Le problème des '...'

Damian RÖSSLER *

18 mars 2014

Résumé : Nous allons examiner certains aspects de la présentation standard des théories logiques du premier ordre dans le cadre général de la réflexion de Wittgenstein sur les règles. En particulier, nous allons nous interroger sur l'interprétation qu'il faut donner au '...' qui apparaissent dans la description des schémas d'axiomes.

Dans cet exposé, nous allons examiner la présentation standard des théories logiques du 1er ordre (que l'on trouve dans la plupart des introductions à la logique mathématique) à la lumière des remarques de Wittgenstein sur les règles et sur le problème de l'auto-référence.

Nous reproduisons ci-dessous la définition du système formel de la logique propositionelle telle qu'elle est donnée dans le livre de A-G Hamilton, 'Logic for mathematicians".

Definition 2.1 *The formal system L of statement calculus is defined by the following :*

1. Alphabet of symbols (infinite) :

$, -, (,), p_1, p_2, p_3, \ldots$

2. Set of wfs. Instead of specifying the set explicitly we give an inductive rule in three parts (see Definition 1.2) :
(i) p_i is a well-formed formula for each $i \geqslant 1$.
(ii) If A and B are wfs. then $(-A)$ and $(A \to B)$ are wfs.
(iii) The set of all wfs. is generated by (i) and (ii).

3. Axioms. There are infinitely many axioms, so we cannot list them all. However we can specify all of them by means of three axiom schemes. For any wfs. A, B, C the following wfs. are axioms of L :

*Institut de Mathématiques, Equipe Emile Picard, Université Paul Sabatier, 118 Route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 9, FRANCE, E-mail : rossler@math.univ-toulouse.fr

(L1) $(A \to (B \to A))$
(L2) $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$
(L3) $(((-A) \to (-B)) \to (B \to A))$
Note that each axiom scheme has infinitely many 'instances', as A, B, C range over all wfs. of L.

4. Rules of deduction. In $\mathcal{L}$ there is only one rule of deduction, namely modus ponens (abbreviated by MP*). It says : from A and $(A \to B)$, B is a direct consequence, where A and B are any wfs. of L.*

Les systèmes du premier ordre définissant les théories mathématiques sont définis de manière toute semblable. Pour les définir, on introduit en plus des symboles pour des relations n-aires ainsi que des symboles de variables et le quantificateur universel $\forall$, puis on donne une liste d'axiomes supplémentaires, spécifiques à la théorie.

Voici un certain nombres de présupposés tacites qui sont faits dans la définition 2.1 :

(a) On suppose que le lecteur comprend ce qu'est un nombre naturel (les '...' dans la liste des symboles).
(b) On suppose que lecteur a connaissance de la totalité des formules bien formées [les 'wfs'] ('For any wfs....').
(c) Le lecteur comprend tacitement ce que veut dire 'extraire trois formules de la totalité des formules et en fabriquer une autre à partir de celles-ci'.

On peut chercher à formaliser ces présupposés en introduisant d'abord un système formel du 1er ordre décrivant les nombres naturels (par ex. le système de Peano), ou peut-être même un système décrivant une théorie des ensembles (comme Zermelo-Fränkel).

Une fois ce système introduit, on peut décrire formellement les symboles comme étant les éléments d'un ensemble et l'énumération par les nombres naturels est décrite dans le cadre d'une axiomatique de $\mathbf{N}$. C'est ce qui est fait lorsqu'on démontre des théorèmes concernant les systèmes formels du 1er ordre, comme le théorème d'incomplétude de l'arithmétique de Gödel.

