ces dernières :

'4.21 Der einfachste Satz, der Elementarsatz, behauptet das Bestehen eines Sachverhaltes.

4.211 Ein Zeichen des Elementarsatzes ist es, dass kein Elementarsatz mit ihm in Widerspruch stehen kann.

4.22 Der Elementarsatz besteht aus Namen. Er ist ein Zusammenhang, eine Verkettung, von Namen.

4.221 Es ist offenbar, dass wir bei der Analyse der Sätze auf Elementarsätze kommen müssen, die aus Namen in unmittelbarer Verbindung bestehen. Es frägt sich hier, wie kommt der Satzver- band zustande.

4.2211 Auch wenn die Welt unendlich komplex ist, so dass jede Tatsache aus unendlich vielen Sachverhalten besteht und jeder Sachverhalt aus unendlich vielen Gegenständen zusammengesetzt ist, auch dann müsste es Gegenstände und Sachverhalte geben.

4.23 Der Name kommt im Satz nur im Zusammenhange des Elementarsatzes vor.'

À lire ces énoncés, on pourrait être tenté de voir les propositions élémentaires comme des 'énoncés d'observation simples' ('simple observation statement'), qui seraient formés à partir des 'sense-data' des positivistes logiques du cercle de Vienne. C'est l'interprétation qu'en donne par exemple C. Popper. Par exemple, l'énoncé 'Ceci est une tache rouge' serait un énoncé élémentaire. Cependant, comme E. Anscombe le remarque, ceci contredirait un autre passage du Tractatus :

'In the second place, the kind of example that comes most readily to mind, 'This is a red patch', can be proved not to be an elementary proposition according to the Tractatus. For at 6.3751 we find in parenthesis : 'It is clear that the logical product of two elementary propositions can be neither a tautology nor a contradiction. The assertion that a point in the visual field is two different colours at the same time is a contradiction.' It follows directly from this that "This is a red patch" cannot be an elementary proposition.'

et de manière plus générale :

'Indeed, quite generally, if elementary propositions are simple observation statements, it is very difficult to see how what Wittgenstein says here can possibly hold good of them ;

for, for any proposition which could reasonably be called a 'simple observation statement', one could find another that would be incompatible with it and be precisely analogous to it logically. Therefore, whatever elementary propositions may be, they are not simple observation statements ; and this accounts for the lack of reference to observation in all the remarks concerning elementary propositions ; which would surely be very strange if Popper's interpretation were the correct one.'

Que sont alors les propositions élémentaires ?

Il semble que dans le Tractatus, Wittgenstein raisonne qu'il doit exister des propositions élémentaires pour des raisons purement logiques. Un de ses arguments provient de la théorie tabulaire des tautologies ; dans cette théorie, on établit la véracité d'une proposition tautologique à partir d'autres propositions qui sont considérées comme indépendantes dans le calcul tabulaire (puisqu'on vérifie que la proposition est tautologique en attribuant toutes les valeurs de vérité possibles aux propositions constituantes). Toute proposition devrait donc pouvoir se décomposer en propositions mutuellement indépendantes, sans quoi le calcul tabulaire n'aurait pas de sens. Son idée est que l'indépendance des propositions, qui est latente dans la théorie tabulaire, doit être réalisée à un certain moment dans l'arbre logique. Il est effectivement vrai qu'en logique propositionnelle, tout système d'axiomes peut être remplacé par un système d'axiomes mutuellement indépendant (cf ex. 1.2.18, 1.2.19 dans Chang-Keisler). Cet argument devient cependant problématique si l'on se place dans la cadre de la logique du premier ordre avec quantificateurs, où ce type de résultat ne semble pas exister (?).

On voit qu'il doit être difficile d'exhiber des propositions élémentaires. C'est ce dont se plaint Wittgenstein dans ses carnets ! Ce type de difficulté apparaît déjà sous une forme différente dans la pensée de Leibniz.

Revenons maintenant sur d'autre assertions de Wittgenstein au sujet des propositions élémentaires. Il affirme plus haut que

'4.221 Es ist offenbar, dass wir bei der Analyse der Sätze auf Elementarsätze kommen müssen, die aus Namen in unmittelbarer Verbindung bestehen. Es frägt sich hier, wie kommt der Satzver- band zustande.'

Les noms sont ainsi fondamentalement liés au propositions élémentaires, qui sont leur point d'entrée dans le langage. L'existence des noms et leur utilisation apparaît dans la critique par Wittgenstein de la 'théorie des descriptions' de Russell mais nous ne parlerons pas de cette critique ici. Les noms sont le point de contact du langage avec le monde. Le sens ('Sinn') d'un nom est son référent dans le monde. Ainsi, s'il est difficile d'exhiber une proposition élémentaire, il est du même coup difficile d'exhiber des noms.

