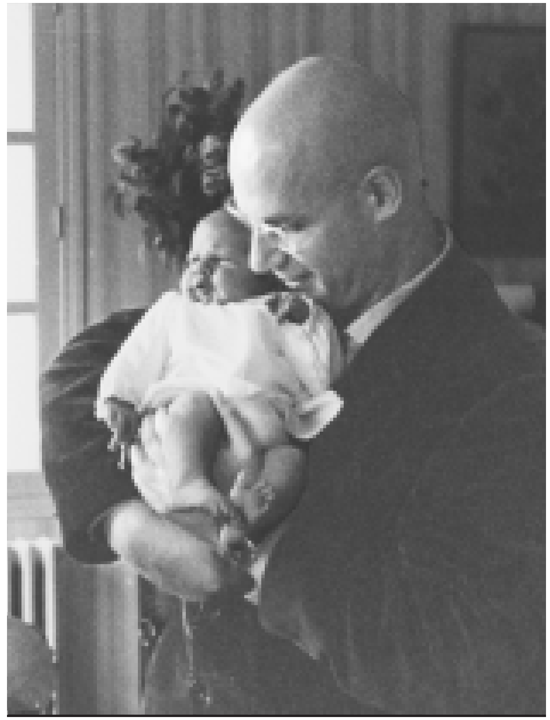
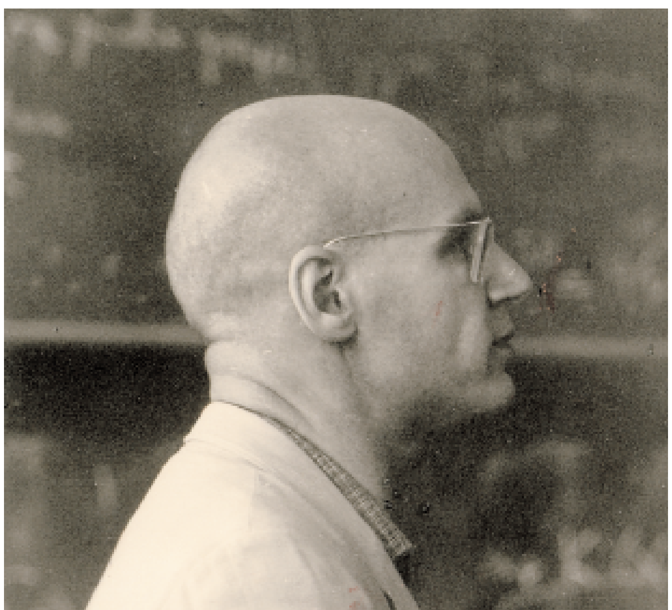
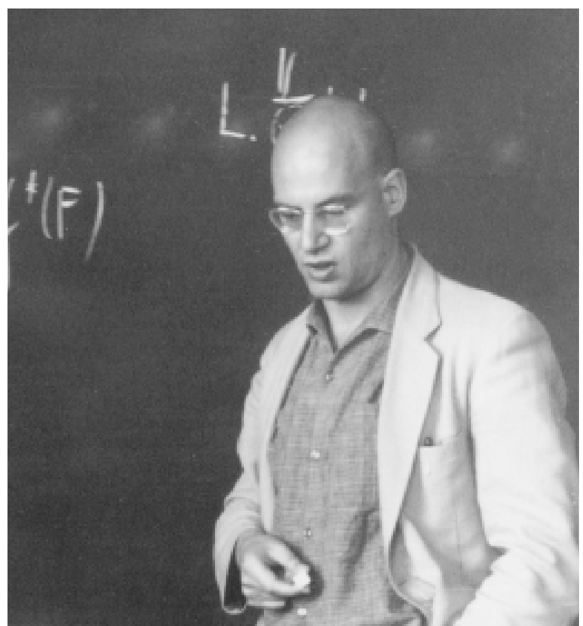
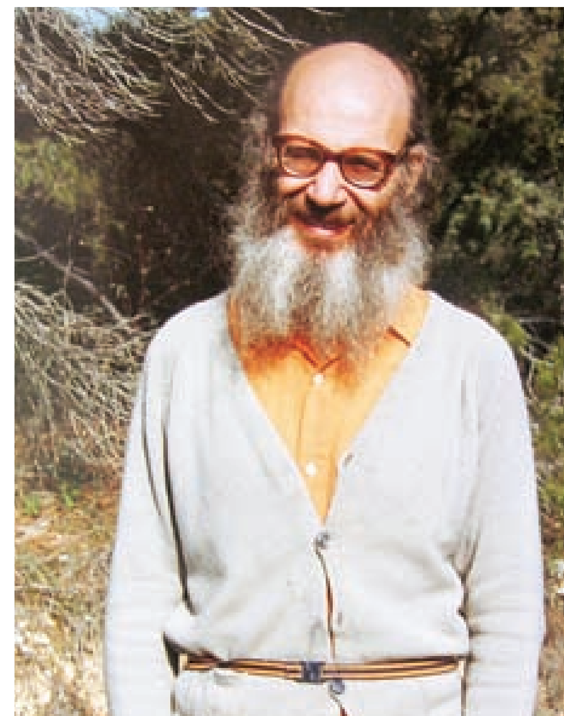
Grothendieck és matematikája









