Apología de un matemático aplicado

Lloyd N. Trefethen
Universidad de Oxford
Traducción a cargo de J. M. Almira

Abstract

Esto es una traducción al castellano de:
Lloyd N. Trefethen, *An applied Mathematician's apology*, SIAM, 2022.

Una nota sobre el título.

G. H. Hardy publicó *Apología de un matemático* en 1940. El sentido del término es el de apología, la defensa de una materia. Se podría decir (y algunos de mis amigos han dicho) que un título más exacto para la presente obra habría sido *Confesiones de un analista numérico*. Sin duda, este ensayo difiere en muchos aspectos del de Hardy, ya que contiene más material biográfico y también más matemáticas, especialmente en la segunda mitad. Pero su finalidad es la misma: una seria y personal meditación sobre matemáticas.

1 Introducción

Soy un matemático apasionado, pero estoy desconcertado. Mi vida son las matemáticas, y siento una fuerte conexión con los matemáticos del pasado. A medida que pasan los años y trabajo en nuevos problemas, ganando en conocimiento y perspectiva, mi sensación de ser un matemático se fortalece.

Y sin embargo me siento desconectado de las matemáticas y los matemáticos del presente.

Empecé a escribir este ensayo como un medio para explorar esta extraña situación. Naturalmente, comencé reflexionando sobre las experiencias de mi carrera profesional, y al poco tiempo descubrí que también estaba escribiendo unas memorias. Es la historia de un matemático [que trabaja] en un inusual (y muy animado) rincón de las matemáticas.

Mi parte de las matemáticas es el análisis numérico, que definí en un ensayo hace treinta años del siguiente modo:

El análisis numérico es el estudio de algoritmos para resolver los problemas de la matemática continua.

(Continuo significa que involucra números reales o complejos). La idea tradicional es que otros matemáticos podrían inventar el concepto de las raíces de un polinomio, digamos, y luego los analistas numéricos se ocupan del desarrollo de algoritmos que las calculan. Por ejemplo, el polinomio $x^5 + x^3$–3 es igual a 0 si $x = 1.105298546006169\ldots$. ¿Cómo calculamos esos dígitos? Ejecutando algoritmos desarrollados por analistas numéricos. Por supuesto, los matemáticos han inventado problemas mucho más complicados que el cálculo de raíces de polinomios, como las ecuaciones en derivadas parciales, que son la base de gran parte de las ciencias naturales.

Los analistas numéricos tenemos la tarea de resolver también estos problemas, y los científicos e ingenieros usan nuestros métodos todo el tiempo.

Newton, Euler y Gauss fueron destacados analistas numéricos en una época en la que era evidente que parte del negocio de los matemáticos era calcular cosas. Pero el paisaje ha cambiado desde entonces, con otras ramas de las matemáticas apareciendo y floreciendo en un grado inimaginable en aquellos tiempos.

Hoy en día, la mayoría de los líderes matemáticos muestran poco interés por el cálculo, que evitan por costumbre y desdeñan por principio, como si careciera de importancia. Trabajan en otras cosas. Ningún artículo de un investigador como yo podría publicarse en una revista importante como *A*nnals of Mathematics. Mientras tanto, el análisis numérico prospera por separado, y por supuesto, tenemos un montón de revistas propias. En términos demográficos somos grandes, lo que quizás represente 5% de los matemáticos académicos y, medidos en función de nuestro impacto en ciencia y tecnología, somos enormes.

Mi buena suerte personal ha sido notable. Ocupo la que posiblemente sea la cátedra más visible en mi campo en el mundo, la Cátedra de Análisis Numérico en la Universidad de Oxford. Este gran departamento de matemáticas muestra 100 profesores en su web y generalmente está clasificado en lo más alto junto con Harvard, MIT, Stanford, Berkeley, Cambridge y Princeton. Ninguna de esas otras universidades tiene una cátedra en análisis numérico, pero Oxford sí, y desde 1997, el Catedrático de Análisis Numérico he sido yo. Nuestro Grupo de Análisis Numérico ha sido líder en la materia en Gran Bretaña desde su fundación en la década de 1960 y es bien conocido en todo el mundo. Yo personalmente soy también bien conocido, autor de libros de texto y documentos técnicos ampliamente leídos, miembro de la Royal Society, ex Presidente de la Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), ganador de importantes premios y títulos honoríficos. Soy miembro de Balliol College, fundado en los días de Kublai Khan.

Obviamente, esta es una historia de éxito y, de hecho, difícilmente podría ser mejor. No parece el perfil de alguien que se siente desconectado de su disciplina. Entonces ¿qué está pasando?

2 Matemáticas durante la infancia y en secundaria.

El amor por la disciplina comienza cuando eres un niño. Crecí en Lexington, Massachusetts, y como la mayoría de los futuros matemáticos, me resultó fácil obtener las respuestas correctas en la escuela, hacer "sumas", como decimos en Inglaterra, aunque como estadounidense todavía encuentro esa expresión extraña. Recuerdo hojas de ejercicios con casillas vacías, como $5 + \square = 12$, en las que tenías que averiguar el número que faltaba. Eso fue fácil, y me sorprendía que algunos de mis compañeros de clase tuvieran problemas con ello. La mayoría de los matemáticos tienen recuerdos de este tipo.

Viajando alrededor del mundo con mis padres y mi hermana a los 9 años para el año sabático de mi padre 1964/1965, me perdí el cuarto grado en la Shady Hill School, pero después de 28 días cruzando el Pacífico en un carguero con solo 11 pasajeros, me inscribí en la Seaforth Primary School en Sydney, Australia, donde nuevamente las matemáticas me resultaron fáciles.

Para mantenernos al nivel de nuestros amigos en casa, se arregló que mi madre nos enseñaría a mí y a Gwyned más inglés y mi padre nos enseñaría más matemáticas. Esto no le resultó difícil, ya que era profesor de ingeniería mecánica en la Universidad de Tufts y, de hecho, durante estos meses en Sydney, lideró el equipo que por primera vez en el Hemisferio Sur vació una "bañera" en condiciones suficientemente controladas para observar el efecto Coriolis [1]. Según recuerdo, las lecciones de matemáticas con mi padre consistían en tardes tranquilas a su lado en el salón del barco de pasajeros *Ellinis*, que tomamos de Brisbane a Atenas en mayo de 1965. (Pasamos por el Canal de Suez, dos años antes de que se cerrara durante la guerra de 1967.) Estudiamos los números negativos, que me explicó con la ayuda de insectos en una recta numérica. Por ejemplo, supongamos que un insecto está en la posición -5, mirando hacia la izquierda, y salta hacia atrás tres unidades. ¿Dónde termina? En -2, por supuesto. Esto explica por qué –5–(–3) = –2, y encontré este tipo de cosas fáciles y divertidas. Después de regresar a Shady Hill a los 10 años, tuve la extraña sensación de que el simple hecho de saber sumar, restar, multiplicar y dividir números negativos me ponía tres años por delante del resto de la clase.

Sin embargo, no por delante de Nat Foote, el chico pelirrojo que se había unido a la escuela durante mi ausencia. Él y yo éramos los magos de las matemáticas en la Shady Hill Class de 1970, y en séptimo, octavo y noveno curso nos sacaron a los dos del aula para estudiar libros de texto independientemente bajo la guía del maestro, Bob Lawler.

Aprendimos mucha álgebra. Mi padre nunca me había enseñado esa asombrosa técnica llamada factorización, que te permite afirmar que $x^2–2x–3 = (x + 1)(x–3)$, mientras que Nat lo había aprendido de su hermano George. También estudiamos trigonometría, así que yo era bueno con los senos y cosenos. Nat y yo tendíamos a ser bulliciosos cuando no teníamos supervisión para nuestra hora de matemáticas. Recuerdo haber discutido de matemáticas con el Sr. Lawler. Me dijo que 1 dividido por 0 estaba "indefinido", y yo dije que eso era una estupidez, pues obviamente era infinito. A los 15 años, Nat y yo fuimos a una excelente escuela secundaria, la Phillips Exeter Academy, que incluso en la década de 1970 contaba con tres doctorados en la facultad de matemáticas. En la primera clase del primer día, que era un curso de cálculo repleto de estudiantes de último año, el Sr. Lynch nos enseñó la definición de la derivada de una función como un límite al estilo de epsilons y deltas, que escribió cuidadosamente en la pizarra. ¡Guau! Nunca había visto esto antes, aunque Nat lo había aprendido de George. La derivada parecía algo realmente serio, requería concentración, y recuerdo haber pensado que si las grandes ideas iban a llegar a este ritmo en la escuela secundaria, iba a ser una experiencia bastante intensa. Aquella primavera Nat y yo superamos el examen de nivel avanzado de cálculo.

[1] Aquí el autor hace referencia al artículo Lloyd M. Trefethen, R.W. Bilger, P.T. Fink, R.E. Luxton, R.I. Tanner, "The Bath-Tub Vortex in the Southern Hemisphere", Nature 207, 1084-1085 (1965), publicado por su padre y varios colaboradores en 1965. (N. del T.)

Me enganché a las computadoras ese año, porque Exeter tenía teletipos conectados al Sistema de tiempo compartido de Dartmouth[2]. Al principio supuse que todo el mundo los estaba utilizando y que no era necesario que me uniera a la multitud, pero unas semanas más tarde lo intenté, y aquello fue la monda. Las matemáticas eran la aplicación obvia para explorar. Recuerdo haber escrito una secuencia de programas BASIC para imprimir los números primos $2, 3, 5, 7, ...$, cada uno más eficiente que el anterior. No había suficientes terminales para todos y, a menudo, me saltaba el almuerzo para ocupar un espacio disponible, aunque creo que solo hubo un día en el que me salté el almuerzo y la cena.

Luego vino otro año sabático viajando por el mundo con mis padres. Esta experiencia se vio enriquecida por una contribución especial de Steve Maurer, un maestro que también era estudiante de doctorado en Princeton, quien aquel primer año en Exeter se había convertido en nuestro amigo desayunando la mayoría de las mañanas conmigo y con Nat, en el Elm Street Dining Hall.

El Sr. Maurer reunió un puñado de 33 "Problemas para una Gira Mundial" difíciles para que yo trabajara mientras viajaba, y estos se convirtieron, en gran medida, en el tema de mi tercer año. Sin embargo, solo resolví cinco o seis de los problemas, y sentí que esto era una señal de ineptitud. Por sugerencia del Sr. Maurer, también estudié los primeros capítulos del texto clásico de Feller[3] sobre probabilidad, material interesante, y cuando nuestra familia hizo una pausa de cuatro meses en Seattle de camino a Australia, me inscribí en un curso de álgebra lineal, muy mecánico, en la Universidad de Washington y también en un curso de análisis, impartido por un profesor inspirador, Carl Allendoerfer. Mi contemporáneo Bill Gates vivía a más o menos una milla de nosotros en ese momento. Asistía a la Escuela Lakeside y también estudiaba matemáticas avanzadas junto con sus otras actividades, pero aún no había oído hablar de él.

De regreso para el último año en Exeter, Nat y yo volamos alto. En el primer semestre cursamos álgebra abstracta con David Arnold usando el libro de texto de Fraleigh[4], y esta fue la experiencia matemática más emocionante que jamás había tenido. ¡La definición de grupo era tan hermosa! El Sr. Arnold nos dejó a Nat ya mí hacer un

[2]El Dartmouth Time-Sharing System o DTSS (Sistema de tiempo compartido de Dartmouth) fue el primer sistema de tiempo compartido de gran escala en ser implementado con éxito. Se inició en el Dartmouth College en 1963 por un grupo de estudiantes dirigidos por John Kemeny y Thomas Kurtz para proporcionar acceso a las instalaciones de computación a todos los miembros de la universidad. En 1964 este sistema estaba en uso y se mantuvo funcionando hasta finales de 1999 (ver `https://es.wikipedia.org/wiki/Dartmouth_Time_Sharing_System)` `(N.delT.)`

[3]Se refiere a W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, John Wiley & Sons, 1950. (N. del T.)

[4]Se refiere a John B. Frayleigh, *A first course in Abstract Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1968. (N. del T.)

proyecto especial sobre los Teoremas de Sylow. En nuestro último semestre nos presentaron un tema que iba a ser importante para mi carrera. Tuvimos que elegir un "curso de campo" sobre la materia que quisiéramos y elegimos el análisis complejo, es decir, las matemáticas de los números reales e imaginarios y las funciones construidas a partir de ellos. Nuestro instructor fue el muy especial David Robbins, quien estuvo enseñando durante algunos años antes de comenzar su carrera en el Instituto de Análisis de Defensa, y el libro de texto era el clásico de Churchill[5]. En este curso recuerdo haber ido por delante de Nat, lo que me hizo sentir bien. El Sr. Robbins planteó un problema en uno de los exámenes que involucraba a una hormiga que se mueve una unidad, luego gira 30 grados a la izquierda y se mueve media unidad, luego gira otros 30 grados a la izquierda y mueve un cuarto de unidad, y así sucesivamente; ¿dónde termina? (¡Otra vez insectos, ocho años después!, pero ahora en el plano complejo y con una libertad absoluta de movimiento, no solo hacia adelante o hacia atrás). Recuerdo que me complació adivinar que se trataba de una serie de potencias[6], y Nat no supo hacerlo. Globalmente, sin embargo, Nat y yo éramos más o menos indistinguibles en todos los sentidos. Se graduó como el primero en la clase, y yo fui el segundo. Pero yo obtuve el premio en matemáticas. Aunque el Sr. Maurer lo desaconsejó (uno debe hacer nuevos amigos), decidimos continuar como compañeros de habitación en Harvard.

A los 18 años, no había duda de que me estaba convirtiendo en matemático. Recuerdo ese verano, antes de Harvard, conduciendo hasta un parque a unas pocas millas de mi casa en Lexington con el libro de álgebra abstracta de Herstein[7]para poder estudiar el tema en profundidad. Pero no tuve éxito y me quedé dormido bajo un sol abrasador.

Muchos matemáticos tienen historias como estas de sus primeros años. La mayoría de nosotros nos encontramos bien en la materia sin esforzarnos mucho, ayudados por uno o dos maestros especiales, y de una manera u otra terminamos aprendiendo cosas más allá del plan de estudios habitual. En 1973 obtuve el primer puesto en el Examen de Matemáticas de la Escuela Secundaria de New Hampshire, obte-

[5]Se refiere a Ruel V. Churchill, *Introduction to Complex variables and applications*, McGraw Hill, 1948. (N. del T.)

[6]Se trata de la serie

$$\begin{aligned} 1+(\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}i})+(\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}i})^2+\cdots &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}i}} \\ &= \frac{14+3\sqrt{3}}{13}+\frac{5+2\sqrt{3}}{13}i \\ &\simeq 1.47662710943897+0.651084739625981i. \end{aligned}$$

(N. del T.)

[7]Se refiere a I. N. Herstein, *Topics in Algebra,* Blaisdell Pu. Co., 1964. (N. del T.)

niendo la primera calificación perfecta, y Nat quedó en segundo lugar. Pero cuando, como consecuencia de esto, participé en la Olimpiada Matemática de EE. UU. para estudiantes de secundaria, no me fue tan bien. A fin de cuentas, yo era muy bueno, pero no espectacular. Tampoco contaba con la formación matemática extra-escolar de la que ya se estaban beneficiando muchos niños y que más tarde se convirtió en una industria, como los campamentos de verano de matemáticas y las sesiones de entrenamiento para las diversas competiciones que existen. Simplemente, estudié con entusiasmo, alentado por mis padres, que me apoyaban, maestros sobresalientes y un mejor amigo y rival que era mi igual milimétricamente.

Aquí hay algo divertido de aquel último año en Exeter. Aproveché la oportunidad de ir a una escuela tan especial, sin considerar nunca seriamente la opción de quedarme en casa, en Lexington. Pues bien, en el Examen Nacional de Matemáticas de la Escuela Secundaria de aquel año, mientras que Exeter ocupó el segundo puesto en Nueva Inglaterra, ¡la Escuela Secundaria de Lexington ocupó la primera posición! Bromeamos con que si me hubiera quedado en casa, podría haber sido al revés.