On se trouve ainsi dans la situation suivante. La proposition élémentaire et la tautologie sont deux extrêmes du spectre logique ; la première est le point d'ancrage du langage sur la monde et la deuxième ne dit rien sur le monde mais cette vacuité ne peut être dite et on a vu plus haut que la notion de tautologie est formellement difficile à justifier. Par ailleurs, on vient de voir qu'il est difficile d'exhiber une proposition élémentaire et par delà, d'exhiber des noms.

Il semble ainsi que l'on ne puisse énoncer que des tautologies. Ce constat peut sembler fort insatisfaisant de prime abord, car on ne voudrait pas être condamné à ne pouvoir rien dire sur le monde. Cependant, comme rappelé à l'instant, la vacuité de la tautologie ne peut être 'dite' et les tautologies reflètent un usage, une pratique et de ce fait sont au centre même de notre relation avec le monde.

Ceci suggère un nouveau point de vue sur la vieille question du statut des objets mathématiques, et par delà sur l'empirisme.

Cette question est : de quelle nature sont les objets de la connaissance mathématique ? Il semble qu'ils ne soient pas de nature empirique, ie connus par l'intermédiaire des sens. Faut-il alors supposer l'existence d'une réalité secondaire suprasensuelle auquel le mathématicien aurait accès ? Classiquement, on propose la solution 'platoniste' (au sens d'un article classique P. Bernays), encore appelée réaliste, qui consiste à affirmer qu'il existe des objets mathématiques en dehors du monde sensible et la solution nominaliste, qui consiste à affirmer que les mathématiques ne sont qu'un jeu formel.

Cette alternative est annulée si on ne peut énoncer que des tautologies. En effet, si on se trouve ainsi contraint, il semble difficile de distinguer un énoncé mathématique d'un énoncé empirique. Les énoncés mathématiques, tout comme tous les énoncés empiriques, ne disent rien mais pourtant de ce fait 'disent tout' (ce qui ne veut rien dire. . .).

Il est intéressant de revenir sur les difficultés de l'approche logiciste aux fondements des mathématiques à la lumière de cette idée. Il est bien sûr impossible de discuter ici ces difficultés dans le détail. Rappelons cependant les points suivants :

– Frege faisait usage d'une théorie naturelle des ensembles dans sa nouvelle logique et l'inconsistance de cette théorie fut mise en lumière par le paradoxe de Russell.
– Pour résoudre ce problème, Russell introduit la théorie des types. Cependant, cette théorie rend la description des nombres réels très malaisée et demande une rigueur formelle dans les énoncés ensembliste qui ne correespond pas à la pratique mathématique.
– Une théorie des ensembles satisfaisante (ne demandant pas l'usage de la théorie des

types) est proposée par E. Zermelo en 1908. Cependant, d'un point de vue logiciste, cette théorie contient beaucoup d'axiomes arbitraires.

Ceci nous mène à l'idée suivante. Les difficultés à fonder les mathématiques de manière logiciste reflètent 'l'indicibilité' de la vacuité de la tautologie, qui est justement ce qui fait que la tautologie 'dit quelque chose sur le monde' (cf. citation supra). Cette difficulté est ainsi plutôt satisfaisante et c'est peut-être justement là qu'il faut chercher un nouveau point de vue sur l'assertion de Kant que les mathématiques sont constituées d'énoncés synthétiques a priori.

On rappelle à nouveau quelques points classiques :

– Kant fondait sa distinction en analytique et synthétique sur la logique aristotélicienne. Une énoncé analytique était selon lui de manière un peu vague un énoncé où 'le prédicat contient le sujet' et un énoncé synthétique est un un énoncé non analytique.
– Les énoncés mathématiques sont en général à la fois synthétiques et a priori, ie non empiriques.
– La raison à cela est que les énoncés mathématiques, ie les énoncés géométriques et arithmétiques (selon Kant) sont spatiaux et temporels et que l'espace et le temps sont des 'formes a priori de l'intuition'.

On soulignera maintenant qu'il y a une analogie entre le point de vue de Kant et celui que nous avons dégagé ci-dessus. En effet, la tautologie ne dit rien sur le monde tout comme le temps et l'espace ne sont pas des objets d'expérience selon Kant. Par ailleurs, la vacuité indicible de la tautologie dit quelque chose sur le monde et cela peut-être interprété comme son aspect synthétique. Pour dire les choses plus concrètement : le fait que les axiomes de la théorie des ensembles sont en fin de compte arbitraire est peut-être précisément l'aspect synthétique des mathématiques.

On peut aller encore plus loin dans l'analogie avec le point de vue Kantien si on se souvient de la distinction que nous avions faite dans le premier exposé entre 'pratique de comptage' et 'pratique géométrique'. Les tautologies de la logique du premier ordre que nous avons examinées plus haut sont associées à des pratiques de comptage. Dans le cadre euclidien, on pourrait aussi introduire des tautologies associées à la pratique géométrique mais ce type de tautologie n'a jamais été considéré historiquement, à ma connaissance. Si on croit à ce type de tautologie, on peut compléter l'analogie avec le point de vue Kantien en introduisant de plus la distinction entre l'espace et le temps.