Grothendieck gyermek- és ifjúkora

- Berlinben születik 1928. március 28-án. Apja Alexander Shapiro, ukrán anarchista, anyja a berlini Johanna (Hanka) Grothendieck, újságíró és politikai agitátor
- 1933-ban szülei Párizsba menekülnek. Alexandert 1933 és 1939 között német mostohaszülők nevelik, akik 1939-ben szülei után küldik Párizsba
- 1940-42 között mindannyian börtöntáborokban. 1942-ben apját Auschwitzba toloncolják, ahol meggyilkolják
- 1942-45 között egy francia kisvárosban, Chambon-sur-Lignonban, egy intézetben él. Elvégzi a gimnáziumot
- 1945-48 között matematika szakos egyetemi hallgató Montpellier-ben. Az egyetemi előadásokra egyre kevésbé jár, ehelyett aprólékos munkával, segítség nélkül felfedezi a Lebesgue-integrálás teljes elméletét

Grothendieck: a karrier évei 1

- 1948-49: Párizsba kerül ösztöndíjjal, ahol Cartan szemináriumán bekerül a francia matematikai élet legaktívabb sodrába
- 1949-53: Nancy-ban a Bourbaki-csoport legnagyobbjaival dolgozik. Számos cikket ír funkcionálanalízisről, doktorátust szerez
- 1953-56: Sao Paulo-ban, majd a kansasi egyetemen tanít
- 1956-58: Párizsban újra, a Grothendieck-Riemann-Roch tétel
- 1958: A Nemzetközi Matematikai Kongresszuson nagy figyelmet keltő előadásban felvázolja a sémaelmélet elemeit és főbb tételeit

Grothendieck: a karrier évei 2

- 1958-tól 1970-ig az IHES professzora. Hihetetlen energiával és koncentrálással, napi 12 órát kutatással töltve, szemináriuma élén kidolgozza a sémaelméletet, a toposzelméletet és sok más irányt
- 1966: A Fields érmet nem veszi át a moszkvai Kongresszuson a Szovjetúnió elleni politikai tiltakozásként
- 1970: Tiltakozik az IHES katonai költségvetési támogatása ellen, lemond az IHES professzori székéről. Soha többet formális publikációt nem jegyez