Cuando tenía 18 años, no creo que cuestionara ningún aspecto de las matemáticas. La matemática estaba allí para ser estudiada, y yo era un estudiante. Los expertos habían desarrollado el tema durante años y era afortunado de poder aprender algo de lo que ellos habían descubierto. Tampoco podía adivinar que el debate sobre las matemáticas "puras o aplicadas" sería importante para mí algún día.

3 Los medallistas Fields y su extrañamente bajo impacto en mi

Ha pasado medio siglo. Aquí hay una lista de los sesenta medallistas Fields hasta el momento (incluido Grigori Perelman en 2006, aunque rechazó el premio). Estos son los dioses de las matemáticas. Todos son brillantes. Algunos tienen el aura de ser más que eso, dioses entre los dioses.

1936 Lars Ahlfors	1936 Jesse Douglas
1950 Laurent Schwartz	1950 Atle Selberg
1954 Kunihiko Kodaira	1954 Jean-Pierre Serre
1958 Klaus Roth	1958 René Thom
1962 Lars Hörmander	1962 John Milnor
1966 Michael Atiyah	1966 Paul Cohen
1966 Alexander Grothendieck	1966 Stephen Smale
1970 Alan Baker	1970 Heisuke Hironaka
1970 Sergei Novikov	1970 John Thompson
1974 Enrico Bombieri	1974 David Mumford
1978 Pierre Deligne	1978 Charles Fefferman
1978 Grigori Margulis	1978 Daniel Quillen
1982 Alain Connes	1982 William Thurston
1982 Shing-Tung Yau	1986 Simon Donaldson
1986 Gerd Faltings	1986 Michael Freedman
1990 Vladimir Drinfeld	1990 Vaughan Jones
1990 Shigefumi Mori	1990 Edward Witten
1994 Jean Bourgain	1994 Pierre-Louis Lions
1994 Jean-Christophe Yoccoz	1994 Efim Zelmanov
1998 Richard Borcherds	1998 Timothy Gowers
1998 Maxim Kontsevich	1998 Curtis McMullen
2002 Laurent Lafforgue	2002 Vladimir Voevodsky
2006 Andrei Okounkov	2006 Grigori Perelman
2006 Terence Tao	2006 Wendelin Werner
2010 Elon Lindenstrauss	2010 Ngô Bào Châu
2010 Stanislav Smirnov	2010 Cédric Villani
2014 Artur Avila	2014 Manjul Bhargava
2014 Martin Hairer	2014 Maryam Mirzakhani
2018 Caucher Birkar	2018 Alessio Figalli
2018 Peter Scholze	2018 Akshay Venkatesh

Claro[8] que no soy Dios, pero recuerda, soy una figura destacada en una de las grandes subdisciplinas de las matemáticas y el más antiguo entre los que ocupan las 15 cátedras estatutarias en uno de los departamentos de matemáticas más importantes del mundo. Entonces, preguntémonos, ¿cuántas obras de estos medallistas Fields he leído?

La respuesta es: exactamente una. Se trata del inspirador libro de texto *Análisis complejo* de Ahlfors, que estudié en el curso Math 213a[9], durante mi segundo año en Harvard. Aparte de eso, he leído

[8] Los siguientes medallistas, posteriores a la publicación original de este libro, han sido: June Hugh, James Maynard, Hugo Duminil-Copin, y Maryna Viazovska, en 2022. Trabajan en geometría algebraica, teoría de números y teoría de la probabilidad. A todos ellos se les pueden aplicar los mismos comentarios que realiza el autor en esta sección. (N. del T.)

[9] En EE. UU. los nombres de los cursos universitarios se formulan con números, en vez de descriptores. Así, por ejemplo, en este caso Math 213a designa un curso que en España denominaríamos “Análisis complejo”. Este tipo de terminología

algunas páginas de Serre, Hörmander, Milnor, Atiyah, Smale, Lions y Tao. Pero Ahlfors, medallista Fields hace 86 años, es el único de los 60 que escribió algo que he estado cerca de leer en su totalidad.

Con los años, todas las materias tratadas por el intelecto han proliferado en especializaciones, a medida que más y más personas hacen aportaciones, pero aún así, esta situación es extrema. ¿Te imaginas a un novelista que nunca haya leído un libro de Mann, Hemingway, Márquez, Lessing o Morrison? ¿Un economista que nunca ha leído nada de Samuelson, Arrow, Friedman, Kahneman o Krugman?

Este fenómeno se explica en parte por la división entre matemática "pura" versus "aplicada", a la que volveré más adelante. Yo soy aplicado, y estos medallistas de Fields son puros. Oficialmente, las medallas Fields son para "matemáticas", pero se entiende que las matemáticas aplicadas no cuentan, aunque nunca encontrarás tal declaración por escrito. Muchos de los ganadores probablemente afirmarán que son simplemente matemáticos, que la distinción entre puro y aplicado es ilusoria, y más adelante tendré algo que decir sobre ese punto de vista. El medallista Fields con el registro más claro de contribuciones aplicadas es probablemente David Mumford, pero estas llegaron después de su medalla Fields, y comenzaron cuando ya tenía 45 años, esencialmente como una segunda carrera en una segunda universidad.

Pero la distinción entre puro y aplicado por sí sola no basta para explicar la debilidad del vínculo entre las personas con una vocación numérica, como yo, y los líderes ungidos de las matemáticas. Podríamos pensar en el matemático aplicado de manera similar a como concebimos al físico experimental, frente al físico teórico. ¿Te imaginas a un físico experimental que nunca haya leído un artículo de Einstein, Schrödinger, Bethe, Feynman o Glashow? (Decidí obtener algunos datos sobre esta pregunta, así que le pregunté a algunos amigos en física experimental sobre sus historiales de lectura. Parece que es típico haber leído entre 5 y 10 obras de estos cinco hombres).

No puedo decir que los medallistas Fields hayan tenido un impacto nulo sobre mí. He hablado con Ahlfors (fue lector en mi tesis de pregrado), Smale, Mumford (me enseñó Matemáticas 250b en Harvard), Cohen (uno de mis profesores en Stanford), Gowers, Tao, Smirnov y Hairer. He asistido a conferencias de Atiyah, Fefferman, Thurston, Yau, Donaldson, Witten, Lions y Villani. Tengo una impresión lejana de una o dos de las contribuciones de Thompson, Werner, Perelman y Mirzakhani. Pero como decimos en matemáticas, el impacto de estas personas en mí ha sido épsilon. A quienquiera que estén influyendo tanto como para merecer medallas Fields, no es el Catedrático de Análisis Numérico de Oxford. Y, por supuesto, ellos han sido igualmente poco influenciados por mí. Sería interesante saber cuántos de

aparece con frecuencia en el texto y la hemos mantenido tal como está en el texto original. (N. del T.)

los sesenta han leído un trabajo mío, y a falta de datos sobre este punto, estimaría que este número es aproximadamente 1.

Algunos medallistas Fields viven una vida académica glamurosa, dando conferencias distinguidas por todos lados, pero uno que no era así era el solitario Dan Quillen, con quien tengo una curiosa conexión. Estuve en una facultad de matemáticas con Quillen no una sino dos veces, en el MIT y luego nuevamente en Oxford, antes de su jubilación en 2006, y nunca coincidimos.

4 Licenciatura en Harvard: elección del Análisis Numérico

En Harvard, Nat y yo ingresamos como dos de los mejores estudiantes de primer año en matemáticas. El espíritu era: ¡cursos avanzados, cursos avanzados! Nadie que se tome en serio las matemáticas caería tan bajo, por ejemplo, como para cursar Math 21, el curso de Álgebra Lineal. Así que escuché por primera vez la palabra "autovalor", propia del álgebra lineal, en un curso de física.[10] Los autovalores jugarían después un papel importante en mi carrera académica.

La mayoría de los peces gordos, incluyendo a Bill Gates, tomaron el legendario Math 55, enseñado por John Mather, que fue diseñado para exhibir la testosterona.[11] Sin embargo, después de una larga discusión sobre los pros y los contras, Nat y yo decidimos desviarnos de este camino y cursar Math 105, un curso de análisis de tercer año impartido por Neil Fenichel. Para ello estudiamos palabra por palabra, con intenso esfuerzo y entusiasmo, los primeros capítulos de los *Fundamentos del análisis moderno* de Dieudonné. Siguiendo la tradición de Bourbaki, y haciendo honor a su apellido, Dieudonné anunciaba al principio del libro que no usaría figuras, ya que su uso fomenta el pensamiento sin rigor. Así es como lo expresaba:

> Esto tiene también como consecuencia la necesidad de una estricta adherencia a los métodos axiomáticos, sin apelación alguna a la "intuición geométrica", al menos en las pruebas formales: una necesidad que hemos enfatizado al abstenernos deliberadamente de introducir gráficas en el libro. Mi opinión es que el estudiante de posgrado de hoy debe, tan pronto como sea posible, obtener un entrenamiento completo en esta forma de pensar abstracta y axiomática si alguna vez quiere comprender lo que está sucediendo actualmente en la investigación matemática.

[10] "Autovalor" puede también traducirse como "valor propio". En esta traducción uso ambas terminologías indistintamente, porque las dos son de uso común en la literatura en español. (N. del T.)

[11] Ver "Math 55" en Wikipedia -y la nota 8

Me apresuro a añadir que este punto de vista Bourbakista extremo ha perdido aceptación en décadas posteriores, incluso entre los matemáticos puros.

Aún conservo el texto de Dieudonné en mi estantería, cada línea de los primeros capítulos resaltada en naranja, amarillo y azul para distinguir definiciones, teoremas y otro material importante. Era un curso grande, con 40 o más estudiantes, y Nat y yo obtuvimos dos de las cuatro matrículas de honor. Mientras tanto también cursábamos Physics 55 junto con Steve Ballmer y Jim Sethna, entre otros. Cada semestre en Harvard, me inscribí en cursos de matemáticas y física, y lo que aprendí allí sentó las bases de mi carrera. Como regla, obtuve matrícula de honor en los cursos de matemáticas y sobresaliente en los de física, y sentí que este patrón reflejaba razonablemente mis talentos.

A finales del primer año. se produjo una gran bifurcación cuando Nat anunció que se cambiaría a las ciencias sociales. Hasta ese momento, habíamos cursado casi exactamente las mismas asignaturas desde los 10 años. Después de 1974 nos separamos. Él siguió a su padre hacia el mundo de los negocios, yo seguí al mío orientándome hacia las ciencias y la vida académica. Como la mayoría de los graduados de Harvard, Nat ganó mucho más dinero que yo en su carrera, pero para mí el dinero ha sido una limitación solo ocasionalmente y, aunque noto la brecha, no me molesta demasiado.

En el segundo año, los jóvenes matemáticos serios, ahora sin Nat, se apresuraron a ingresar a los cursos de posgrado. Tomé Math 213a/b, análisis complejo, con Barry Mazur y Raoul Bott, y Math 250a/b, álgebra abstracta, con John Tate y David Mumford. Aunque entonces no lo aprecié completamente, más tarde me di cuenta de que aprender matemáticas de este cuarteto incandescente era como si John, Paul, George y Ringo te enseñaran rock and roll. Estos profesores me caían muy bien, ¡qué año tan intenso! Pero fue difícil, y estas clases tenían muchos estudiantes de posgrado que sabían más que yo, incluidos los ganadores de la competición Putnam. Reconocí que dos de los otros estudiantes universitarios eran mejores matemáticos que yo: Tom Goodwillie, un año mayor que yo y ahora profesor en la Universidad de Brown, y Nat Kuhn, hijo del filósofo de la ciencia Thomas Kuhn, un año menor que yo y, actualmente, psiquiatra en el área de Boston.

Math 250a, con Tate, fue el único curso que tomé con Bill Gates. Las conferencias eran los martes y jueves a última hora de la mañana, y después algunos íbamos a almorzar. Normalmente éramos una parte del grupo formado por mí, Bill, Doug Critchlow (ahora en Ohio State University), Nat Kuhn, Tom Goodwillie y alguien llamado Jack cuyo apellido no recuerdo. A veces comíamos en Currier House, donde vivía Bill. Era delgado, rápido y confiado.

En uno de estos almuerzos, Bill se jactó de ser el mecanógrafo más rápido que había porque usaba un teclado todo el día. Yo no estaba de acuerdo, así que hicimos una apuesta y subimos a su habitación con dos testigos para ver quién era realmente el más rápido. Mi mecanografía le aplastó, pues él solo usaba un par de dedos. Otra persona memorable en mi clase en Harvard fue Paul Ginsparg, un joven físico que era impresionante (e incluso más confiado que Bill). Ginsparg fundaría arXiv, el repositorio de impresión electrónica que lanzó la era de la publicación de acceso abierto.

Al final de este intenso segundo año llegó mi bifurcación personal. Todo el tiempo había asumido, como hacen los jóvenes matemáticos, que me dedicaría a las matemáticas puras. Después de todo, este era el núcleo mismo del tema, el lugar para dejar tu huella para siempre. Recuerdo haber pensado que mientras algunas personas se concentraban solo en la teoría analítica de números o la teoría algebraica de números, yo era más serio que eso y triunfaría tanto en la teoría analítica como en la teoría algebraica de números. De algún modo, al final del segundo año, esta idea se desvaneció y decidí que lo que importaba era la matemática aplicada.

Muchos años después, me resulta sorprendentemente difícil recordar los detalles de cómo cambié de opinión. Creo que tenía la sensación de que las matemáticas aplicadas simplemente estaban más conectadas con el mundo que las puras y, sin duda, la influencia de mi padre jugó un papel. No quiero decir que trató de persuadirme de una forma u otra, pero fue él quien me había formado como pensador con discusiones sobre cuestiones científicas durante mi infancia y adolescencia. Influido por él, siempre tuve la sensación de que las matemáticas forman parte de algo más amplio, que incluye la física, la química y la ingeniería. (No creo que me tomara la biología en serio a esa edad).

De modo que cambié de especialidad, pasando de Matemáticas a Matemática Aplicada, y en otoño me dispuse a iniciar mi formación con asignaturas aplicadas. Una de ellas fue Applied Math 211, el curso de posgrado en análisis numérico, impartido enérgicamente por Don Rose a partir de los maravillosos libros de Forsythe & Moler y Dahlquist & Björck (tres de cuyos autores llegaría a conocer bastante bien). Estaba bien preparado para esto, ya que había estado programando Fortran para el Proyecto de Incendios Domésticos de Howard Emmons durante varios años, diez horas a la semana durante los períodos universitarios, y a tiempo completo durante el verano. Además de Gates, dicho sea de paso, probablemente solo había tres o cuatro miembros de la promoción de Harvard que finalizó sus estudios en 1977 con tanta experiencia en programación como yo.

Descubrí que aquello era lo mío. El análisis numérico era el corazón de la matemática aplicada, el corazón de las matemáticas, el corazón de la ciencia. Recuerdo la emoción de una noche con el PDP-8 en el Laboratorio de Ciencias de la Ingeniería, cuando por fin conseguí que mi programa Fortran funcionara para resolver un problema de valores en la frontera mediante el método de tiro. Convergió y los dígitos correctos se alinearon con orgullo. En mi ficha diaria del 4 de noviembre de 1975, a los 20 años y un par de meses, escribí: "AM 211. Me encanta este curso".

5 La extraña reputación del Análisis Numérico

El Análisis Numérico era el campo al que dedicaría mi vida. Una materia que puede parecer solo una de las muchas subdisciplinas de las matemáticas, una entre 16, si nos fijamos en la lista de grupos de investigación en la web de nuestro departamento. Y sin embargo, cuarenta años de trabajo en esta área me han dado una visión especial de las matemáticas. Los analistas numéricos somos los que vemos el espectáculo en vivo. Ocurre en nuestras pantallas, al alcance de la mano. Nosotros hacemos que las cosas sucedan. La energía de esta experiencia me ha mantenido en marcha, década tras década, y siempre es un misterio para mí por qué no hay más matemáticos que reconozcan el cálculo numérico como una forma indispensable de explorar las matemáticas.

Un amigo que me conocía bien me preguntó después de mis primeros meses en la escuela de posgrado: "¿Ya estás esquiando en las funciones complejas?"

Pero quiero incluir aquí algunos comentarios sobre un problema de relaciones públicas que afecta a esta área mía. Estas observaciones provienen de mi ensayo de 1992, mencionado anteriormente, "La definición de análisis numérico", y hablé del tema en mi conferencia inaugural en Oxford, en 1998.