Cependant, on se retrouve alors face au même problème : le nouveau système formel demande dans sa définition une compréhension tacite des présupposés (a), (b), (c). On peut essayer de réduire l'ampleur de cette hypothétique tacite en cherchant à introduire un système formel descriptif dans lequel les hypothèses tacites sont de moindre envergure que dans le système décrit. Une tentative de ce type est faite dans la « preuve » de la consistance de l'arithmétique de Peano donnée par G. Gentzen. Il introduit un système formel descriptif dont l'axiomatique est plus faible que celle de Peano. De manière générale, le problème des présupposés tacites est ancré dans toute tentative de démonstration de la consistance d'une théorie de l'arithmétique ou d'une théorie des ensembles : la démonstration de la consistance demandera nécessairement une compréhension tacite des nombres naturels et des ensembles.

Il est important ici de ne pas confondre deux problématiques :

(1) le fait qu'il est nécessaire de faire des présupposés tacites du type (a),(b),(c) lorsqu'on décrit un système formel

(2) le fait qu'il est nécessaire de démontrer la consistence de l'arithmétique de Peano avant de pouvoir s'en servir pour démontrer sa consistence, ce qui n'est pas satisfaisant

En effet, (2) est un problème technique (qui peut être partiellement résolu, comme dans le travail de Gentzen) alors que (1) est un problème de nature épistémologique.

Voici un passage des 'Remarques sur les fondements des mathématiques' (BGM I.4) de Wittgenstein qui nous semble intéressant dans ce contexte. Il a la forme d'un dialogue socratique.

'Worin liegt eigentlich aber die eigentümliche Unerbittlichkeit der Mathematik ? Wäre für sie nicht ein gutes Beispiel die Unerbittlichkeit, mit der auf zwei eins folgt, auf zwei drei usw. ? - Das heisst doch wohl : in der Kardinalzahlenreihe folgt ; denn in einer anderen Reihe folgt etwas anderes. Und ist denn diese Reihe nicht eben durch diese Folge *definiert* ? - Soll das also heissen, dass es gleich richtig ist, auf welche Weise immer einer zählt, und dass jeder zählen kann, wie er will ? - Wir würden es wohl nicht "zählen" nennen, wenn jeder *irgendwie* Ziffern nacheinander ausspräche ; aber es ist freilich nicht einfach eine Frage der Benennung. Denn das, was wir "zählen" nennen, ist ja ein wichtiger Teil der Tätigkeiten unseres Lebens. Das Zählen, und Rechnen, ist doch - z. B. - nicht einfach ein Zeitvertreib. Zählen (und das heisst : *so* zählen) ist eine Technik, die täglich in den mannigfachsten Verrichtungen unseres Lebens verwendet wird. Und darum lernen wir zählen, wie wir es lernen : mit endlosem Üben, mit erbarmungsloser Genauigkeit ; darum wird unerbittlich darauf gedrungen, dass wir Alle auf "eins", "zwei" "drei" sagen usf. - Aber ist dieses zählen also nur ein *it Gebrauch* ; entspricht dieser Folge nicht auch eine Wahrheit ? - Die *Wahrheit* ist, dass das Zählen sich bewährt hat.- Willst du also sagen, dass *wahr-sein* heisst : brauchbar (oder nützlich) sein ? - Nein : sondern, dass man von der natürlichen Zahlenreihe - ebensowie von unserer Sprache - nicht sagen kann, sie sei wahr, sondern : sie sei brauchbar und, vor allem, *sie werde verwendet*.'