Grothendieck: a matematikai karrier után

- 1970-75: A Survivre társadalmi-politikai mozgalom (*Mouvement international pour la survie de l'espèce humaine),* aszketikus falusi életmódra vált
- 70-es évek második fele: a Montpellier-i egyetemen tanít és szemináriumot vezet, de már nem a korábbi intenzitással
- 80-as évek: újra Párizsban, majd a Pirenneusokba költözik. A hosszú kéziratok írása
- 90-es évek: egyre kevesebb kapcsolat a külvilággal, spirituális írások
- Meghalt 2014. november 13-án

Grothendieck fontosabb matematikai és pszeudo-matematikai írásai

- *Publikált írások*
  - *Éléments de Géométrie Algébrique* (EGA, összesen 1+1+2+4 kötet) 1960-1964. **2000 oldal** (Dieudonné-val)
  - *Fondements de la Géométrie Algébrique (FGA), 1962.* **500 oldal**
  - *Séminaire Géométrie Algébrique* (SGA, összesen 8 kötet), 1960-as, 1970-es évek. **5000 oldal** (részben diákjai írták le)
- *Kéziratok*
  - *La Longue Marche à Travers la Théorie de Galois*, 1981. **1300 oldal**
  - *À la Pursuite des Champs*, 1983. **1500 oldal**
  - *Esquisse d'un Programme*, 1984. **50 oldal**
  - R*écoltes et semailles: Réflexions et témoignages sur un passé de mathématicien*, 1986. **1400 oldal**
  - *Les Dérivateurs*, 1990-es évek. **2000 oldal**

Számhalmazok a matematikában 1

- Egész számok

$$\mathbf{Z}=\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

- Racionális számok

$$\mathbf{Q}=\{m/n;\ m,n \text{ egész szám}\}$$

- mod-p számok (p prímszám)

$$\mathbf{F}_{\mathbf{p}}=\{0,1,\ldots, p\text{-}1 \bmod p\}$$

Diszkrét, felsorolható halmazok: **aritmetika**

Számhalmazok a matematikában 2

- Valós számok **R**
- Komplex számok

C={x + iy : x, y valós számok}

Folytonos, fel nem sorolható halmazok:

analízis és geometria

$$x^2 + y^2 = 1$$

Mi a megoldáshalmaz, ha (x,y) “számok”?

$x^2 + y^2 = 1$: racionális megoldások

$x=p/r$, $y=q/r$
p,q,r egész számok

$$p^2 + q^2 = r^2$$

“Diofantikus” egyenlet.
Megoldásai: pitagoraszi számhármasok!