Cuando las computadoras manejan números reales como π y $\sqrt{2}$, generalmente los aproximan a unos 16 dígitos de precisión. Las aproximaciones implican lo que llamamos errores de redondeo, que ocurren todo el tiempo, cada vez que se calcula algo numéricamente.

Los errores de redondeo tienen su interés, pero son bastante feos desde el punto de vista matemático habitual y, de una forma u otra, esta fealdad llegó a ser considerada como la esencia misma de mi campo. Al escribir ese ensayo, busqué definiciones de análisis numérico en el diccionario y registré estos especímenes desalentadores:

> Webster's New Collegiate Dictionary (1973): *El estudio de las aproximaciones cuantitativas a las soluciones de problemas matemáticos, incluida la consideración de los errores y los límites de los errores involucrados.*
>
> Chambers 20th Century Dictionary (1983): *El estudio de los métodos de aproximación y su precisión, etc.*

> The American Heritage Dictionary (1992): *El estudio de soluciones aproximadas a problemas matemáticos, teniendo en cuenta la magnitud de los posibles errores.*

¡Qué triste! En la conferencia inaugural, me divertí un poco imaginando cómo sería si otros campos tuvieran nuestro talento para la publicidad:

> Ingeniería Aeronáutica. *El diseño de vehículos voladores capaces de reducir de forma rápida y fiable los errores en las posiciones iniciales de los pasajeros.*
>
> Educación. *El desarrollo de métodos para medir la ignorancia en niños y adultos, y disminuirla en lo posible.*
>
> Medicina: *El estudio del acercamiento de la muerte en humanos, y de los métodos para retrasar este evento.*

Creo saber cómo surgieron estas tristes definiciones de Análisis Numérico. Cuando comenzó la era de las computadoras, los líderes de nuestro campo, en particular Jim Wilkinson y George Forsythe, descubrieron que los errores de redondeo a veces dan lugar a sorpresas, errores mucho mayores en la respuesta final de lo que cabría esperar. Estaban fascinados por este efecto y se propusieron contárselo al mundo. ¡Cuidado, las computadoras pueden fallar! Cómo desearía que hubieran sido menos efectivos en sus advertencias. Porque la mayor verdad de este tema es que se trata de calcular números correctamente, generalmente con una velocidad asombrosa y con métodos que a menudo no son en absoluto obvios. Como mencioné anteriormente, aquí está la definición que prefiero:

> *El análisis numérico es el estudio de algoritmos para resolver los problemas de la matemática continua.*

Pueden agregarse restricciones y, en particular, muchos distinguirían la parte aplicada del área como "cálculo científico", pero esta definición es la esencia del asunto, y la atención se centra en los algoritmos, no en los errores de redondeo. Si los errores de redondeo desaparecieran, el 90% del análisis numérico permanecería.[12]

Con el paso de los años mi ensayo ha tenido cierta influencia, al igual que la situación de los errores de redondeo ha mejorado gracias

[12] Esta estimación se confirmó en el SIAM 100-Dollar, 100-Digit Challenge en 2002, del cual hablaré más adelante, donde los concursantes tenían que calcular diez números, cada uno con una precisión de 10 dígitos. Exactamente uno de los diez problemas dependía de errores de redondeo en el sentido de que una solución exitosa requería aritmética computarizada de precisión extendida.

a la adopción del estándar IEEE para la aritmética de punto flotante. Algunos de los libros de texto más recientes ponen menos énfasis en los errores de redondeo en la página 1, y Wikipedia, por ejemplo, ahora proporciona una definición de análisis numérico que yo podría haber escrito.

La revolución de la ciencia de datos y del aprendizaje automático también está contribuyendo a incrementar el interés por los algoritmos numéricos tras décadas en las que muchos matemáticos e informáticos los evitaron. De hecho, después de años de moverse en sentido contrario, la informática se está volviendo más numérica en estos días, a medida que se descubre que los métodos numéricos para la optimización, por ejemplo, son efectivos en entornos siempre nuevos e inesperados. Puede que el progreso continúe.

6 Lo discreto y lo continuo

La distinción entre matemáticas discretas y continuas es compleja y a veces difícil de precisar, pero muy importante. Creo que ese abismo es tan grande como el que hay entre matemática pura y aplicada, y en mi caso puede ser mayor, pues me considero calificado para opinar sobre matemática continua pura, pero no sobre matemática discreta, ya sea pura o aplicada.

La distinción entre discreto y continuo parte de la diferencia entre contar y medir, y está relacionado con la distinción entre álgebra y análisis. Escuché por primera vez sobre esta dicotomía en mi último año en Exeter, cuando Nat y yo pasamos un par de días visitando a nuestro amigo Eric Anderson en su dormitorio de primer año para ver cómo era la vida en Harvard. Estaba hablando con uno de los compañeros de clase de Eric e hizo un comentario que me pareció muy sabio. Lo primero que debes decidir sobre ti mismo como matemático, dijo, es si eres algebrista o analista.

Entonces no tenía idea de cuál era mi caso, pero a lo largo de los años he llegado a saberlo: soy un analista de pies a cabeza. Lo que me importa son los números reales y complejos y las funciones asociadas con ellos. Las estructuras algebraicas y combinatorias son una galaxia distante, que admiro a través del telescopio. Si me preocupo por el estado de las matemáticas, es en el lado continuo en el que estoy pensando. No tengo derecho a preocuparme por el lado discreto.[13]

Si miras de nuevo la definición de análisis numérico, verás que su

[13]Dicho esto, una cosa me desconcierta. En matemáticas computacionales, aunque los polinomios univariados son ubicuos, los polinomios de varias variables no se usan mucho, como mencioné el año pasado en una de mis columnas “Notas de un analista numérico” en el boletín de la Sociedad Matemática de Londres (LMS). Sin embargo, los polinomios multivariados son precisamente el tema de la geometría algebraica, una de las áreas de mayor prestigio de las matemáticas puras, con diez medallas Fields. ¿Que esta pasando?

última palabra insinúa la existencia de otro campo con una definición dual:

> *El análisis numérico es el estudio de algoritmos para resolver los problemas de las matemáticas continuas.*

Claramente, el otro campo se definirá así:

> □ *es el estudio de algoritmos para resolver los problemas de las matemáticas discretas.*

Entonces, ¿qué es □? La respuesta es: informática, o al menos una de las partes clásicas de la informática denominada ciencias de la computación (o CS, para abreviar). La opinión de que el estudio de los algoritmos es el corazón de las ciencias de la computación fue presentada por Don Knuth, de Stanford, a principios de la década de 1960, y Knuth adquirió una estatura en ciencias de la computación equiparable a la de Noam Chomsky en lingüística. Hizo que el análisis de algoritmos fuera apasionante e intelectualmente profundo, y así nacieron las ciencias de la computación. Knuth ha sido una inspiración a lo largo de mi carrera y también un amigo, pero en el fondo es un matemático discreto, y él y su círculo abandonaron el lado continuo de los algoritmos cuando estaban definiendo las ciencias de la computación en el imaginario académico. Alan Turing y John von Neumann, por el contrario, pioneros informáticos de una generación anterior que murieron jóvenes en la década de 1950, se sentían igualmente cómodos con lo discreto y lo continuo.

Todo esto conduce a una situación extraña. Intrínsecamente, uno pensaría que el análisis numérico debería ser una parte de la informática, ya que todo gira en torno a la computación. Y, sin embargo, los informáticos están formados fundamentalmente en matemáticas discretas, no continuas. Por otro lado, los físicos, químicos e ingenieros se instruyen en matemáticas continuas, porque eso es lo que necesitan para su trabajo. Y así sucede que los analistas numéricos que trabajan en los departamentos de Ciencias de la Computación a veces descubren que, dentro de su facultad, pueden comunicarse con los miembros de todos los departamentos de ciencias e ingeniería, excepto el suyo.

En la actualidad nos ubicamos con menos frecuencia en los departamentos de informática. Cuando estas unidades se fundaron por primera vez en la década de 1960, aproximadamente la mitad de los pioneros eran analistas numéricos, incluidos Walter Gautschi y John Rice en Purdue, George Forsythe y Gene Golub en Stanford, Fritz Bauer en Munich, Eduard Stiefel y Heinz Rutishauser en Zurich, John Bennett en Sydney, Bill Gear en Illinois, Tom Hull en Toronto, Germund Dahlquist en Estocolmo y Leslie Fox aquí en Oxford.[14] Del

[14] Fox fue el primer catedrático de análisis numérico en Oxford (1963–83), Bill Morton fue el segundo (1983–97) y yo soy el tercero (1997–).

mismo modo, aproximadamente la mitad de los artículos en el Journal of the Association for Computing Machinery en aquellos tiempos trataban temas numéricos. Todo esto ha cambiado desde entonces. El (renombrado) Journal of the ACM ahora rara vez publica artículos de análisis numérico, y en la mayoría de las universidades, el análisis numérico ha regresado al departamento de matemáticas. En Oxford sucedió en 2009, bajo mi supervisión. Uno o dos años antes del cambio, el jefe del departamento de informática escribió en un borrador del informe resumido para la evaluación de la investigación de aquel año que, cuando el grupo de análisis numérico pasara de informática a matemáticas, ¡ambos departamentos mejorarían! Por desgracia, armé un escándalo por este tonto insulto y fue eliminado del documento final. Qué delicia hubiera sido haber dejado esa joya en las actas, como registro histórico.

7 Los Premios Turing y mi oscilación entre las matemáticas y la informática

En 2019 escribí una de mis *Tarjetas anotadas*[15] sobre la cuestión de lo discreto y lo continuo, centrándome en el Premio Turing, el mayor honor que existe en ciencias de la computación.

En teoría, las ciencias de la computación incluyen el análisis numérico como parte de su temática, y un analista numérico ciertamente es elegible, en teoría, para ganar el premio. ¿Cuántos de los 72 ganadores han sido en realidad analistas numéricos? La respuesta es tres, si cuentas a Richard Hamming (1968). Los otros dos miembros del grupo, los "analistas numéricos con carnet", eran Jim Wilkinson (1970) y William ("Velvel") Kahan (1989)[16]. Obsérvese que estamos hablando de hace 54, 52 y 33 años. Las nominaciones para los premios de Wilkinson y Kahan enfatizan sus contribuciones al problema de los errores de redondeo, ese 10% del análisis numérico que la gente confunde con la totalidad del área.

Curiosamente, aunque solo he leído una obra de un medallista Fields, he leído unas quince de ganadores del Premio Turing. Sobre esa base, podría juzgarse que soy informático. Como segunda fuente de información, los puestos que he ocupado sugieren que soy una combinación perfecta de informático y matemático:

Estudiante en Harvard 1973-77: Matemáticas

[15] Se refiere a su libro *Trefethen's Index Cards. Forty Years of Notes About People, Words, and Mathematics*, World Scientific, 2011. (N. del T.)

[16] Tras la publicación de este libro en 2022, ha habido un nuevo ganador del Premio Turing: Jack Dongarra. De hecho, se trata del primer analista numérico no relacionado con el análisis de errores que ha recibido esta distinción. (N. del T.)

Estudiante de posgrado en Stanford 1977-82: CS

Posdoctorado en NYU 1982-84: Matemáticas y CS

Profesor asistente/titular en MIT 1984-91: Matemáticas

Profesor titular/catedrático en Cornell 1991-97: CS

Profesor en Oxford 1997-: CS, luego matemáticas

Mis libros y artículos, sin embargo, muestran dónde está realmente mi corazón. Soy matemático.

8 Puro y aplicado

Es hora de añadir algo más sobre la separación entre matemáticas puras y aplicadas. He publicado algunos ensayos sobre esta división, como mi columna "Del presidente de SIAM" de abril de 2011 en SIAM News. Es una dicotomía sobre la que todos los matemáticos tienen opiniones y, como ocurre con todos los asuntos de política de identidad, puede ser incómodo. Aquí, en el edificio Andrew Wiles de Oxford, hemos adoptado eufemismos para evitar pronunciar palabras peligrosas: hablamos de matemáticas del "ala norte" y del "ala sur". Antes de que se abriera el edificio en 2013, se había hablado de asignar oficinas al azar para fomentar las interacciones entre campos dispares, pero esa idea no duró mucho, y la gente pura terminó en el lado norte de la sala central común, y la aplicada en el sur. Como era de esperar, la mayoría de los matemáticos aplicados se preocupan por las aplicaciones científicas. Nuestra ala sur incluye un gran grupo de investigación conocido como OCIAM, el Centro de Matemáticas Industriales y Aplicadas de Oxford, cuyos orígenes están en la mecánica de sólidos y fluidos. También contamos con el Centro Wolfson de Biología Matematica y el Grupo de Finanzas Matemáticas y Computacionales. El trabajo de estos grupos de investigación parte de las aplicaciones de las matemáticas a la mecánica, el electromagnetismo, la biología, las finanzas y otras áreas. Una palabra clave es "modelado", ya que un matemático aplicado de este tipo usa las matemáticas para modelar el mundo natural, social o cibernético. La expectativa es que las matemáticas requeridas ya existirán en gran medida, como el concepto de ecuación en derivadas parciales, y también existirán las leyes científicas fundamentales que se manejan, como las ecuaciones de Maxwell para el electromagnetismo. De acuerdo con esta forma de pensar claramente simplista, las matemáticas aplicadas consisten en combinar estos ingredientes en formas no triviales para comprender fenómenos no triviales.

Bueno, esto no es lo que yo hago. (Ha habido dos excepciones en mi carrera, relacionadas con la transición a la turbulencia en la década de 1990 y las jaulas de Faraday, veinte años después). Soy uno de esos investigadores que desarrollan métodos en lugar de modelos. Lo mismo ocurre con muchos analistas numéricos, aunque no con todos. A veces se dice que nuestro enfoque está en las matemáticas "aplicables" en lugar de las matemáticas aplicadas.

No hay nada malo o extraño en esta situación. Es completamente correcto y apropiado que la población matemática incluya algunas personas interesadas en modelos y otras en métodos, y de hecho, en OCIAM y los otros grupos aplicados de Oxford encontrarás profesores que trabajan en los dos ámbitos, como Jon Chapman, un mago del análisis asintótico. Pero la fracción que se orienta principalmente hacia los métodos es pequeña.

Recuerdo haber discutido la cuestión de los modelos frente a los métodos durante un almuerzo con Harvey Greenspan un día cuando era profesor asistente en el MIT en la década de 1980. Greenspan, una figura dominante en el grupo y experto en mecánica de fluidos, dijo que el análisis numérico no era un tema de investigación serio. Ese sentimiento solía estar profundamente arraigado en algunas personas. Aparentemente la idea era que un buen científico puede descubrir métodos computacionales sobre la marcha, cuando los necesite. Por suerte, esta opinión ya no está tan extendida. Sin embargo, aún se da el caso que entre los matemáticos aplicados y los analistas numéricos hay a veces una cierta diferencia de perspectiva. Cuando Alain Goriely, catedrático de Matemática Aplicada y director de OCIAM, me mostró un borrador de su *Matemática Aplicada: Una muy breve introducción*, vi que las páginas dedicadas al cálculo numérico daban la impresión de que lo primero que uno debe saber sobre este tema es que ¡los resultados numéricos a menudo son incorrectos! Ahí está nuevamente nuestro talento para la publicidad. Goriely es un buen amigo, y cuando le señalé que esto se veía raro, lo arregló rápidamente.

La *utilidad* del análisis numérico en ciencia e ingeniería es indiscutible. En el MIT y luego nuevamente en Cornell, enseñé cursos de posgrado de álgebra lineal numérica y solución numérica de EDP que fueron tomados por estudiantes de doctorado de una docena de departamentos diferentes, ya que estas habilidades son necesarias en todas las áreas científicas. En Oxford, no existía el concepto de cursos interdepartamentales a nivel de doctorado, pero a partir de 1999, decidí introducir un curso de este tipo de todos modos, con una duración de dos trimestres con el título "Cálculo científico para estudiantes de doctorado". Enseñé esto diez veces y hay más de 500 alumnos de los distintos departamentos de la División de Matemáticas, Física y Ciencias de la Vida de Oxford que los han cursado.