'Où réside en fait alors l'inflexibilité particulière des mathématiques ? L'inflexibilité avec laquelle deux suit un, trois, deux etc ne serait-elle pas un bon exemple de cette inflexibilité ? - Cela signifie bien : 'suit' dans l'énumération des nombres cardinaux ; car dans une autre énumération, c'est autre chose qui suit. Et est-ce que cette énumération n'est pas justement *définie* par cette suite ? - Est-ce que cela est sensé signifier, que cela sera immédiatement correct, quelle que soit la manière de compter, et que chacun peut compter comme il veut ? - Nous ne l'appellerions pas "compter", si chacun exprimait *d'une manière quelconque* des chiffres les uns après les autres ; mais ce n'est pas, je l'admets, une question de terminologie. Car ce que nous appelons "compter" est bien une partie importante de notre vie. Le comptage, et le calcul, n'est bien - par exemple - pas une manière de passer le temps. Compter (et cela signifie : compter *ainsi*) est une technique, qui est utilisée quotidiennement dans les circonstances les plus variées de notre vie. Et c'est pour cela que nous comptons, comme nous l'apprenons : par un entraînement sans fin, avec une précision impitoyable ; c'est à cause de cela qu'on insiste de manière rigide que nous disions tous "deux" "trois" après "un" et ainsi de suite - Cependant, ce comptage n'est alors qu'un *usage* ; est-ce qu'une vérité correspond à cette suite ? - Cette *vérité* est que le comptage a fait ses preuves. - Veux-tu donc dire, que *être vrai* veut dire : être utilisable (ou utile) ? - Non : mais bien que l'on ne peut dire - tout comme de notre langage - de l'énumération des nombres naturels qu'elle est vraie mais que : elle est utilisable et, avant tout *que l'on s'en sert*.' [Trad. DR]

Ce passage de Wittgenstein décrit un certain point de vue sur la problématique (1).

Il insiste sur le fait que lorsqu'on fait des présupposés tacites comme (a), (b), (c), ces présupposés sortent du cadre de la vérité proprement dite, ie des énoncés vrais ou faux. En effet, ces présupposés sont tacites, ie qu'il sont des 'non-dits'. Il ne s'agit pas d'énoncés que l'on suppose vrais pour des raisons arbitraires. Les présupposés (a), (b), (c), tels qu'il apparaissent textuellement plus haut, sont bien plus des métaphores pour une certaine pratique, un certain usage. Cet usage doit contraindre l'usager du système formel décrit. C'est cette contrainte qui est la 'Unerbittlichkeit' des mathématiques.

Il est intéressant de remarquer qu'effectivement les mathématiques semblent être l'endroit où on est contraint de pouvoir se mettre d'accord, contrairement à d'autres domaines du discours. Deux mathématiciens qui discutent d'un problème mathématique peuvent être en désaccord sur les méthodes à appliquer pour le résoudre. Cette divergence de point de vue peut d'ailleurs être profonde. Cependant, si l'un d'entre eux découvre une solution du problème discuté, l'autre acceptera ce fait et s'intéressera probablement à la solution.

Un exemple, que je mentionne pour donner un peu de couleur à l'exposé, est l'hypothèse de Riemann sur les corps finis. Cette conjecture, formulée par Weil, concerne le nombre des solutions d'équations Diophantiennes sur les corps finis. Il s'agit d'un énoncé en fin de compte combinatoire mais dont le cadre est géométrique. À la fin des années cinquante, deux points de vue opposaient l'école française (avec Grothendieck, Deligne...) et le reste de la communauté mathématique, en particulier des mathématiciens comme Siegel, Davenport, Mordell et même le jeune Bombieri. Selon l'école française, à la suite des idées de Weil, il fallait renouveler la notion de topologie, définir une nouvelle cohomologie (la cohomologie l-adique) et travailler avec cette dernière pour résoudre la problème. Cela demandait un arsenal théorique important, en particulier catégorique. Les mathématiciens de la vieille école pensaient en revanche que l'on devait pouvoir résoudre un problème combinatoire et concret avec des méthodes du même type. Il s'avère cependant que le point de vue de l'école française a prévalu, car il a effectivement mené à la solution. Bombieri, qui était resté très attaché à l'idée d'un solution élémentaire, est par la suite (avec Stepanov) parvenu à trouver une solution élémentaire, dans le cas des courbes. Ne parvenant pas à trouver une solution élémentaire générale, il a fini par voir l'avantage de l'usage des théories de cohomologie : j'ai moi-même assisté à un exposé de ce dernier sur ce thème.

Ce type de comportement n'est pas comparable à celui des économistes ou des historiens, par exemple, qui peuvent ne jamais se mettre d'accord sur un problème.