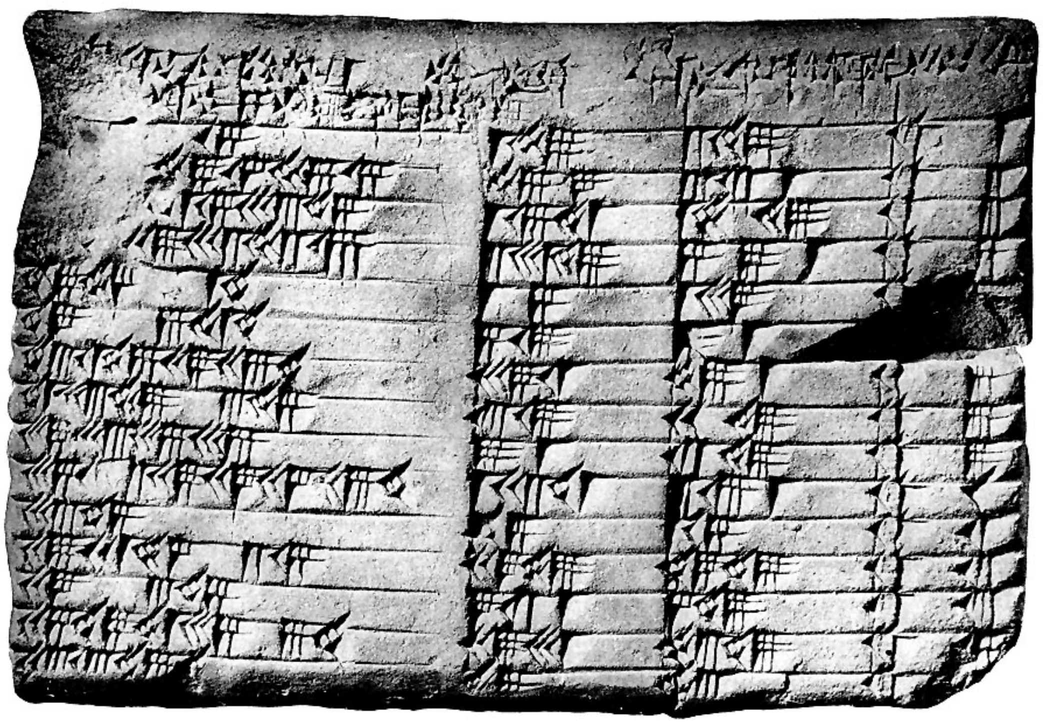
$(p,q,r) = (3,4,5), (5,12,13), \ldots$

$x^2 + y^2 = 1$: racionális megoldások

$$p^2 + q^2 = r^2$$

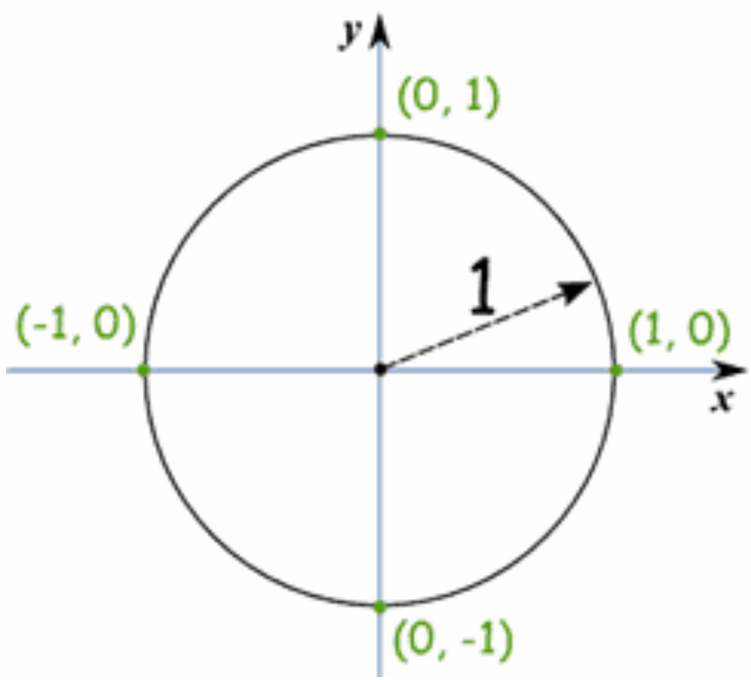
$$(p,q,r) = (3,4,5), (5,12,13), \ldots$$

- Plimpton 322, i.e. 1800:



$x^2 + y^2 = 1$: valós megoldások

- (x,y) koordináták: geometriai alakzat (Descartes)



$x^2 + y^2 = 1$: mod p megoldások

- Példa:

$$p=7$$

- Megoldás, ami mindig jó:

$$(x,y) = (0,\pm 1)$$

- Új megoldás:

$$(x,y) = (\pm 2,\pm 2)$$

mert

$$(\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 = 8 = 1 \bmod 7$$

$x^2 + y^2 = 1$: mod p megoldások

- Általában Gauss foglalkozott az ún. kvadratikus maradékok problémájával, és másodfokú egyenletek megoldásainak számával mod p számokban.
- Ebben az esetben a megoldások száma:

$$(p-1), \text{ ha } p = 1 \bmod 4$$

$$(p+1), \text{ ha } p = 3 \bmod 4$$

$x^2 + y^2 = 1$: komplex megoldások

- Írjuk át az egyenletet:

$$y=(1-x^2)^{1/2}$$

- Riemann foglalkozott a “többértékű komplex függvények” geometriájával: “Riemann felületek”

$x^2 + y^2 = 1$: komplex megoldások

$y=(1-x^2)^{1/2}$

Riemann-felülete: a gömbfelület

$$x^3 + y^3 = 1$$

Mi a megoldáshalmaz, ha (x,y) “számok”?