9 Cinco áreas matemáticas

Hay cinco campos matemáticos de los que necesito hablar, comenzando con cuatro con los que mi carrera ha tenido conexiones desde hace mucho tiempo. Considero estos temas como uno de los logros duraderos de la humanidad. Al mismo tiempo, en cada caso, aunque he estado involucrado en el área durante décadas, mi relación con ella ha sido en ciertos aspectos extraña e insatisfactoria. Durante la mayor parte de este tiempo asumí que, sencillamente, yo tenía la culpa. Pero últimamente no estoy tan seguro.

1. Teoría de la aproximación, a partir de mi tesis de licenciatura.

2. Análisis complejo, comenzando con aquel curso de secundaria con David Robbins.

3. Análisis real y ecuaciones en derivadas parciales. Este fue el tema de mi tesis doctoral en Stanford y es un territorio central para el análisis numérico.

4. Análisis funcional. Mi trabajo en mi "período pseudoespectral", entre 1989 y 2004, estuvo relacionado fundamentalmente con valores propios y espectros de matrices y operadores, que es uno de los temas centrales del análisis funcional. A partir de entonces, durante mi "período Chebfun", me he preocupado por desarrollar análogos continuos de los conceptos discretos del álgebra lineal, lo cual es, a juzgar por las apariencias, la definición misma del análisis funcional. Estos cuatro campos cubren gran parte del lado analítico de las matemáticas. ¡Cómo encaja todo con las décadas!

   Y hay un quinto campo del que también hablaré, donde mi participación es más nueva pero sigue siendo importante para mí.

5. Probabilidad y procesos estocásticos. Esto se volvió personal con mi trabajo que condujo al comando randnfun de Chebfun en 2016.

10 Matemáticas de laboratorio

Antes de pasar a estas áreas, quiero decir unas palabras sobre cómo hago matemáticas. Mis hábitos comenzaron a formarse mientras trabajaba en mi tesis de último año en Harvard con Garrett Birkhoff, "Aproximación de Chebyshev en el plano complejo". Tenía reuniones semanales de media hora con el profesor Birkhoff en su oficina en la parte trasera de la biblioteca de matemáticas, donde había una piel de caimán colgada en la pared, pero la elección del tema de tesis fue mía.

Para bien o para mal, he hecho poco trabajo en mi carrera guiado por figuras más experimentadas.

Sin embargo, Birkhoff hizo una buena sugerencia cuando dijo que debería hablar con Phil Davis en la Universidad de Brown. Arreglé una cita debidamente y conduje hasta Providence, Rhode Island. El profesor Davis fue paternal e inteligente, y al escuchar mis preguntas, sacó de su estante un artículo absolutamente apropiado, de un tal Volker Klotz, que acababa de aparecer en el Journal of Approximation Theory. Estaba en alemán. ¿No lees alemán? preguntó Davis. ¡Deberías saber alemán! Esta fue una sugerencia que me cambió la vida, ya que siempre había evitado el estudio de idiomas extranjeros, pensando que esto era para personas menos serias. Empecé a aprender alemán ese verano y desde entonces ha formado parte de mi vida, a lo cual se unió más tarde el francés.

Los 21 años son un momento fundamental para cualquier persona, y la tesis de último año marcó el patrón de mi carrera. Era experto en programación de ordenadores y era natural que explorara lo que se podía hacer computacionalmente con la aproximación compleja de Chebyshev. Fue la primavera de 1977, entonces, la que me mostró el camino. *Hago experimentos numéricos.* Cualquiera que sea el tema, uso la computadora para guiarme. Esto se aplica cuando estoy trabajando en algoritmos y también cuando estoy trabajando en problemas teóricos. Por ejemplo, no puedo imaginar investigar el Teorema de la matriz de Kreiss o la Conjetura de Crouzeix sin hacer cálculos en el camino para dirigir mis pasos. Durante mucho tiempo me he maravillado de cómo la mayoría de los matemáticos prueban sus teoremas sin aprovechar este tipo de ayuda. (Es por eso que necesitan ser tan brillantes).

En aquella primera experiencia con este modus operandi, a los 21 años, escribí programas Fortran para dibujar curvas de error para aproximaciones complejas de Chebyshev. Los gráficos llevaron al emocionante descubrimiento de que estas curvas son casi circulares. ¡No solo circular en un pequeño porcentaje, sino a ¡una parte en un millón o un billón! La razón por la que fui el primero en ver esto fue porque fui el primero en hacer los experimentos. Uno o dos años más tarde, en Zúrich y Stanford, pude probar un teorema que establecía el efecto teóricamente, basándose en un resultado de 1925 que encontré en un libro en la biblioteca, y esto me llevó a una nueva construcción que llamé Aproximación de Carathéodory-Fejér, que resultó estar relacionada con otros temas de investigación que llegaron a conocerse como teoría AAK y aproximación a la norma de Hankel. También me llevó al descubrimiento numérico de cierto número 9.28903... que ahora se conoce con el nombre de constante de Halphen (o más bien su recíproco). Se puede apreciar cómo una fructífera experiencia de investigación como ésta, en una etapa temprana, puede ser muy formativa.

De manera similar, mi tesis doctoral, sobre velocidad de grupo en esquemas de diferencias finitas para ecuaciones en derivadas parciales, tenía muchos teoremas, pero todos surgieron de experimentos computacionales que me alertaron sobre ciertos efectos sorprendentes de la velocidad de grupo en discretizaciones numéricas, los cuales me di cuenta que podrían explicar la base física de una célebre teoría de la estabilidad debida a Gustafsson, Kreiss y Sundström.

Fue en el período previo a esta tesis que desarrollé el hábito de escribir notas de investigación mientras trabajo en un tema, de tres o cuatro páginas, generalmente presentando experimentos numéricos con figuras. Mi serie de memorandos *"Waves"* iba desde "1. Velocidades de onda en esquemas de diferencias finitas" (redactado el 25 de mayo de 1980) hasta "49. Diapositivas de una conferencia" (6 de abril de 1982). Hoy, cuarenta años después, acabo de terminar *Rat203* en la actual secuencia de "ratmemos" dedicada a las funciones racionales.

Como tercer ejemplo, mencioné anteriormente mi período pseudoespectral. Este surgió de los "gráficos de puntos" calculados por una computadora, que revelaban que los valores propios de las matrices no normales, como las matrices de Toeplitz no simétricas, se dispersan en una nube si las matrices se perturban ligeramente. Gradualmente, llegué a ver que los valores propios perturbados no solo te informan sobre el problema perturbado, sino que, lo que es más importante, codifican información sobre el comportamiento del problema no perturbado. Este fue el comienzo de la teoría de los pseudoespectros y mi descubrimiento de que en muchos temas de investigación que involucran matrices y operadores no simétricos, los valores propios no tienen el significado que generalmente se suponía. Con el tiempo, esta investigación llevó a la redacción del libro *Spectra and Pseudospectra,* con Mark Embree. A veces parece que toda mi carrera ha consistido en resolver las implicaciones de los fenómenos reveladas por diagramas calculados con computadoras, algo absolutamente obvio, pero la mayoría de la gente no lo practica.

La disciplina de la física se divide familiarmente en teórica y experimental, y todo el mundo entiende que ambas partes son esenciales para avanzar en la materia. En matemáticas, podría ser lo mismo, porque muchos fenómenos de interés en estos días son inobservables excepto en la computadora. Un ejemplo clásico es el famoso efecto conocido como caos, descubierto por Lorenz en simulaciones numéricas en 1961, y otro es el fenómeno de los solitones, ondas no lineales especiales descubiertas a través de simulaciones numéricas que comenzaron con Fermi, Pasta, Ulam y Tsingou en 1953 [17]. En general, sin embargo, el lado experimental de las matemáticas es más

[17] Estos ejemplos tuvieron precursores teóricos y observacionales, en particular el estudio de Poincaré sobre el problema de los N cuerpos en la década de 1880 y la observación de ondas solitarias de John Scott Russell en el Union Ship Canal en Escocia en 1834.

débil de lo que debería ser y no siempre recibe mucho respeto. De hecho, la frase "matemáticas experimentales" suena tenue en mis oídos, lo que sugiere que se trata de una actividad realizada por personas que desconocen los teoremas o son incapaces de apreciarlos. Por eso di a esta sección el título de "matemáticas de laboratorio".

Cuando las personas comparan la teoría y el experimento en matemáticas y en física, a menudo cometen un error lógico. En matemáticas, a diferencia de la física, tenemos demostraciones, y eso es magnífico. El error, sorprendentemente común, es suponer que las matemáticas tienen como fuente de conocimiento demostraciones en lugar de experimentos, cuando de hecho tienen demostraciones además de experimentos.

Nuestro laboratorio es maravillosamente liviano, ya que todo lo que necesita es una computadora. ¿Tienes una idea para un experimento? Si has estado entrenando tanto tiempo como yo, es probable que puedas llevarlo a cabo y obtener algunos resultados en una hora. (Los físicos no tienen tanta suerte). Tal experimento, por ejemplo, fue el primer paso para aprender que las "sucesiones aleatorias de Fibonacci", generadas por la ecuación

$$x_{n+1} = \pm x_n \pm x_{n-1},$$

donde cada signo $\pm$ proviene de un lanzamiento de moneda aleatorio, crece como $(1.13198824...)^n$ cuando $n \to \infty$. Mi estudiante de Cornell, Divakar Viswanath, ahora en la Universidad de Michigan, demostró el teorema y escribió el artículo, y el número 1.13198824... se llama ahora constante de Viswanath.

Se podría pensar que todos los analistas numéricos se comportan como matemáticos de laboratorio, y por supuesto, algunos lo hacen, pero es curioso cuántos no lo hacen. Con demasiada frecuencia, el análisis numérico se convierte en una especialidad más, en la que un matemático ha decidido aplicar su talento. Estas personas pueden inspirarse muy poco en la computación, y la tratan como una herramienta para confirmar teoremas más que como el punto central de su trabajo. Cuando se publica un artículo en este modo, este constará de unas 25 páginas de ecuaciones y teoremas que establecen las propiedades teóricas del método bajo consideración, seguidas de unas pocas páginas de experimentos numéricos, colocadas al final del artículo, para "verificar los resultados". Muy posiblemente los cálculos fueron hechos por un estudiante de doctorado, a quien quizás se le dieron las gracias por esta necesaria pero onerosa tarea.

11 Teoría de aproximación: mis primeros años

Recuerdo mi primer encuentro con la teoría de la aproximación. Para aproximar una función como e^x para valores $-1 \leq x \leq 1$, puedes usar algunos términos de la serie de Taylor, como

$$e^x \simeq 1 + x + 0.5x^2,$$

y obtendrá una precisión de 0.218. Pero en algún momento del camino, tal vez como estudiante de segundo año en Harvard, aprendí que puedes hacerlo mucho mejor con un polinomio del mismo grado que usa diferentes coeficientes, como este:

$$e^x \simeq 0.989 + 1.130x + 0.554x^2.$$

Ahora la precisión es de 0.045, cinco veces mejor. ¡Qué pasada!

La teoría de estas aproximaciones de Chebyshev o "minimax" me atrajo, y decidí escribir mi tesis de licenciatura en esta área.[18] La teoría de aproximación se extiende mucho más allá de mejorar este o aquel cálculo por un factor de 5. En última instancia, se ocupa de la cuestión fundamental de cómo podemos comprender las funciones.

En mis años de estudiante de doctorado, consideraba la teoría de aproximación como un tercio de mis ocupaciones, junto con el mapeo numérico conforme y los métodos de diferencias finitas para resolver ecuaciones en derivadas parciales. Doce de mis primeros 18 artículos fueron en esta área, la mayoría de ellos con Martin Gutknecht de la ETH en Zúrich, con quien formé una feliz colaboración después de pasar allí el verano de 1979. Esta fue la primera de las tres fases de mi carrera como teórico de la aproximación:

- I: Aproximación polinómica y racional, desde un punto de vista académico (1977–85)
- II: Aproximación polinómica desde un punto de vista numérico (2004–17)
- III: Aproximación racional desde un punto de vista numérico (2017–).

En la primera fase, se podría haber notado que provenía de un entorno no estándar, ya que estaba haciendo mi doctorado en un grupo de análisis numérico. Pero hice buenas contribuciones, especialmente en relación con la aproximación de Carathéodory-Fejér, la no-unicidad de las mejores aproximaciones racionales y el comportamiento de las aproximaciones de Padé. Asistí a conferencias de teoría de aproximación y a workshops en el centro de investigación matemática de

[18] Décadas más tarde, podemos calcular el número 0.045 con una línea de Chebfun: **f = chebfun('exp(x)'); p = minimax(f,2); norm(f-p,inf).**

Oberwolfach, y conocí a los líderes del área. Me sentía joven e inexperto, pero me gustaba aprender de los que sabían más, y estaba publicando una sólida serie de artículos con Gutknecht, y este fue un buen comienzo normal para un aprendiz de matemáticas.

Pero mi tesis de doctorado pertenecía a un área diferente, y me llamaron otros intereses más computacionales. De modo que a mediados de la década de 1980, pasé a otras cosas.

12 Teoría de aproximación: polinomios y Chebfun

Veinte años después comenzó la etapa de mi carrera en la que realmente he estado usando aproximaciones. De hecho, probablemente me he convertido en el ejemplo principal de un matemático que está aplicando la teoría de la aproximación para hacer cosas. Me refiero a la parte relativamente clásica, de una variable, del tema. Muchas personas están aplicando el lado multivariante en estos días en relación con el aprendizaje profundo, las redes neuronales y la ciencia de datos.

La llama fue encendida por el sistema de software Chebfun. Allá por 2001, mi estudiante de doctorado, Zachary Battles, me había pedido sugerencias de temas de investigación para su tesis, y el 4 de diciembre de ese año le envié un mensaje proponiéndole siete posibilidades. Zachary era un Rhodes Scholar de Pensilvania completamente ciego, y un destacado programador informático y una persona increíblemente talentosa en general. El número 3 de la lista era "Una extensión de Matlab para funciones", y este fue el tema que eligió. Así nació Chebfun[19] y, en 2006, era el centro de gran parte de mi trabajo.

Hablaré más adelante sobre la base conceptual de Chebfun. Lo que importa aquí es que su implementación depende de aproximaciones polinómicas. Chebfun realiza cálculos numéricos con funciones que se ejecutan en la computadora como chebfuns, lo que significa polinomios en forma de series de Chebyshev de grados determinados adaptativamente, o concatenaciones de dichos objetos. En cada paso, el sistema aproxima funciones por estas chebfuns con 15 o 16 dígitos de precisión. El proyecto se adaptaba perfectamente a mis intereses y creció de un estudiante al principio a diez estudiantes y posdoctor-

[19] Obsérvese que el nombre Chebfun es un juego de palabras en el que "Cheb" hace referencia al matemático ruso Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894) y "fun" puede interpretarse a la vez como una abreviatura de "función" y, más literalmente, como "divertido". Así, el nombre nos indica a la vez que, en la construcción del software, se usan los métodos de aproximación uniforme introducidos por Chebyshev en el siglo XIX y que el uso de los mismos resulta divertido para quien construyó los programas y para los usuarios. En mi opinión, esto no puede considerarse una casualidad sino un signo de que el nombre está bien meditado. (N. del T.)

ados durante el emocionante período 2011-2017. Chebfun es rápido y potente, y ha tenido mucho éxito, con miles de usuarios en todo el mundo y, según Google Scholar, cada 1.5 días (en promedio) se publica un nuevo artículo que lo cita.

Sin embargo, algo extraño sucedió. Cuando comencé a preocuparme por la aproximación de funciones, me encontré alejándome del campo de la teoría de aproximación. El problema, para decirlo sin rodeos, es que los teóricos de la aproximación no están muy interesados en aproximar funciones. Están interesados en llevar sus ideas matemáticas al siguiente paso lógico. Esta materia tiene un impulso propio, bastante independiente de su aparente razón de ser.