Il est intéressant que cette contrainte soit une contrainte d'usage et non de forme. Je cite encore Wittgenstein (BGM I. 51) :

'Du gibst *das* zu - dann musst du *das* zugeben. - Er *muss* es zugeben - und dabei ist es möglich, dass er es nicht zugibt ! Du willst sagen : "wenn er *denkt*, muss er es zugeben." Ich werde dir zeigen, warum du es zugeben musst. - Ich werde dir einen Fall vor Augen führen, wenn du ihn bedenkst, dich bestimmen wird, so zu urteilen.'

'Si tu admets *cela* - alors tu dois admettre *cela*. Il *doit* l'admettre - et pourtant [dabei] il est possible, qu'il ne l'admette pas ! Tu veux dire : "si il *pense*, alors il doit l'admettre." Je vais te montrer, pourquoi tu dois l'admettre. - Je vais t'amener [führen] un cas [Fall] devant les yeux, qui te mènera à juger ainsi, si tu y réfléchis.' [Trad. DR]

Revenons aux présupposés (a), (b), (c). Qu'est-ce qu'un 'nombre naturel' *en pratique* ? Il s'agit dans notre cas d'un moment d'un acte mécanique de comptage d'une suite de formules écrites dans un alphabet fixé, rangées sur des lignes horizontales. Qu'est que 'la totalité des formules bien formées' *pratique* ? Il s'agit pour l'essentiel de notre capacité opérative avec les formules, telle que décrite dans le présupposé (c) : à partir de formules données sur le papier, en former d'autres sur la papier. La totalité des formules est *en pratique* l'ensemble des formules données sur le papier, avec lesquelles nous travaillons.

Il est frappant que dans cette pratique, l'opération de comptage, de dénombrement, semble omniprésente : les formules elles-mêmes sont des suites de lettres, elles sont rangées dans un ordre linéaire, les '...' dans la description font référence à un dénombrement et les opérations sont des opérations de juxtaposition sur l'axe linéaire d'écriture. Toute la description du système formel est enracinée dans la pratique du dénombrement. Cette dernière contraint le lecteur.

La description d'une théorie mathématique via un système formel est standard à notre époque. Aucune autre description ne semblerait acceptable. Il est vrai que dans les livres de mathématiques, on trouve rarement des systèmes formels complets mais la présentation a toujours cette possibilité en vue.

Il est intéressant d'examiner un texte de mathématiques de l'antiquité classique avec le même point de vue. Quelle tension entre formalisme et pratique y-a-t-il dans les éléments d'Euclide, par exemple ? On ne peut bien sûr donner rapidement une réponse détaillée à cette question mais je vais me borner à un examen superficiel, mon but étant de souligner un contraste.

Je reproduis ici les deux premières pages des éléments d'Euclide, ainsi que la preuve de la proposition I, dans la traduction classique de T. Heath.

BOOK I.

DEFINITIONS.

1. A **point** is that which has no part.

2. A **line** is breadthless length.

3. The extremities of a line are points.

4. A **straight line** is a line which lies evenly with the points on itself.

5. A **surface** is that which has length and breadth only.

6. The extremities of a surface are lines.

7. A **plane surface** is a surface which lies evenly with the straight lines on itself.

8. A **plane angle** is the inclination to one another of two lines in a plane which meet one another and do not lie in a straight line.

9. And when the lines containing the angle are straight, the angle is called **rectilineal**.

10. When a straight line set up on a straight line makes the adjacent angles equal to one another, each of the equal angles is **right**, and the straight line standing on the other is called a **perpendicular** to that on which it stands.

11. An **obtuse angle** is an angle greater than a right angle.

12. An **acute angle** is an angle less than a right angle.

13. A **boundary** is that which is an extremity of anything.

14. A **figure** is that which is contained by any boundary or boundaries.

15. A **circle** is a plane figure contained by one line such that all the straight lines falling upon it from one point among those lying within the figure are equal to one another ;

16. And the point is called the **centre** of the circle.

17. A **diameter** of the circle is any straight line drawn through the centre and terminated in both directions by the circumference of the circle, and such a straight line also bisects the circle.