$x^3 + y^3 = 1$: racionális megoldások

$p^3 + q^3 = r^3$, (p,q,r) egész számok

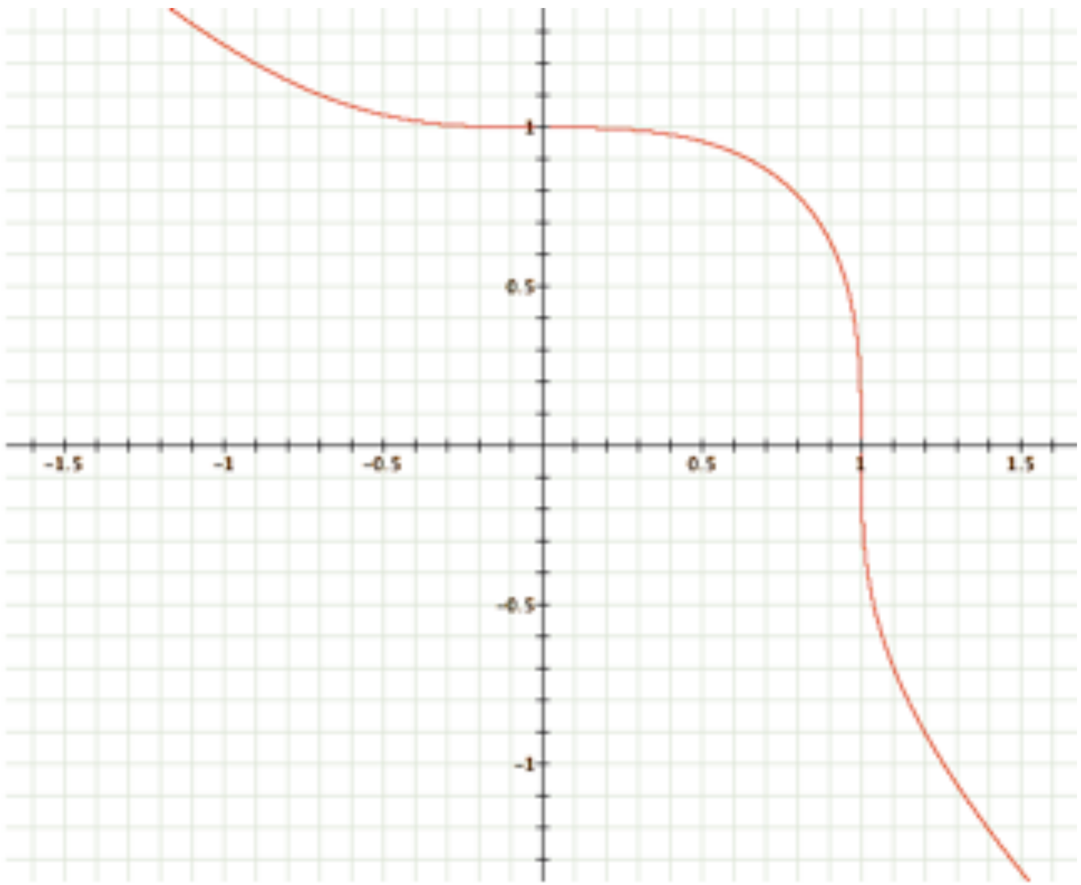
Fermat egyenlete!