Pocos campos parecen tener un propósito tan claro como la teoría de aproximación, cosa que ya fue discutida, por ejemplo, por Paul Kirchberger, alumno de Hilbert, en su tesis doctoral, defendida en Göttingen en 1902. (He comentado el punto de vista de Kirchberger en mi libro *Approximation Theory and Approximation Practice.*) Pero lo cierto es que la aproximación de funciones es solo un punto de partida. El objetivo más amplio de la teoría de aproximación, como ocurre con tantos campos académicos, es seguir ciertas trayectorias intelectuales. Aquí, como siempre, los matemáticos están motivados solo en parte por el desafío de desarrollar herramientas útiles y, en igual medida, por el desafío de hacer que sus resultados sean lo más precisos posible. La doble obsesión de los matemáticos es hacer que todo sea a la vez lo más preciso posible y lo más general posible.

Permítanme ilustrar el encanto de la precisión con el problema de los puntos de interpolación óptimos. Resulta que si quieres interpolar una función $f(x)$ definida para $-1 \leq x \leq 1$ por un polinomio $p(x)$, entonces los puntos de interpolación equidistantes son una elección catastróficamente mala, mientras que los nodos de Chebyshev, agrupados cerca de $+1$ y -1, son excelentes. Este fenómeno fue explicado por Carl Runge poco antes de mudarse a Göttingen en 1904 como el primer catedrático de Matemática Aplicada de Alemania[20].

Pero, ¿son óptimos los nodos de Chebyshev? Este es justo el tipo de pregunta que le surge a un matemático, tan natural y tentadora. Hace un siglo se dieron cuenta de que no, no son óptimos, por lo que la pregunta fue, ¿qué se puede decir acerca de los puntos de interpolación óptimos? Bernstein hizo una conjetura en 1931 sobre cómo

[20]Runge era exactamente 99 años mayor que yo, ya que compartimos el cumpleaños el 30 de agosto (junto con Howard Emmons y Mark Embree, mencionados anteriormente). Cuando llegó la edad de jubilación de Runge, en 1924, lo primero que se pensó fue nombrar a otro catedrático de Matemática Aplicada como su sucesor. Sin embargo, se decidió que la distinción entre matemáticas puras y aplicadas ya no era útil, gracias en parte a las exitosas contribuciones del propio Runge, y tras una votación de la facultad de matemáticas, el título volvió a ser Catedrático de Matemáticas. (Ver Iris Runge, Carl Runge und sein wissenschaftliches Werk, p. 192.) Las matemáticas aplicadas resurgieron en Göttingen con el establecimiento del Instituto de Matemáticas Numéricas y Aplicadas en 1967.

se pueden caracterizar, y cincuenta años después, fue emocionante cuando Kilgore y de Boor finalmente pudieron demostrar que la conjetura es cierta. Los estudiantes aprenden estas cosas en los cursos de teoría de aproximación. Si le pregunta a un teórico de la aproximación si los nodos de Chebyshev son óptimos para la interpolación, lo más probable es que sepa que no, que no lo son.

Pero he aquí la locura. ¿Cuánto mejores son los nodos óptimos que los nodos de Chebyshev? ¿El doble de buenos? ¿Un 10% mejores? ¡Resulta que *son un cero por ciento mejores*! Para la interpolación de grado pequeño, podemos ganar un poco, pero este beneficio desaparece rápidamente y no ganamos nada a medida que aumenta el grado. Así que toda la literatura sobre los nodos de interpolación óptimos es más o menos un juego académico. Si preguntas a tu teórico de la aproximación sobre este jarro de agua fría sobre el desfile de la interpolación óptima, es muy probable que no lo sepa.

Los nodos de interpolación óptimos ilustran con qué facilidad los matemáticos se distraen con problemas bonitos de lo que uno podría haber imaginado que están tratando de hacer. La declaración verdadera, pero engañosa, "los nodos de Chebyshev no son óptimos" es un ejemplo de lo que llamé un "yoguismo inverso" en un ensayo que publiqué hace unos años en *Notices of the American Mathematical Society*. Los célebres comentarios peculiares de Yogi Berra, como "Un centavo ya no vale un centavo", son afirmaciones literalmente contradictorias o sin sentido, pero que transmiten una verdad. El peligro al que nos enfrentamos los matemáticos es justo el opuesto: realizamos afirmaciones que son literalmente verdaderas, pero que confunden lo esencial del asunto, están desenfocadas.

En el extremo opuesto a lo que se ha dicho sobre los nodos óptimos de interpolación, es decir, muy útil pero de poco interés para los teóricos de la aproximación, encontramos una aplicación de la teoría de la aproximación con gran valor práctico: el cálculo de raíces de funciones. Si $f(x)$ es una función definida para $a \leq x \leq b$, el mejor método para encontrar sus raíces es aproximarla mediante un polinomio p y luego encontrar las raíces de p resolviendo un problema de valor propio para una cierta matriz asociada. Este método funciona como magia, y fue propuesto por Jack Good en un artículo en 1961, y luego ejecutado en Chebfun cuatro décadas después. Por ejemplo, los comandos

```
f = chebfun(@(x) besselj(0,x),[0 1000])
r = roots(f)
```

calculan en mi ordenador portátil las 318 raíces de la función de Bessel $J_0(x)$ para $0 \leq x \leq 1000$ con una precisión de 15 dígitos en $1/40$ segundos. La raíz 100 es 313.3742660775.... ¿Están entusiasmados los teóricos de la aproximación con este fruto de sus investigaciones? No, la mayoría ni lo saben. Es algo que no tiene un pedigrí que lo conecte con los problemas clásicos investigados por los fundadores del área.

Al haber asistido a conferencias de teoría de aproximación al principio de mi carrera, podría haber retomado el hábito más tarde cuando me encontré reconectando con el área, pero casi nunca lo hice. Encontré demasiado académicas las conferencias y el trabajo que se exponía, demasiado alejados de los problemas prácticos de aproximación de funciones. Para una muestra del tipo de trabajo del que me he alejado, aquí están los títulos de los primeros cinco artículos publicados en el Journal of Approximation Theory en el año del milenio 2000. (Existe el principio de que un artículo de matemáticas siempre contiene algunos nombres propios en el título.)

> *"Sobre la velocidad de convergencia de los operadores generalizados de tipo Durrmeyer para funciones de variación acotada".*
>
> *"Un teorema de Korovkin para espacios abstractos de Lebesgue".*
>
> *"El operador maximal de Riesz de transformadas de Fourier bidimensionales y series de Fourier en $H_p(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ y $H_p(\mathbb{T}\times\mathbb{T})$".*
>
> *"Interpoladores mútiples de Hermite refinables".*
>
> *"Desigualdades de tipo Markov-Bernstein para polinomios de varias variables en conjuntos con cúspides".*

Ahora, en cada caso, puedo averiguar, con un poco de trabajo, qué se hace en el artículo y, de hecho, probablemente será interesante. Pero cuando se trata de computación, este tipo de investigación no es de mucha ayuda. No es ni más ni menos que matemática académica perfectamente normal.

Por lo tanto, a medida que me encontré usando la teoría de aproximación cada vez más, me interesé cada vez menos en aprender sobre nuevos resultados de investigación. El sentimiento era mutuo. Si en 1985 parecía un joven en ascenso, con el potencial de convertirme en un líder en el campo, en lo que me he convertido un tercio de siglo después es más peculiar que eso. Mi nombre es bien conocido, pero no soy una gran figura en la comunidad de la teoría de aproximación, y no me invitan a menudo a hablar en las conferencias.

Paradójicamente, en algún momento del camino parece que he escrito uno de los principales libros de texto en el campo, *Teoría de la aproximación y práctica de la aproximación* ("ATAP"). Me encantó trabajar en este proyecto, especialmente durante un año sabático en TU Berlin organizado por Volker Mehrmann. El libro tuvo una gestación inusual. En marzo de 2009, Max Jensen me invitó a dar un seminario en la Universidad de Durham. En ese momento, Chebfun se estaba volviendo muy bueno ilustrando conceptos de la teoría de aproximación, y se me ocurrió que para el seminario sería interesante mostrar algunas de estas capacidades, así que ofrecí el título "Teoría de la aproximación y práctica de la aproximación". Cuatro años después, apareció el libro. Para fortalecer el ATAP, decidí rastrear cada idea hasta su fuente original y enumerarlas todas en una bibliografía anotada.

Esto requirió una gran cantidad de trabajo, pues los matemáticos tienden a hablar largo y tendido sobre los aspectos más refinados de un tema, sin mencionar los gruesos. Por ejemplo, una función $f(x)$ definida para $-1 \leq x \leq 1$ tiene una *serie de Chebyshev* asociada. Hay dos formas básicas de aproximar la función f con un polinomio de grado n: truncas la serie[21] o interpolas f con un polinomio en $n+1$ nodos de Chebyshev. (Esta es una versión de la distinción entre "coeficientes" y "valores" que volveremos a ver más adelante). Los libros de texto existentes sobre teoría de aproximación (un grupo excelente y atractivo, por cierto, escritos en su mayoría hace unos cincuenta años) no señalan que existen estas dos posibilidades. No le dicen al lector cuán simple es la relación entre ambas, involucrando la llamada "fórmula de aliasing", ni muestran que son igualmente efectivos en la aproximación de funciones (dentro de los márgenes marcados por un factor de 2), ni presentan teoremas para los dos casos en paralelo. Tuve que resolver todo esto por mí mismo, incluso cuando al final muchos de los hechos clave resultaron haber sido resueltos hace un siglo y publicados en artículos como "Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein" (Marcel Riesz, 1916) .

13 Teoría de aproximación: las funciones racionales

Y entonces, hace seis años, comencé a involucrarme con las funciones racionales como nunca antes. Las funciones racionales son cocientes de polinomios, $r(x) = p(x)/q(x)$. Podría contar varias historias, pero me concentraré solo en la más extraña, la historia del sorprendente teorema de Donald Newman de 1964.

Siempre se había sabido que, mientras que los polinomios son buenos para aproximar funciones suaves, son terribles con las que no lo son. Por ejemplo, supongamos que deseas aproximar la función valor absoluto $f(x) = |x|$ para $-1 \leq x \leq 1$ con un error no mayor a 0.001. Entonces necesitarás un polinomio de grado $n = 282$ y, a medida que el grado aumenta más hacia ∞, el error disminuye solo en proporción a $1/n$. Esto es horrible y significa que los polinomios son inútiles para hacer algo práctico con funciones que no son suaves,

[21] Esto significa que podemos descomponer la función como $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x)$, donde $T_k(x)$ denota el k-ésimo polinomio de Chebychev en el dominio de la función y los "coeficientes" a_k dependen del comportamiento global de $f(x)$. Por truncar, se refiere a quedarnos con la suma finita $\sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x)$ para un cierto entero positivo n. (N. del T.)

excepto si asumimos una precisión muy baja.

Luego apareció el artículo de cuatro páginas de Donald Newman en el Michigan Mathematics Journal. Newman demostró que si tomas una aproximación racional de grado n a la función valor absoluto $|x|$ para $-1 \leq x \leq 1$, lo que significa que aproximamos dicha función con un cociente de polinomios p/q, donde p y q son de grado n, entonces la convergencia puede ser tan rápida como "la exponencial negativa de una raíz", es decir, los errores disminuyen a una tasa $\exp(-C\sqrt{n})$ para alguna constante $C > 0$. La aceleración es espectacular. El grado $n = 8$ ahora es suficiente para una precisión de 0.001 y el grado 26 para una precisión de 0.000001. ¡Qué diferencia!

Pero ahora viene algo sorprendente. La teoría de aproximación trata de aproximar funciones, ¿verdad? Y Newman acababa de publicar un resultado que mostraba que las funciones racionales son espectacularmente buenas para hacer eso, ¿cierto? Entonces, inmediatamente, en 1964, con gran entusiasmo, la gente debe haber comenzado a usar funciones racionales para todo tipo de cálculos, ¿no? Para nada. El resultado de Newman no tuvo ningún impacto en el cálculo numérico. Y en cuanto a los teóricos de la aproximación:

No aplicaron el teorema de Newman. Lo refinaron.

Como digo, esto es lo que hacen los matemáticos. Ninguno de nosotros mostró ningún interés en desarrollar algoritmos que exploten la velocidad de convergencia del tipo $\exp(-C\sqrt{n})$. En cambio, la atención se centró en el concepto teórico de "mejor" aproximación, buscando las aproximaciones exactamente óptimas, que son difíciles de calcular y, por lo tanto, de alguna manera, extra-interesantes.

Cierta cantidad de personas comenzaron a investigar estas mejores aproximaciones de $|x|$ para $-1 \leq x \leq 1$. Vyacheslavov en 1974 demostró que la constante óptima es $C = \pi$. Varga, Ruttan y Carpenter en 1993 encontraron más precisamente, a través de experimentos numéricos, que el error se comporta asintóticamente como $8\exp(-\pi\sqrt{n})$, un cálculo que requería trabajar con una precisión aritmética de 200 dígitos. Herbert Stahl demostró este resultado rigurosamente unos meses después. Luego, en 2003, Stahl generalizó el resultado al problema igualmente académico de estimar la mejor aproximación racional de $|x|^\alpha$, donde α es un número positivo arbitrario.

Ya habían transcurrido cuarenta años desde Newman. Los teóricos de la aproximación habían refinado y generalizado su descubrimiento. ¡Pero ninguno de nosotros lo había aplicado para hacer algo útil! Y, sin embargo, era extremadamente útil en potencia, ya que cada vez que resuelves una EDP en un dominio con esquinas (y en la práctica la mayoría de los dominios tienen esquinas), normalmente habrá singularidades de la misma naturaleza que las del problema de Newman (puntos de ramificación). Por tanto, su descubrimiento está estrechamente vinculado con problemas de interés científico, pero de esto no nos habíamos percatado. Tampoco habíamos investigado métodos para encontrar aproximaciones prácticas con precisión proporcional a la exponencial negativa de la raíz, a diferencia de las mejores aproximaciones exactamente óptimas que son tan fascinantes, pero tan difíciles de calcular.

Hablo de "nosotros", porque yo estaba tan distraído como los demás. La aproximación racional siempre había sido de mi interés, y conocí a Donald Newman en una reunión en 1985 en el pueblo inglés de Shrivenham, donde amablemente me elogió por encontrar una rima para ese nombre en una quintilla. Pero durante treinta años, a pesar de conocer y admirar el Teorema de Newman, no se me ocurrió intentar utilizarlo. Así que yo también, como todos los demás, casi olvidé cuál era el supuesto propósito de la teoría de aproximación.

De alguna manera, en 2016, mi perspectiva cambió y comencé a considerar las funciones racionales correctamente para la computación. Primero, Yuji Nakatsukasa, Olivier Sète y yo ideamos el "algoritmo AAA" para aproximación racional en la aritmética ordinaria de 16 dígitos, que ha abierto muchas puertas. Luego, mi alumno Abi Gopal y yo adaptamos el descubrimiento de Newman para crear lo que llamamos "solucionadores relámpago" para problemas de EDP en dominios con esquinas. La idea es resolver las ecuaciones de Laplace, biarmónica y de Helmholtz con muchos dígitos de precisión a través de aproximaciones racionales con polos agrupados exponencialmente cerca de cada esquina, tal como en las aproximaciones de Newman de $|x|$, y el nombre "relámpago" habla del vínculo matemático con la forma en que los rayos golpean árboles y edificios en puntas afiladas. Stefano Costa, Peter Baddoo y André Weideman han contribuido con más desarrollos. Todo esto podría haberse hecho hace cuarenta años. ¡Podría habérselo mostrado a Donald Newman!

14 Estudiante de doctorado en Stanford: Gene Golub, Serra House

Después de Harvard, quería hacer un doctorado en análisis numérico. Mi plan era ir a Berkeley, pero un día en la primavera de mi último año, Gene Golub me llamó por teléfono desde California y me dijo que Stanford era mejor. Me emocionó recibir una llamada de un profesor famoso, y fue amable y entusiasta, así que fui a Stanford. Si Velvel Kahan hubiera llamado, probablemente habría ido a Berkeley.

Inscribirse en Stanford implicó un cambio a un departamento de informática, ya que ese era el hogar del análisis numérico. Más tarde, Gene me dijo que había logrado el primer puesto entre los solicitaron realizar un doctorado en ciencias de la computación ese año, pero no tenía idea de esas cosas en ese momento y, de hecho, no había oído hablar de listas vinculadas u otros temas básicos de CS 101, ni había oído hablar de la mayor estrella del departamento, Don Knuth. Los estudiantes de ahora parecen administrar sus carreras de manera más científica que nunca, haciendo malabarismos con los datos cuidadosamente para optimizar sus opciones. Hice malabares con mis sentimientos y mis ambiciones, pero no usé muchos datos. En aquellos días no teníamos rankings de universidades del 1 al 500 para buscar en Internet[22].