18. A **semicircle** is the figure contained by the diameter and the circumference cut off by it. And the centre of the semicircle is the same as that of the circle.

19. **Rectilineal figures** are those which are contained by straight lines, **trilateral** figures being those contained by three, **quadrilateral** those contained by four, and **multilateral** those contained by more than four straight lines.

20. Of trilateral figures, an **equilateral triangle** is that which has its three sides equal, an **isosceles triangle** that which has two of its sides alone equal, and a **scalene triangle** that which has its three sides unequal.

21. Further, of trilateral figures, a **right-angled triangle** is that which has a right angle, an **obtuse-angled triangle** that which has an obtuse angle, and an **acute-angled triangle** that which has its three angles acute.

22. Of quadrilateral figures, a **square** is that which is both equilateral and right-angled; an **oblong** that which is right-angled but not equilateral; a **rhombus** that which is equilateral but not right-angled; and a **rhomboid** that which has its opposite sides and angles equal to one another but is neither equilateral nor right-angled. And let quadrilaterals other than these be called **trapezia**.

23. **Parallel** straight lines are straight lines which, being in the same plane and being produced indefinitely in both directions, do not meet one another in either direction.

POSTULATES.

Let the following be postulated:

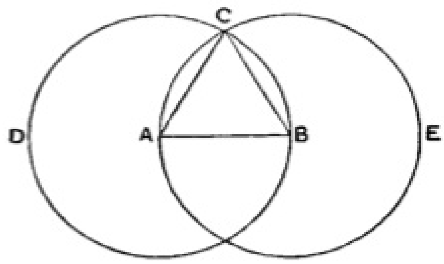
1. To draw a straight line from any point to any point.
2. To produce a finite straight line continuously in a straight line.
3. To describe a circle with any centre and distance.
4. That all right angles are equal to one another.

PROPOSITION I.

On a given finite straight line to construct an equilateral triangle.

Let AB be the given finite straight line.

Thus it is required to construct an equilateral triangle on the straight line AB.



With centre A and distance AB let the circle BCD be described; [Post. 3]
again, with centre B and distance BA let the circle ACE be described; [Post. 3]
and from the point C, in which the circles cut one another, to the points A, B let the straight lines CA, CB be joined. [Post. 1]

Now, since the point A is the centre of the circle CDB,

AC is equal to AB. [Def. 15]

Again, since the point B is the centre of the circle CAE,

BC is equal to BA. [Def. 15]

But CA was also proved equal to AB;
therefore each of the straight lines CA, CB is equal to AB.

And things which are equal to the same thing are also equal to one another; [*C. N.* 1]

therefore CA is also equal to CB.

Therefore the three straight lines CA, AB, BC are equal to one another.

Quels sont les présupposés tacites de la première page ? Il y en a beaucoup mais je vais en mentionner quelques uns :
(a′) Le lecteur comprend ce qu'est l'équidistance.
(b′) Le lecteur comprend ce que veut dire 'une figure est contenue dans une autre'
(c′) Le lecteur comprend ce que veut dire 'un angle est plus grand qu'un autre'.
(d′) Les notions géométriques sont invariantes par translation.
(e′) ...
D'un point de vue moderne, Euclide semble par exemple présupposer tacitement le théorème de la courbe de Jordan ('Le complément d'une courbe simple fermée est la réunion disjointe de deux ouverts, dont l'un est borné').

Il est bien sûr possible de compléter l'axiomatique euclidienne de manière à expliciter plusieurs de ces présupposés tacites. C'est ce qui est fait dans les 'Grundlagen der Geometrie' de Hilbert et par ailleurs plusieurs auteurs postérieurs à Euclide ont cherché à compléter son système.

Examinons maintenant la preuve de la proposition I. On voit qu'il y est fait appel à un dessin, qui doit illustrer 'génériquement' la construction à faire. Cette généricité prend ici la place des '...' qui apparaissent dans le système formel évoqué plus haut.