Euler: csak a “triviális” megoldások

$(p,q,r)=(0,n,n)$

$x^3 + y^3 = 1$: valós megoldások

- Newton: harmadfokú görbék geometriája



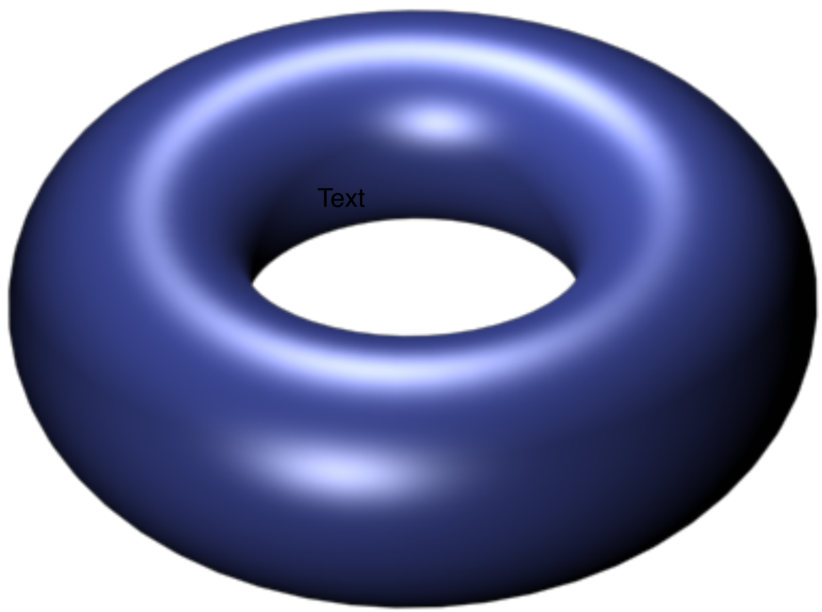
$x^3 + y^3 = 1$: mod p megoldások

- Gauss: a mod p megoldások számára létezik egy nagyon bonyolult formula…

$x^3 + y^3 = 1$: komplex megoldások

$y=(1-x^3)^{1/3}$

Riemann-felülete: a tórusz-felület



Általános egyenletek

- Tekintsük a problémát általánosan! Foglalkozzunk tetszőleges (polinomiális) egyenletekkel.

mod-p megoldások: *aritmetikus* kérdés.

Megoldások *megszámolhatók*

Komplex megoldások: *analitikus* kérdés

Megoldások halmaza *geometriai tér*

Weil-sejtés

- André Weil 1949-ben megfogalmazott egy sejtést:

Minden egyenlet *mod-p megoldásainak számára* létezik egy formula, amely…

…a komplex megoldáshalmaz *geometriai invariánsainak függvénye*!