Gene Golub era una persona extraordinaria, excepcional en el grado de su atención a la gente. Era soltero, y sus alumnos y colegas en análisis numérico eran su vida. Era grande y amigable y les decía a todos "Llámenme Gene" nada más conocerles. Parecía que había fiestas semanales en su casa, en el 576 de la avenida Constanzo, y en años posteriores él y yo nos mantuvimos en contacto, frecuentemente cenando juntos en un restaurante con algunos de sus otros amigos del departamento. De hecho, ya sea que estuviera en Oxford, Sydney o París, Gene tenía una forma de presentarse para una visita prolongada. A menudo tenía un regalo en la mano, como la última biografía de Robert Caro. Golub fue una parte regular de mi vida hasta su muerte en 2007 y una gran influencia para mí, incluso si trabajábamos en diferentes áreas. Yo era inusual en el círculo de Gene porque nunca escribía un artículo con él, y bromeaba, no sin razón, diciendo que yo era un snob de Harvard.

Fue gracias a Gene Golub que me involucré con SIAM y, de hecho, cuatro analistas numéricos de Stanford se han desempeñado como presidentes de SIAM y varios más como administradores. Fue gracias a él que asistí al primero de los congresos cuatrienales ICIAM (Congreso Internacional de Matemáticas Industriales y Aplicadas), una serie en cuyo establecimiento él cumplió una función importante. Eso fue en París en 1987, y 35 años después, soy una de las dos o tres personas que han asistido a los nueve ICIAM [23]. El próximo año planeo extender la racha a diez.

El Departamento de Ciencias de la Computación de Stanford, en 1977. De alguna manera había aterrizado en el corazón de Silicon

[22] Sin embargo, teníamos Internet, que entonces se llamaba ARPANET, y yo ya tenía una dirección en 1978, entre los primeros miles: yo era CSD.TREFETHEN@SU-SCORE. Solo un pequeño grupo de universidades y laboratorios nacionales estaban conectados, pero estos incluían Stanford y Harvard, por lo que pude intercambiar correos electrónicos con mi novia en casa (una alumna de Math 55, demasiado para la testosterona). No recuerdo cómo llamábamos a los mensajes, pero no era una palabra tan corta como 'email".

[23] Sir Michael Atiyah, una de las cuatro personas que hasta la fecha han ganado la medalla Fields y el Premio Abel, pronunció una conferencia plenaria en este primer congreso ICIAM en la que remarcó que la matemática aplicada se alimenta de las migajas que caen de la mesa de la matemática pura. Ese comentario llamó la atención.

Valley en sus inicios, cuando se estaban creando las interfaces TeX y WIMP y SUN Microsytems y Silicon Graphics, Inc. Ocupé mi puesto en un grupo legendario de estudiantes de posgrado junto a Marsha Berger, Petter Bjørstad, Dan Boley, Ken Bube, Tony Chan, Bill Coughran, Bill Gropp, Eric Grosse, Mike Heath, Randy LeVeque, Franklin Luk, Stephen Nash y Michael Overton, y también los estudiantes afiliados Jonathan Goodman, Nick Gould y Jorge Nocedal. Muchas de estas personas ahora son famosas en nuestro campo. Todo el grupo, junto con los numerosos visitantes de Gene, teníamos nuestros escritorios en una espaciosa antigua casa familiar llamada Serra House, con un árbol de caquis en el patio.

Los profesores invitados en mi primer año en Stanford incluyeron a Germund Dahlquist y Jim Wilkinson, figuras destacadas del análisis numérico del siglo XX [24]. Y no he mencionado a mi director de tesis, el generoso y simpático Joe Oliger, ni a los otros profesores del grupo, Jack Herriot y más tarde a mi buen amigo Rob Schreiber. Fue Gene quien reunió a estas personas, todas unidas por el amor por el análisis numérico. Más tarde en Oxford, esta fue mi visión de cómo debería ser un grupo de investigación.

La importancia de Gene Golub en la historia del análisis numérico está relacionada con una transición histórica y un choque de terminología. Clásicamente, las raíces del álgebra lineal están en el álgebra. Por ejemplo, los valores propios de las matrices se consideran tradicionalmente cantidades algebraicas, que tienen elegantes propiedades de invariancia que se remontan al siglo XIX. Sin embargo, el álgebra lineal también es una parte del análisis matemático, donde los objetos correspondientes son valores singulares, siendo la descomposición en valores singulares (SVD) la herramienta que necesitas si quieres medir el tamaño de una matriz o de su inversa. La SVD apenas se conocía cuando Golub comenzó a defenderla en la década de 1960, pero ahora se usa en todas las ciencias computacionales. Este lado cuantitativo y analítico del tema es el que nos importa a los analistas numéricos, por lo que para los propósitos de este ensayo, el "álgebra lineal" pertenece al análisis, no al álgebra. Gene prefirió evitar por completo la palabra "álgebra" y hablar de "cálculo matricial".

15 Análisis complejo y Peter Henrici

Las matemáticas continuas tratan de funciones, y las funciones viven en el plano complejo. Este es el plano de los números complejos

[24] Asistí a dos cursos de Wilkinson, quien estaba empatado con el analista complejo Max Schiffer como mi conferenciante favorito en Stanford. Wilkinson, con su traviesa sonrisa inglesa, era en el fondo un matemático de laboratorio. Habló fascinantemente sobre sus experimentos en la computadora Pilot Ace a partir de 1949, tratando de averiguar por qué los errores se comportaban como lo hacían y, finalmente, llegó a la explicación que llamó análisis de errores hacia-atrás.

$z = x + iy$, donde x es la parte real de z, y es la parte imaginaria e i se define por la fórmula mágica $i^2 = -1$. "Vivir en el plano complejo" es una forma de decir que, aunque puedes examinar una función como $f(x) = \sin(x)/(1 + x^2)$ para los números reales x, no entenderás completamente sus propiedades hasta que la veas como $f(z) = \sin(z)/(1 + z^2)$. Los matemáticos han entendido esto desde Cauchy, Weierstrass y Riemann en el siglo XIX. Por ejemplo, las ideas de integrales y series infinitas cobran pleno vigor en el plano complejo.

Como ya he mencionado antes, tuve la suerte de estar expuesto a este tema muy temprano. Me gustó mucho, así que era natural que eligiera escribir mi tesis de pregrado sobre la aproximación de Chebychev en el plano complejo. Y luego, con la ayuda de unas palabras sobre mí de su amigo Birkhoff, conocí al matemático suizo Peter Henrici, que estaba escribiendo su gran obra en tres volúmenes, *Applied and Computational Complex Analysis*. Henrici pasó el otoño de 1978 visitando Stanford y, por sugerencia suya, me puse a trabajar en el tema del mapeo numérico de la transformada conforme de Schwarz-Christoffel. Pasé todos los fines de semana de ese otoño en el centro de computación SLAC desarrollando mi algoritmo, informando sobre mis progresos a Henrici de lunes a viernes. El proyecto resultó en uno de los primeros métodos numéricos robustos y el correspondiente programa de computadora para el mapeo conforme, que más tarde se convirtió en la Toolbox SC para Matlab, gracias a Toby Driscoll, que actualmente trabaja en la Universidad de Delaware. También condujo a mi primera publicación, que apareció en el número inaugural de la nueva revista de Golub, entonces llamada SIAM *Journal on Scientific and Statistical Computing*. Este artículo tiene algunas buenas imágenes de aplicaciones conformes, generadas por ordenador, y todos mis artículos posteriores también contienen figuras calculadas computacionalmente, con solo una o dos excepciones. Esto es típico para muchos analistas numéricos.

Publiqué un preprint del artículo sobre la transformada conforme de Schwarz-Christoffel en marzo de 1979 como CS-TR-1979-710 en la serie de informes técnicos de ciencias de la computación de Stanford, y creo que este fue el tercer informe que utilizó para su redacción el paquete TeX, que Don Knuth acababa de crear. El primero fue el manual de TeX de Knuth, STAN-CS-78-675[25], en noviembre de 1978, y el segundo fue CS-TR-1979-703, de Bengt Aspvall. Durante décadas, TeX (o más bien su variante LaTeX) ha sido el sistema de composición tipográfica universal para matemáticos, físicos e informáticos.

Henrici y yo nos llevábamos bien. Él era un profesor europeo de unos cincuenta años acostumbrado a dominar la sala, y yo era un chico de 23 años, pero teníamos en común, ante todo, el amor por las matemáticas numéricas. Cuando aparecieron las calculadoras

[25] Donald E. Knuth, Tau Epsilon Chi, a system for technical text, Noviembre 1978.

de bolsillo programables, él fue el primero en escribir un libro de análisis numérico para ellas (*Computational Analysis with the HP-25 Pocket Calculator*, 1977), al igual que cuando salió Matlab, yo sería el primero en publicar un trabajo de investigación que incluía un programa Matlab (*"Programas Matlab para aproximación CF"*, 1985). Igualmente importante, compartimos el amor por las palabras, la escritura y la mecanografía. Más tarde, cuando Henrici regresó a Zúrich, nos escribimos docenas de cartas matemáticas en nuestras máquinas de escribir IBM Selectric. (Él tenía un modelo más antiguo, sin la tecla de borrado.) Fue por invitación de Henrici que visité la ETH en 1979, y aquel verano, durante un par de semanas, cuando él estaba en las montañas cumpliendo con el servicio militar suizo, me prestó su oficina en la Hauptgebäude con sus grandes ventanales con vistas a la Polyterrasse y la ciudad y el lago de Zúrich. Había un estante junto al escritorio con una pila de libros que él había escrito, y recuerdo haberle prestado bastante atención a ese estante.

Para mi pesar (y es algo que sentiré toda mi vida), Henrici murió temprano, a los 63 años en 1987. No me di cuenta cuando estaba vivo de lo mucho que significaba para él, porque es más fácil para un hombre mayor verse a sí mismo en uno más joven que al revés. A Henrici le gustaba mi frescura americana y mi confianza para hacer matemáticas con la computadora. Al escuchar cómo había calculado mapas SC combinando el código de Golub y Welsch para la cuadratura de Gauss-Jacobi con el código de Powell para la solución cuasi-Newton de sistemas no lineales, exclamó con una gran carcajada que se trataba de una ´´sinfonía de computación". Los estudiantes de posgrado de su grupo en la ETH, que eran mayores que yo y, de hecho, en dos casos estaban casados y tenían tres hijos, probablemente se preguntaron por qué este advenedizo estadounidense estaba recibiendo tanta atención. Henrici insistió en que debía llamarlo Peter, aunque sus estudiantes no recibían esa oferta hasta que terminaban sus doctorados. Recuerdo que un día me confió que sentía que a los jóvenes que lo rodeaban no les gustaban mucho las palabras. Pensaba que hablaban muy despacio y le gustaba mi facilidad verbal.

Ojalá Henrici hubiera vivido el rango de una vida normal. He estado cerca de varias figuras importantes a lo largo de los años, en particular Gene Golub, como ya mencioné, y también Gil Strang y Cleve Moler, pero Henrici y yo teníamos algo especial. Algo que nunca tuvo una verdadera oportunidad de desarrollarse.

Cuando llevé mi borrador del artículo de Schwarz-Christoffel a su oficina, hacia el final de su periodo en Stanford, formateado en TeX, por supuesto, había escrito los nombres de ambos en la cabecera. "Oh, no necesito otra publicación", dijo Henrici generosamente. Así que eliminé su nombre y me convertí en el único autor; pero ahora desearía haber insistido.

16 Análisis complejo: CAvid y CMFT

He estado trabajando con variables complejas desde entonces. A veces, esto es para aplicaciones que son obviamente complejas, como el mapeo conforme o la aproximación de Padé, pero con la misma frecuencia es para problemas que, a primera vista, involucran solo números reales, pero en los que se necesita el contexto complejo para hacerlo realmente bien. Por ejemplo, en mis artículos sobre la cuadratura de Clenshaw-Curtis, sobre funciones en el hipercubo de d dimensiones y sobre cómo resolver la ecuación de Laplace en un polígono, los algoritmos, teoremas y demostraciones se basan en variables complejas.

En el análisis numérico, nos gustan los algoritmos que convergen rápidamente a medida que aumenta el número n de pasos o parámetros y, en el mejor de los casos, esto significa que convergen a una tasa exponencial cuando las funciones a las que se aplican son lo suficientemente suaves. Suficientemente suave significa que la función es analítica, la condición de tener series de Taylor convergentes en cada punto. Aquí es donde entra el tema de las variables complejas, ya que si una función es analítica, se puede extender desde la recta real al plano complejo, y la convergencia exponencial a menudo se puede probar analizando una integral de contorno compleja. Por ejemplo, el método más famoso para calcular una integral real $\int_a^b f(x)dx$ se conoce como cuadratura de Gauss, que implica tomar muestras de f en n puntos entre a y b y luego sumar dichas muestras multiplicadas por ciertos pesos. Aquí está el sorprendente resultado del siglo XIX:

Teorema. Si f es analítica, la cuadratura de Gauss converge exponencialmente.

Este teorema nos dice que la cuadratura de Gauss tiene la propiedad buena más básica que podríamos pedir. Pero, ¿sabes algo extraño acerca de este teorema fundamental? ¡No aparece en casi ningún libro de texto!—aunque casi todos los textos de análisis numérico enseñan al lector la cuadratura de Gauss[26]. Una razón puede ser que la noción de analiticidad se considera demasiado avanzada, a pesar de que ha sido la base de la comprensión de las funciones por parte de los matemáticos durante 200 años.[27] Otra puede ser que los autores de los libros de texto no conozcan el teorema, ya que aprendieron el tema

[26] Folkmar Bornemann ha señalado que el teorema se puede encontrar como Corolario 5.3.5 en Métodos Numéricos en Computación Científica I, por Dahlquist y Björck (2008)

[27] Ver, por ejemplo, el artículo de Luzin: "Función", Gaceta de la RSME 6.2 (2003) 413-436. Traducido del inglés por J. M. Almira y D. Arcoya, publicado originalmente en ruso por N.N. Luzin en la Gran Enciclopedia Soviética Vol 59, 314-334, en la década de 1930. (N. del T.)

de los libros de texto anteriores. De hecho, los analistas numéricos suelen ser bastante flojos en variable compleja. Tal vez no fue así en las décadas de 1950 y 1960, pero no se puede hacer mucho, y el tema vital del álgebra lineal numérica se ha expandido tanto desde entonces que consume mucho oxígeno. Los analistas numéricos de hoy manejan Matlab con fluidez y saben cómo precondicionar una iteración del subespacio de Krylov, pero la mayoría de ellos no ha tocado una integral de contorno desde sus días de estudiante.

¿Qué pasa con los analistas numéricos como yo, que usamos variable compleja todo el tiempo? Sin duda hay una comunidad de expertos a los que podemos llamar para pedir consejo, ¿no? Aquí es donde el tema se vuelve doloroso. Sí, hay cientos de especialistas en análisis complejo en todo el mundo. Saben más que yo sobre muchas cosas y, a veces, puedo recurrir a su experiencia. Sin embargo, por lo general, cuando lo he intentado, no he llegado muy lejos. Nuestros lenguajes y sistemas de valores son demasiado diferentes.

El análisis complejo no se considera una de las áreas de moda de las matemáticas en estos días, y algunos de estos especialistas probablemente se sientan aislados en sus departamentos. Un artículo típico en esta área tiene menos impacto que uno mío, al menos según lo medido por las citas, por lo que podrías imaginar que los expertos estarán ansiosos por conversar conmigo. Sin embargo, no es así como funciona la naturaleza humana. Ellos están entrenados en una forma de pensar y yo en otra, y para cada uno de nosotros, las preocupaciones de los demás no parecen tan importantes.

Por cierto, si observas los temas de investigación estudiados por los analistas complejos verás muchas palabras que parecen computacionales. Ellos "estiman" y "calculan" todo el tiempo, al igual que muchos otros matemáticos. Pero estas estimaciones y cálculos son conceptuales. La computación en el sentido de trabajar realmente con números es una actividad marginal.