Il est intéressant qu'ici, les présupposés tacites n'ont largement rien à voir avec le comptage alors qu'une présentation axiomatique complètement moderne de la géométrie euclidienne la ramènerait à un système formel comme plus haut, où les présupposés tacites ne concerneraient plus que le dénombrement et la juxtaposition de formules.

Il semble donc qu'il ait une ambigüité dans la définition de la circonscription des mathématiques, car la pratique sous-jacente n'est pas de même nature dans l'entreprise euclidienne et dans l'entreprise moderne.

Essayons de préciser le problème. D'un point de vue moderne, la pratique euclidienne est fondée partiellement sur des hypothèses tacites et le fait de ne pas les mentionner explicitement peut mener à des contradictions dans l'arbre déductif des théorèmes, ie des inconsistances. Le problème serait donc que *en pratique* on pourrait se retrouver face à des non-sens.Considérons maintenant la présentation moderne de l'axiomatique des nombres naturels à la Peano. Je reproduis ici le passage correspondant du livre de A-G Hamilton, 'Logic for mathematicians' :

0 *is a natural number.*

For each natural number n*, there is another natural number* n'.

For no natural number n *is* n' *equal to* 0.

For any natural numbers m and n, if $m' = n'$ then $m = n$.

For any set A of natural numbers containing 0, if $n' \in A$ whenever $n \in A$, then A contains every natural number.

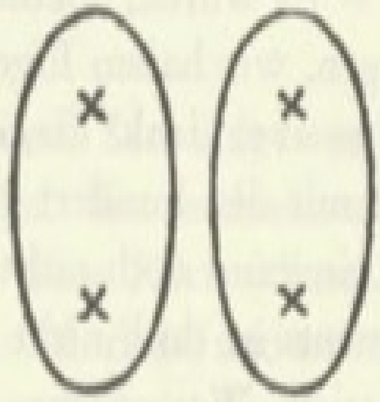
Ce système est-il consistant ? Nous avons évoqué ce problème plus haut : on ne peut approcher ce problème sans faire des hypothèses tacites de comptage et en particulier en supposant que dans la pratique l'arithmétique de Peano ne mènera pas à des non-sens.

On voit que le problème de la consistance en pratique ne disparait pas dans l'approche moderne. La contribution moderne est de transférer la pratique de la manipulation des figures à la pratique des opérations de comptage et de juxtaposition. Dans les deux cas, on a donc une pratique, des axiomes et une capacité pratique de déduction. Les pratiques diffèrent mais il ne serait pas honnête de prétendre que la pratique euclidienne est fondamentalement déficiente à cause de ses présupposés tacites, car elle fait face à la même problématique de consistance pratique que les axiomes de Peano.

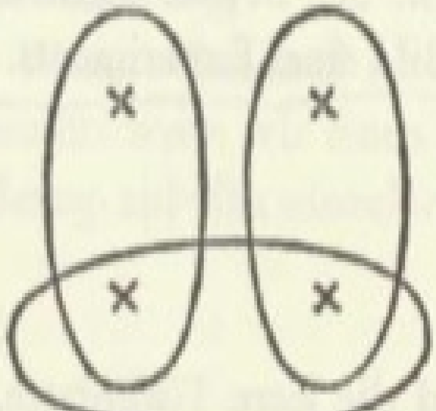
On peut en fait voir la géométrie euclidienne et l'arithmétique de Peano comme deux mondes épistémologiquement isolés l'un de l'autre : d'un côté, on a la géométrie euclidienne, qui se décrit elle-même par des 'figures génériques' et de l'autre l'arithmétique de Peano, qui se décrit elle-même par des suites de lettres et des '...'. Il semble que le seul pont entre ces deux mondes soit le langage naturel, qui apparaît à la fois dans Euclide et dans la présentation des axiomes de Peano que j'ai reproduite plus haut.