Weil-sejtés: egy példa

$x^2 + y^2 = 1$

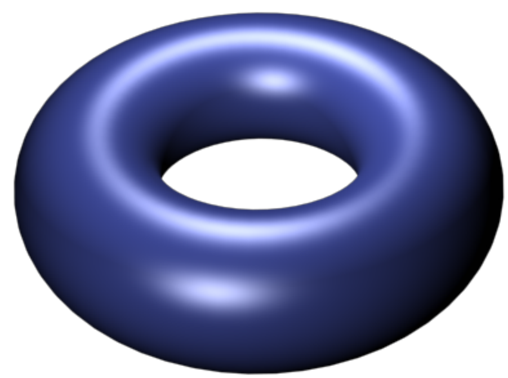
mod p megoldások
száma p±1

Riemann-felülete

$x^3 + y^3 = 1$

mod p megoldások
száma bonyolult…

Riemann-felülete



Aritmetika és geometria

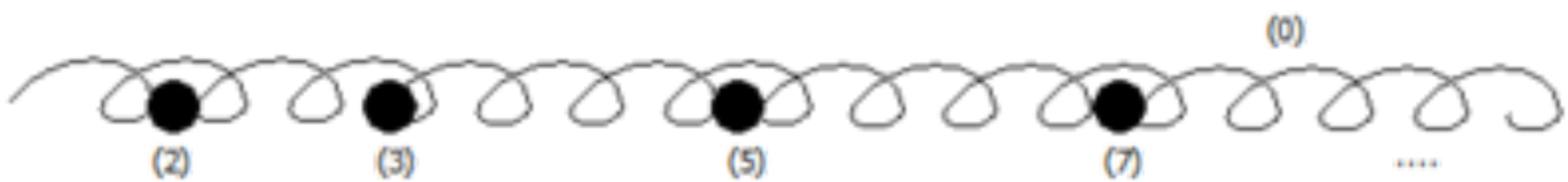
- A Weil-sejtés azt sugallja, hogy ugyanazon egyenlet mod-p (aritmetikus) és komplex (geometriai) megoldásai között nagyon szoros a kapcsolat…
- …azonban nem volt ismert olyan matematikai világ, olyan keret, melyben mind az aritmetikai, mind a geometriai kérdés tárgyalható lett volna!

Grothendieck: sémák

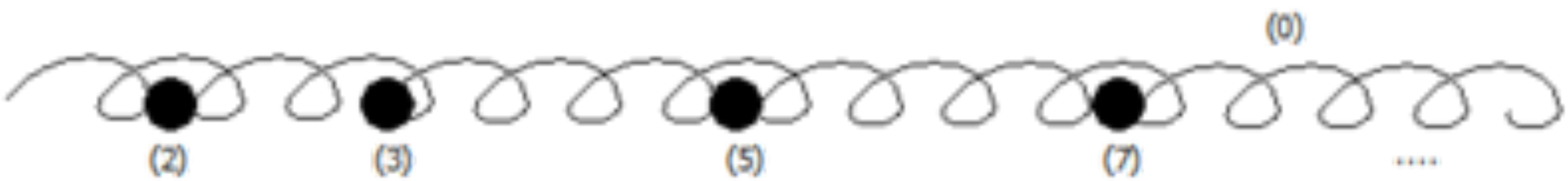
- Grothendieck megoldása: az *aritmetika geometrizálása*
- Az alapobjektum egy *séma,* az egyenlet a *legkisebb* olyan számhalmaz felett tekintve, melyben értelmezhető
- Az elmélet *magukat a számhalmazokat* is geometrizálja
- Geometriai műveletek (metszés, geometriai őskép, stb) *sokkal tágabb körben* alkalmazhatók.

Az egész számok sémája

- Az egész számok **Z** halmazához rendelt séma: *geometriai objektum*, melynek pontjai:
  - Minden *p* primszám
  - Egy “generikus” pont