En mi año sabático de tres meses en la Universidad de Ginebra, en 2014, tenía una oficina al lado del medallista Fields Stas Smirnov, uno de los analistas complejos más emocionantes que hay, pero solo pude hablar con él una vez. Yo estaba trabajando en las matemáticas del efecto de la Jaula de Faraday, que inexplicablemente nunca se había resuelto desde el descubrimiento original de Faraday en 1836; incluso Richard Feynman en sus *Lectures* se equivoca. Este tema está íntimamente ligado a la variable compleja, pero no pude capturar el interés de Smirnov. Si el mismo problema lo hubiera traído a su puerta un colega de su propia área, su compromiso podría haber sido diferente, pero como analista numérico, yo no estaba en el grupo de personas a las que él estaba predispuesto a prestar atención.

Durante la pandemia de Covid, Rod Halburd ha organizado magníficamente una serie de conferencias "CAvid" en todo el mundo, las "video conferencias de análisis complejo". Desafortunadamente, tras un estallido inicial de entusiasmo, me he perdido muchas de estas charlas, que tienen títulos como "Energía de Loewner-Kufarev y foliaciones por cuasicírculos de Weil-Petersson". Cuando veo un título como ese, sospecho que el conferenciante y yo podemos tener poco en común. Entonces caigo en el hábito de no prestar atención y, sin duda, como consecuencia, pierdo algunas cosas que serían interesantes.

Yo mismo di una charla CAvid y decidí comenzar con algunos comentarios personales sobre estas dificultades. Así es como lo expresé:

> Quiero decir unas palabras sobre nuestro campo, el análisis complejo, y sobre mí. Como dice Rod, soy un analista numérico, pero casi todo lo que he hecho, o digamos dos tercios de las cosas que he hecho a lo largo de los años, se basan en variable compleja. Esa es mi zona de juegos y quizás mi principal ventaja como analista numérico, porque muchos analistas numéricos no son tan buenos en análisis complejo. Pero lo personal que quería decir es algo triste, y es que tengo muy poca conexión con esta comunidad, la comunidad de analistas complejos más teóricos. No conozco a la mayoría de los que participáis en esta videoconferencia, no he conocido a las tres cuartas partes de ustedes. No leo vuestros artículos, con algunas excepciones, y probablemente ustedes no leen los míos. Es sorprendente lo separado que está el mundo computacional práctico del mundo teórico. Eso no puede ser bueno. No tengo una solución que ofrecer, pero no puede ser buena y, en particular, para mí personalmente, significa que no me he beneficiado de los expertos a lo largo de los años tanto como debería. Así que trabajo en un proyecto; está en gran medida inmerso en el plano complejo; sé que debe haber expertos por ahí a los que debería preguntar. Por lo general, no sé quiénes son y normalmente no logro preguntarles. Qué desperdicio.

Otra empresa impresionante en análisis complejo es CMFT, que significa Métodos Computacionales y Teoría de Funciones y es tanto una serie de conferencias internacionales cuatrienales, desde 1989, como una revista de alta calidad, desde 2001. (Teoría de funciones es otro nombre para análisis complejo). Para empezar, la visión anunciada ha sido la de fusionar lo numérico y lo teórico:

> CMFT es una revista matemática internacional que publica trabajos de investigación originales cuidadosamente seleccionados en análisis complejo (en un sentido amplio) y sobre aplicaciones o métodos computacionales relacionados con análisis complejo.

Me emocioné cuando se anunció esta visión y acepté felizmente la invitación para ser uno de los editores inaugurales de la revista. Desafortunadamente, la "C" en CMFT ha resultado ser silenciosa. Las personas como yo han terminado desempeñando un papel menor, y los artículos publicados en la revista solo ocasionalmente tienen un verdadero compromiso con las aplicaciones o los métodos computacionales. El consejo editorial ahora tiene 53 miembros, solo uno de los cuales, Lothar Reichel, es conocido como analista numérico. Creo que la culpa de esta situación es de ambos lados. A los analistas complejos más puros les gustaría estar más cerca de la computación, pero no saben qué pasos dar, y a los computacionales como yo les gustaría estar más cerca de los desarrollos teóricos, pero no sabemos con cuáles sintonizarnos. Mientras escribo, la novena conferencia CMFT acaba de tener lugar en modo virtual. Ninguno de los oradores invitados eran personas numéricas y, aparte de la mía, pocas de las charlas aportadas mostraron evidencia de cómputo real. Creo que la demostración en vivo en mi charla fue la única en la conferencia.

Rainer Kress de la Universidad de Göttingen me ha mostrado otro ejemplo del fenómeno de la "C silenciosa". Una de las revistas de matemáticas más antiguas es *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, fundada en 1826. Aunque el nombre significa "Revista de matemáticas puras y aplicadas", esta revista es en realidad pura.

Pero volvamos a la variable compleja. Afortunadamente, hay un pequeño grupo de buenos amigos que comparten mi alegría por la computación en el plano complejo, incluidos Peter Baddoo, Stefano Costa, Tom DeLillo, Toby Driscoll, Bengt Fornberg, Nick Hale, Cécile Piret, Alex Townsend, Elias Wegert, André Weideman y Heather Wilber. Eche un vistazo a los espectaculares calendarios "Bellezas complejas" de Wegert y sus colegas y verá a qué me refiero.

17 Postdoctorado en NYU con Peter Lax: lo puro y lo aplicado otra vez

Oh, las matemáticas son hermosas. El análisis real, el estudio de funciones de una variable real, ¡contiene teoremas tan potentes! Continuidad, compacidad, transformadas de Fourier,... la elegancia e importancia de estos temas es profundamente satisfactoria. Y el análisis real conduce al lenguaje de las leyes de la naturaleza, las ecuaciones en derivadas parciales o EDP. Cuando Maxwell descubrió cómo funcionan las ondas de luz, fue gracias a una EDP. Cuando Einstein predijo las ondas gravitacionales, fue por una EDP. La química se basa en la ecuación de Schrödinger, la mecánica de fluidos en las ecuaciones de Navier-Stokes y la ingeniería civil en las ecuaciones de elasticidad.

Mi tesis doctoral en Stanford fue en esta área, específicamente, la solución numérica de EDP hiperbólicas. Para el siguiente paso postdoctoral, el lugar más glamuroso para ir era el Courant Institute of Mathematical Sciences de la Universidad de Nueva York (NYU), en Greenwich Village, Nueva York. A diferencia de la mayoría de los departamentos de matemáticas, el Instituto se centró en una sola área, a saber, el análisis real, las EDP y su análisis numérico y, en su constelación de estrellas, la más brillante era Peter Lax. Lax era un niño prodigio de Hungría que había trabajado en el Proyecto Manhattan cuando era adolescente. Ahora, con 56 años, estaba en su mejor momento, y estuve en Courant durante dos años con él como mi supervisor postdoctoral con una beca de la NSF.[28] También enseñé un curso cada año como Profesor Asistente Adjunto.[29]

Si todos los matemáticos fueran como Peter Lax, este ensayo no sería necesario. Su brillantez y encanto marcaron la pauta para el Instituto, donde fue un imán tanto social como intelectual. En el almuerzo nos reuníamos con él en el salón del piso 13, y la conversación siempre tenía sustancia. A veces, primero llevaba un grupo a Dean & DeLuca's en el Soho para elegir los ingredientes correctos, porque, por supuesto, tenía gustos gourmet y quería dar la bienvenida a otros a su mundo. Recuerdo su mirada centelleante y su pelo rizado y su curiosidad por todos los temas. A su manera centroeuropea, parecía saberlo todo sobre música y también sobre literatura.

No trabajé con Lax, porque tenía media docena de posdoctorados en la lista y mis gustos eran más computacionales que los suyos. Pero su influencia sobre mí seguía siendo grande, y cuando digo que si todos fueran como él las cosas podrían ser diferentes, me refiero a algo específico. La mente matemática de Lax abarcaba tanto lo puro como lo aplicado. Sus publicaciones tenían un estilo puro, centrándose en teoremas probados con perfección técnica, pero conocía y apreciaba también las cosas aplicadas. Tuvo un enorme impacto en el análisis numérico a través de célebres teoremas que encapsulaban exactamente el punto correcto en cada área, como el Teorema de equivalencia de Lax, que yo había estudiado como alumno de posgrado.

Existe la opinión, muy extendida, que mencioné anteriormente, de que la matemática es una, que la diferencia entre pura y aplicada es ilusoria. Esto es una tontería, y en mi experiencia generalmente es una opinión sostenida por matemáticos puros, que a menudo imaginan que ellos mismos son aplicados, o creen que podrán ser aplicados fácilmente si lo deciden. Ya conoces ese chiste, ¿cuál es la diferencia entre un entomólogo y etimólogo? Un etimólogo conoce la diferencia. Creo que hay un principio como este en las matemáticas. ¿Cuál es la diferencia entre un matemático puro y uno aplicado? El matemático aplicado sabe que hay una diferencia.[30] Nuestra misión, la misión de este ensayo, es fomentar una mejor comunicación entre las muchas

[28] NSF=National Science Foundation. (N. del T.)

[29] Fue en ese momento, nuevamente en la misma costa que mi padre, Lloyd MacGregor Trefethen, que comencé a usar mi segundo nombre, Nick.

[30] En su ensayo de 1981 con el notorio título “Las matemáticas aplicadas son malas matemáticas”, Paul Halmos hace la misma distinción, ¡pero en la otra dirección!

partes de las matemáticas sin pretender que todas son iguales.

Lax fue lo bastante brillante y amplio de miras como para lograrlo. Si todos fuéramos como él, las matemáticas podrían realmente ser una única cosa, pero la mayoría de nosotros no somos tan extraordinarios. Las matemáticas puras tienen sus ojos en la historia, prefiriendo trabajar sobre ideas que seguirán siendo importantes dentro de 100 años, que por buenas razones pueden ser a menudo muy abstractas y generales. Para los que están en lo más elevado, esta orientación puede ser realista, y de hecho, uno de los triunfos del espíritu humano es que podemos crear matemáticas que perduran por siglos. Para el investigador medio, sin embargo, este modelo no siempre es bueno, y contribuye a que los matemáticos tengan tanta dificultad en comprenderse unos a otros.[31]

18 Análisis real y EDPs: regularidad

Habiendo concedido bastantes páginas a dos de mis cinco campos, corro el riesgo de extenderme aterradoramente con los tres restantes. Para evitar eso, me limitaré a una observación para cada uno. Para el análisis real y las EDP, mi tema es la suavidad o, como lo llaman los matemáticos, la "regularidad".

¿Qué tan suave es una curva? La idea básica para responder tales preguntas es usar derivadas. Si una función es continua, eso no es mucha suavidad, pero si puede diferenciarla, es decir, tomar una derivada, eso es bueno. Si puedes derivarla dos veces, eso es mejor. Entonces, la medida básica de la suavidad es el número de derivadas que puedes tomar, y existen nociones estándar como $C^k([a,b])$, el conjunto de funciones definidas para $a \leq x \leq b$ cuyas k-ésimas derivadas existen y son continuas. Tales ideas se aplican no solo a funciones de una sola variable, es decir, curvas, sino también a funciones de varias variables, a saber, superficies.

El grado de suavidad de una función no necesita ser simplemente un número entero como 0, 1 o 2. Podemos hablar de una función que tiene 'media derivada" de suavidad, apelando a una noción conocida como continuidad de Hölder. También hay otra tecnología que se llama espacios de Sobolev. Con los espacios de Sobolev se pueden considerar de forma sistemática los conjuntos de todas las funciones que se pueden ser diferenciadas fraccionariamente, digamos, $1/2$ o $\sqrt{2}$ o π veces, que son representados con las notaciones $H^{1/2}$, $H^{\sqrt{2}}$ y H^{π}. Las matemáticas son elegantes y, por supuesto, completamente

[31] He trabajado en comités para otorgar becas para matemáticos puros. Para explicar por qué un candidato se lo merece, un árbitro comenzará intentando describir la sustancia de sus logros, pero esto es difícil. Muy pronto la recomendación se aleja de la sustancia y recurre a afirmar lo brillante que es el candidato. Cada disciplina juzga a las personas en parte por su brillantez, pero ninguna otra llega tan lejos como las matemáticas.

rigurosas. Si desea más refinamientos, hay espacios de Besov $B^s_{p,q}$ y espacios de Triebel-Lizorkin $F^s_{p,q}$. Recuerdo un momento de mi etapa postdoctoral en el que pensaba que todo esto era muy importante, que debería entender los detalles de los espacios Besov.

Ahora bien, ¿por qué nos tomamos la molestia de este delicado análisis? Al principio, las matemáticas nos obligan a hacerlo. Por ejemplo, supongamos que tenemos una función f y queremos trabajar con su serie de Fourier, una descomposición en una colección infinita de senos y cosenos. Naturalmente nos preguntamos, ¿converge la serie a f? Resulta que para que la convergencia esté asegurada, no es suficiente que f sea continua, pero es más que suficiente que f sea diferenciable. Así que, por supuesto, los matemáticos quieren encontrar un criterio preciso para exactamente cuánta suavidad se requiere. Resulta que cualquier cantidad (positiva) de diferenciabilidad es más que suficiente, como la mitad de una derivada o una millonésima parte de una derivada. Por lo tanto, entran en juego análisis más refinados de funciones que no tienen ninguna diferenciabilidad en absoluto, pero que aún son un poco más suaves que si solo fueran continuas. Es una historia larga y técnica, adictiva en sus complejidades, y muchos matemáticos han contribuido a ella. El libro de texto de Barry Simon sobre análisis armónico, que es como se llama este tema, tiene 759 páginas, y no es una simplificación demasiado extrema decir que su proyecto central es desarrollar teoremas que relacionen diferentes medidas de suavidad de funciones con diferentes propiedades de convergencia de sus series y transformadas de Fourier.

Así que la teoría de la regularidad parte de cuestiones naturales, pero se ha convertido en un monstruo que consume todo lo que está a la vista. Los matemáticos son objeto de burlas porque se interesan por la existencia de una solución sin preocuparse por cómo encontrarla, pero una caricatura igualmente buena se podría basar en su preocupación por la regularidad. ¿Qué tan suave es este objeto? Aunque a los científicos e ingenieros apenas les importa, esta pregunta, formulada de mil modos distintos, domina el análisis real y la teoría de EDP. Recibe mucha más atención que las preguntas que podríamos haber pensado que son más fundamentales, como: ¿Qué tan buena es esta ecuación como modelo de un problema científico? ¿Cómo podemos encontrar sus soluciones? ¿Cómo son las soluciones? ¿Qué fenómenos revelan?

Como siempre, estamos nuevamente ante un caso relacionado con la atracción que sienten los matemáticos por los desafíos del refinamiento, la generalidad y la dificultad técnica. Acabo de buscar los artículos publicados en lo que va de año en la revista *Partial Differential Equations* de Springer y en la revista de la Universidad de Nueva York *Communications on Pure and Applied Mathematics.* Cinco de los 17 mencionan la regularidad en sus títulos.

Un tema de este ensayo ha sido que a menudo vemos al matemático puro haciendo una cosa y al analista numérico haciendo otra. Pero la teoría de la regularidad para las EDP es una excepción, ya que aquí los analistas numéricos han seguido a los teóricos. Estoy hablando especialmente de la tecnología dominante para resolver EDPs conocida como el método de los elementos finitos. En la literatura del análisis numérico de elementos finitos, rara vez verá un problema planteado, y mucho menos investigado, en otros términos, excepto el uso de los espacios de Sobolev.

Si es un problema de mecánica de fluidos, se puede suponer que la velocidad pertenece a H^1, la presión a H^0 y el gradiente de presión a H^{-1} (un espacio de funciones con "derivada menos 1"). La discretización con elementos finitos y su teoría de convergencia se ajustarán a estos espacios. Todo encaja a la perfección, con todas las piezas entrelazadas de forma elegante.

Es impresionante, pero ¡qué lejos de las funciones que surgen en las aplicaciones! Dejénme que lo explique. Hace años, en los días de Euler y Lagrange, la suposición predeterminada era que una función estaría dada por una fórmula, lo que significa esencialmente que es analítica. Pienso en esto como el concepto de función del siglo XVIII. A medida que se desarrollaron las matemáticas, la suposición predeterminada se fue al otro extremo, que una función es meramente continua, y pienso en esto como el concepto de función del siglo XX. Tener, digamos, una derivada o la mitad de una derivada es una variación menor de esta suposición.