Ici encore, Wittgenstein avait vu le fait que ce que nous concevons comme une démonstration n'est pas nécessairement de nature linguistico-formelle. Voici un passage de BGM (BGM I.38) :

38. »Du brauchst ja nur auf die Figur



zu sehen, um zu sehen, daß $2 + 2 = 4$ ist.« – Dann brauche ich nur auf die Figur



zu schauen, um zu sehen, daß $2 + 2 + 2 = 4$ ist.

En contemplant ces deux entités épistémologiques : la géométrie plane par les figures d'une part et l'arithmétique par les suites de lettres d'autre part, on est naturellement amené à se souvenir de l'idée Kantienne de la justification de la géométrie et de l'arithmétique par l'espace et le temps, vus comme formes a priori de l'intuition. On rappelle d'emblée que Wittgenstein semble rejeter cette idée dans le tractatus, qui est le seul endroit où l'on puisse dire que Wittgenstein - peut-être malgré lui - décrit une épistémologie. Avant de parler de l'idée de Kant dans ce contexte, il est intéressant de rappeler les points historiques suivants :

- La découverte des géométries non-euclidiennes (Gauss, Lobatchevsky, Bolyai) invalide aux yeux de beaucoup l'idée Kantienne du caractère a priori de l'espace.
- En revanche, le caractère a priori du temps n'est pas remis en cause et de fait l'arithmétique est vue par beaucoup (par exemple Gauss, Lettre au père de Bolyai, 1832, citée dans Detlefsen, 'Philosophy of Mathematics in the Twentieth Century') comme 'plus sûre' que la géométrie.
- C'est dans ce contexte que Frege puis Russell tentent de développer leur approche logiciste au mathématiques : tout d'abord montrer que l'arithmétique peut-être fondée sur des principes purement logiques, ce qui lui donne un caractère a priori différent de celui de Kant, puis étendre cette approche (avec tous les problèmes que l'on connaît) pour décrire l'axe réel, et par delà, la géométrie et l'analyse.
- L'intuitionisme de Brouwer tente également de fonder l'activité mathématique sur une relation au temps seulement, ce qui lui donne une sorte d'accès a priori à l'arithmétique et il considère comme les logicistes que l'une des tâches majeures de l'intuitionisme est de donner une description de l'axe réel.

On voit que, pendant le 19ème siècle, la pratique géométrique s'efface progressivement devant la pratique arithmétique. Il est également clair qu'au début de la crise des fondements des mathématiques, la construction de l'axe réel semblait fort malaisée, si on insistait à se cantonner à l'arithmétique comme seul a priori.

Quel est la nature de ce malaise ? Pour le comprendre, on peut examiner le système des axiomes de la théorie des ensembles proposés en 1908 par E. Zermelo. Un système de ce type est nécessaire pour construire l'axe réel : il faut pouvoir autoriser l'opération 'ensemble puissance' par exemple. On peut en proposer des variantes mais quoi qu'il en soit, on ne peut construire l'axe réel qu'en introduisant des axiomes en théorie des ensembles qui vont au-delà de ceux de Peano pour les nombres naturels et qui semblent structurellement arbitraires. Il est naturel de trouver cela insatisfaisant : en effet, la pratique géométrique se pratique dans le contexte dans la géométrie plane et de même le comptage se pratique dans le contexte de problèmes arithmétiques. Pour pouvoir justifier d'abandonner la pratique géométrique, on voudrait pouvoir montrer que *la pratique* géométrique est en réalité contenue dans la pratique arithmétique. Mais c'est ici qu'on fait face à un problème apparemment inextricable : on peut décider de ne conserver que la pratique arithmétique mais seulement au prix de l'introduction d'axiomes qui semblent complètement déconnectés de cette pratique. On fait alors face de plus à un problème important de consistance pratique : comment justifier l'espoir que le système formel que l'on considère est consistant dans ses applications, si les axiomes ne sont ancrés dans aucune pratique 'légalement' identifiable ?

Ce problème n'est pas résolu à ce jour. Les mathématiciens ignorent simplement ce problème de consistance pratique.