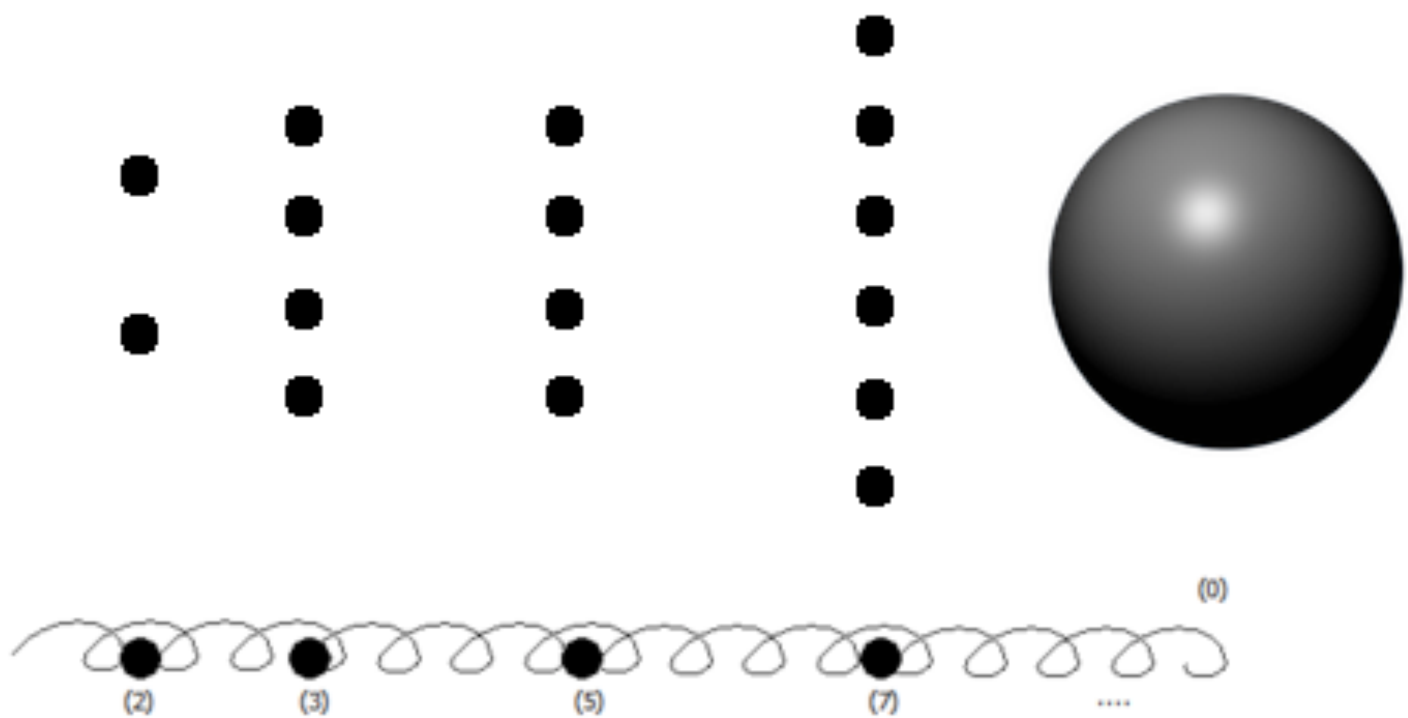
Az egész számok sémája



- Egy p primszámhoz tartozó pont: mod p *aritmetika*
- A “generikus” pont: (komplex) *geometria*

$x^2 + y^2 = 1$ sémája

A séma heurisztikus képe: egy p prim “felett” laknak a mod-p megoldások; a generikus pont “felett” laknak a komplex megoldások



Továbblépés: toposzok

- A séma-gondolat önmagában nem volt elég a Weil-sejtés megoldásához.
- Probléma: az aritmetikából eredő geometriai terek szokatlan tulajdonságokkal rendelkeznek, így a klasszikus geometriai és topológiai módszerek nem elegendőek!
- Grothendieck: tovább kell tágítani a geometrikus tér fogalmát: *toposzok*

Toposzelmélet

- Geometriai terek *kategória-elméleti* leírása

Geometriai tér X

Viszonyrendszer: *az összes geometriai kapcsolat*, melyben X szerepel

…embert… *…barátjáról!*

- Megfogalmazható ezen viszonyrendszerek (toposzok) teljes *geometriai* elmélete

A Weil-sejtés megoldása

- Sémaelmélet (EGA)
- Az “étale” toposzok elmélete aritmetikus geometriában (SGA)
- A Weil-sejtés megoldása a Grothendieck-tanítvány Deligne nevéhez fűződik (1974)

G. matematikájának utóélete

- A séma-elmélet az algebrai geometria radikális újrafogalmazását és kiterjesztését hozta. Eredményei alkalmazhatók például
  - algebrai csoportok elméletében és reprezentáció-elméletben
  - Diofantikus geometriában (Wiles, Taylor-Wiles)
- A toposz-elmélet új nézőpontokat nyitott
  - kategóriaelméletben
  - logikában
  - kvantumtérelméletben
- …