Pero el aspecto que suelen tener las funciones en la práctica es otra cosa:

Son analíticas, no meramente continuas, excepto en puntos aislados (o curvas o superficies, en dimensiones superiores) donde tienen saltos u otras singularidades.

Tan solo piense en un rectángulo, el dominio más simple donde es probable que se plantee un problema de EDP de interés científico. En las esquinas, la solución probablemente tendrá singularidades. A lo largo de los lados, probablemente será analítica. Las funciones de este tipo casi no tienen cabida en el análisis real o en la teoría EDP. De hecho, incluso el gran libro de Grisvard[32] sobre el análisis de EDP en dominios con esquinas, precisamente el entorno en el que podría pensarse que se necesita una noción diferente de funciones, comienza con

[32]El autor se refiere a P. Grisvard, *Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains,* University of Maryland, Department of Mathematics, 1980. (N. del T.)

80 páginas de espacios de Sobolev. Y así, nuestro análisis matemático, y nuestros algoritmos de elementos finitos en sus formas estándar, fallan en reconocer o explotar la suavidad perfecta que tantas funciones tienen casi en todas partes en sus dominios.

¿Sabes lo difícil que es construir una función que sea simplemente continua, o que tenga solo una o dos derivadas, en todo su dominio, como permite la teoría de Sobolev, en lugar de en puntos aislados? Hasta que se publicó un célebre ejemplo de Weierstrass en 1872, ni siquiera se sabía que esto era posible. Hoy en día, el método preferido es hacer uso de la idealización matemática del movimiento browniano, en el que pulsos aleatorios infinitesimales empujan la curva hacia arriba o hacia abajo en cada punto del camino, y así es como dibujé el boceto anterior para mostrar el concepto de función del siglo XX. Por supuesto, hay aplicaciones en las que esto es justo lo que se necesita, pero estas son las excepciones. Sin embargo, cada vez que un teórico de EDP o un analista numérico investiga un problema en la configuración de los espacios de Sobolev, implícitamente está trabajando con este modelo pesimista de funciones y probablemente se conforma con algoritmos cuyas velocidades de convergencia son bajas.

19 Cleve Moler y Matlab

De camino al análisis funcional y Chebfun, debo mencionar a Cleve Moler y Matlab.[33] Conocí a Cleve Moler cuando yo era estudiante de posgrado y él visitó Stanford, donde su voz fuerte y amistosa resonó en Serra House. Moler es la antítesis de un europeo, y como alma transatlántica, amo tanto a los europeos como a sus antítesis.

Una habitación con Moler dentro es una zona donde no se permite la insensatez. No está interesado en mostrarte cómo tu problema se relaciona con la teoría de los operadores pseudodiferenciales. Solo quiere hacer las cosas computacionalmente, y nadie lo ha hecho mejor que él. Moler tiene aproximadamente la misma edad que Knuth, y mientras Knuth escribía sus grandes libros sobre el análisis de algoritmos discretos, Moler creaba la era moderna del software numérico. Fue autor de los dos paquetes de software fundamentales de la década de 1970, EISPACK y LINPACK, y también publicó dos influyentes libros de texto de análisis numérico basados en software. Y luego, alrededor de 1977, en el Departamento de Ciencias de la Computación de la Universidad de Nuevo México, inventó Matlab, que cambió el mundo.

Matlab comenzó como una interfaz para partes de EISPACK y LINPACK. En lugar de requerir que los programadores invoquen subrutinas de Fortran a través de elaboradas secuencias de llamadas, la

[33] La ortografía correcta es MATLAB, pero no me gusta, así que escribo Matlab en su lugar.

idea era permitirles calcular de forma interactiva en la terminal, escribiendo comandos como eig(A) para encontrar los valores propios de una matriz o $A \backslash b$ para resolver un sistema lineal de ecuaciones.[34] Todos los algoritmos apropiados eran invocados en los lugares correctos, sin que el usuario necesitase conocer los detalles. Al principio, muchas personas consideraban que Matlab era un juguete, bueno para el aula pero no para la computación "real". Pero en poco tiempo se convirtió en un lenguaje de programación, así como en un sistema interactivo, y una vez que Moler, John Gilbert y Rob Schreiber le dieron la capacidad de trabajar con matrices dispersas, en 1992, Matlab se convirtió en una herramienta para la computación numérica seria a escala de escritorio, en contraposición a la escala de supercomputadoras, que se necesita para, por ejemplo, la predicción del tiempo o el análisis de moléculas químicas.

Moler visitó Stanford nuevamente durante un año sabático en el trimestre de invierno de 1978-79 y enseñó CS238b, que se impartía los lunes, miércoles y viernes a las 12:00. Asistí a las clases junto con Marsha Berger y Randy LeVeque, donde Moler explicaba los algoritmos de valores propios de matrices, con demostraciones en Matlab. En ese momento, ya estaba trabajando en teoría de aproximación y mapeo conforme, y comenzaba a pensar en EDP, y no estoy seguro de que Matlab me impresionara mucho. Pero ciertamente impresionó a los ingenieros de la clase, y un par de años más tarde, cuando estaba en mi oficina de profesor asistente en el MIT, recuerdo que Cleve entró para presentarme a un joven. "Este es Jack Little", dijo. "¡Está creando una empresa para vender Matlab!"[35]

En esa etapa, en el MIT, yo era el único analista numérico en la facultad de matemáticas aplicadas y estaba enseñando el curso de álgebra lineal numérica, con una estación de trabajo Sun-1 para jugar en el sótano. Tenía dinero para gastar, ya que había sido nombrado Joven Investigador Presidencial, y cuando se presentó la oportunidad de comprar Matlab a la nueva empresa, hice un pedido de diez copias por 500 dólares. (Una de las licencias fue utilizada por mi alumno Alan Edelman, ahora profesor en el MIT, en su trabajo clásico sobre números de condición de matrices aleatorias). Solo una década después, MathWorks me informó que yo había sido su primer cliente. Me dieron una placa, ahora expuesta en mi oficina: "Primer pedido para MATLAB, Profesor Nick Trefethen, 7 de febrero de 1985". Otro

[34] Para mí, eig(A) personifica la exitosa contribución del análisis numérico a nuestro mundo tecnológico. Los físicos, químicos, ingenieros y matemáticos saben que calcular los valores propios de las matrices es un problema resuelto. Simplemente invoque eig(A), o su equivalente en cualquier lenguaje que esté utilizando, y acceda al trabajo de generaciones de analistas numéricos. El algoritmo involucrado, el algoritmo QR, es completamente confiable, absolutamente no obvio y sorprendentemente rápido. En mi computadora portátil, para una matriz A de tamaño 1000×1000, eig(A) calcula los 1000 autovalores en medio segundo.

[35] Los ordenadores personales IBM habían sido introducidos en agosto de 1981.

está en la pared de la sede de MathWorks en Massachusetts.

Dije que Matlab cambió el mundo. Esto es cierto para el mundo de la computación de escritorio por parte de analistas numéricos, matemáticos aplicados e ingenieros. En particular, cambió mi vida investigadora. Si no tuve una fuerte reacción como estudiante de posgrado, esa situación se transformó cuando era un miembro junior de la facultad con una estación de trabajo, que ahora se había trasladado a mi oficina. Descubrí que Matlab encajaba perfectamente con mi estilo de investigación y enseñanza. Los experimentos numéricos que había comenzado en Fortran con mi tesis de pregrado en Harvard, ahora tenían una plataforma más natural y se convirtió en una parte de mi vida matemática en la que nunca he dejado de confiar. Ya han pasado alrededor de 37 años, digamos que unos 14.000 días, y calculo que he usado Matlab en 12.000 de ellos.

20 Diez dígitos

Los dígitos de precisión siempre me han fascinado, porque son el sello de que has resuelto tu problema. Por supuesto, algunos problemas pueden resolverse exactamente con una fórmula analítica, pero estos son excepcionales. La mayoría de las veces no hay fórmula, y uno debe calcular. Esto comienza con problemas tan simples como encontrar un número x que sea igual a su propio coseno, es decir, $x = \cos(x)$. (Solución: $x = 0.7390851332....$)

Dos años después de aterrizar como Profesor de Análisis Numérico en Oxford y a cargo del Grupo de Análisis Numérico, comencé una tradición que mantuvimos durante quince años. Cada octubre llegaban cinco o seis nuevos estudiantes para comenzar los estudios de doctorado conmigo o con uno de los otros miembros de la facultad.

Como un estadounidense acostumbrado a tratar con estudiantes de posgrado que ampliaban sus conocimientos tomando cursos durante un año o dos, no me gustaba el sistema británico de estos jóvenes de 21 años que se dedicaban directamente a la investigación a tiempo completo, trabajando en problemas que a menudo eran demasiado académicos.

Así que decidí exigirles que dedicaran algo de tiempo en su primer trimestre a lo que llamamos el *Equipo de resolución de problemas*. Cada semana, durante seis semanas, entregué un problema, generalmente expresado en solo una o dos frases, cuya solución era un solo número para calcular numéricamente. No hubo pistas. El desafío de los estudiantes, trabajando en parejas, era calcular cada número con tantos dígitos de precisión como pudieran. Estos son algunos de los problemas.

> Una partícula comienza en el vértice superior de una matriz triangular con 30 puntos en cada lado y luego da 60 pasos aleato-

rios. ¿Cuál es la probabilidad de que termine en la última fila?

¿Cuánto es $\sum_{n=2}^{\infty} \sin(n)/\log(n)$?

Tres tetraedros regulares tienen cada uno volumen 1. ¿Cuál es el volumen de la esfera más pequeña en la que puedes colocarlos?

¿Cuánto es $\int_0^1 \sin^2(tan(tan(\pi x)))dx$?

Una aguja de longitud 1 descansa sobre la superficie definida por la función altura $h(x) = 0.1x^2 + 0.1\sin(6x) + 0.03\sin(12x)$. ¿Cuál es la altura más baja posible del centro de la aguja?

¿Cuál es el valor más pequeño de $\varepsilon > 0$ para el cual la ecuación $\varepsilon u'' + u - u^3 = 0$ con $u(\pm 1) = 0$ tiene exactamente cinco soluciones?

¿Cuánto vale $\sum n^{-1}$, donde n se restringe a aquellos números naturales cuya representación decimal no contiene la cadena 42?

¿Cuál es el instante t_∞ en el que la solución de la ecuación $u_t = \Delta u + e^u$ en un cuadrado de tamaño 3×3 con condiciones iniciales y de frontera nulas, explota?

Si $f(x,y) = exp(-(y - x^3)^2)$ y $g(x,y) = \frac{1}{32}y^2 + e^{\sin y}$, ¿cuál es el área de la región del plano $x - y$ en la que $f > g$?

Dos cubos unitarios sólidos adyacentes, cada uno con masa 1, se atraen gravitacionalmente de acuerdo con la Ley de Newton con constante gravitacional $G = 1$. ¿Cuál es la fuerza de atracción entre ellos?

Es posible que los que no son matemáticos no reconozcan cuán inusuales, incluso extraños, son algunos de estos problemas. No tienen una motivación científica, ni tampoco una motivación matemática ordinaria. Lo que tienen es motivación algorítmica. Su objetivo es probar si los estudiantes pueden descubrir lo suficiente sobre la estructura del problema para realmente "clavarlo". Se animó a los participantes a buscar todas y cada una de las fuentes de información y hablar con amigos y miembros de la facultad. Tuvimos unas largas semanas de esfuerzo y algunos éxitos muy satisfactorios. De vez en cuando cometí un error al inventar un problema la noche anterior; por ejemplo, un problema resultó tener la respuesta ∞, que no pude detectar de antemano, pero afortunadamente, la mayoría de ellos tenían sentido. También hubo un par de problemas en los que inesperadamente se encontró una solución exacta. El ejemplo más sorprendente de esto fue el problema de los "dos cubos" anterior, para el cual Bengt Fornberg, de la Universidad de Colorado, derivó más tarde una fórmula exacta increíblemente complicada que consiste en una suma de catorce términos del tipo $35\log(1+\sqrt{5})$ y $22\tan^{-1}(2\sqrt{6})$. Para probar la corrección de su solución, por supuesto, la comparamos con el resultado calculado numéricamente 0.9259812605... Esta historia se cuenta en un capítulo del libro de 2011 *An Invitation to Mathematics*, editado por Dierk Schleicher y Malte Lackmann, y también en una de mis columnas del Newsletter de la Sociedad Matemática de Londres (LMS) en 2020. Se puede encontrar un contexto más amplio del problema en el trabajo de Michael Trott de Wolfram Research, Inc. y Folkmar Bornemann de TU Munich.

Después de que el *Equipo de resolución de problemas* había estado funcionando unos años, en 2002, decidí organizar un evento de búsqueda de dígitos para personas fuera de Oxford. Seleccioné diez problemas y los publiqué en SIAM News como el "SIAM 100-Dollar, 100-Digit Challenge". Los concursantes, que podían trabajar en equipos de hasta seis personas, tenían que intentar resolver cada problema con diez dígitos de precisión, y su puntuación sería su número total de dígitos. El desafío atrajo mucha atención y veinte equipos obtuvieron puntuaciones perfectas de 100 puntos. (Los 20 ganaron 100 Dólares, gracias a un donante anónimo que luego se reveló era William Browning).

La historia está contada de manera convincente, incluidos los detalles matemáticos de los problemas que van mucho más allá de lo que tenía en mente, en *The SIAM 100-Digit Challenge: A Study in High-Accuracy Numerical Computing* de Folkmar Bornemann, Dirk Laurie, Stan Wagon, y Jörg Waldvogel (SIAM, 2004). Durante la redacción de su libro, Bornemann y sus colaboradoes lograron resolver nueve de los problemas con una precisión de 10.000 dígitos; el décimo permanece atascado en 273 dígitos. Bornemann describió otros desarrollos en 2016 en *El desafío de los 100 dígitos de SIAM: una década después.*

A medida que se conoció el desafío, la gente comenzó a asociarme con el proyecto de calcular números con una precisión de diez dígitos, y me di cuenta de que esta era una filosofía en la que creía. Pienso en 3 dígitos como "precisión para la ingeniería", lo que podrías esperar en un problema con geometría compleja y física, mientras que 10 dígitos es "precisión científica", un buen objetivo cuando el problema está más idealizado. Por lo general, tres dígitos son suficientes para una aplicación, pero no son en absoluto suficientes si se está construyendo la base computacional para un trabajo posterior. También hay una división algorítmica entre 3 y 10 dígitos. Si bien muchos algoritmos pueden resolver un problema con poca precisión, como la simulación aleatoria conocida como algoritmo de Monte Carlo, por lo general no podrás obtener 10 dígitos a menos que tengas las matemáticas más bajo control. Otra consideración es que, en física, mientras que muchas cantidades se conocen con una precisión de 5 a 10 dígitos, como la velocidad de la luz o la constante de Planck, muchas no se conocen más allá de eso, por lo que 10 dígitos es un indicador razonable de exactitud. Finalmente, existe la característica conveniente de que 10 dígitos está muy por debajo de 16 dígitos, el nivel de errores de redondeo, por lo que generalmente este nivel de precisión se puede lograr mediante el cálculo en aritmética de punto flotante estándar.

Escribí un ensayo sobre esta filosofía de computación numérica llamado "Algoritmos de diez dígitos", en el que definí un TDA[36] por tres condiciones:

> Diez dígitos, cinco segundos y solo una página.

Un algoritmo de diez dígitos debe caber en una página de código en tu lenguaje de programación y debe calcular la respuesta con una precisión de 10 dígitos en no más de cinco segundos. Se pensó mucho en esta definición y, en particular, la condición de cinco segundos requiere que el cálculo se complete en una escala de tiempo humana, por lo que un buen investigador no podrá resistirse a ajustar parámetros, explorar y confirmar. (¡Tantos errores resultan de personas que se conforman con experimentos que tardan minutos u horas en ejecutarse!) Mi ensayo se publicó como un informe del Oxford Numerical Analysis Group en 2005, y termina con una lista de afirmaciones y tres oraciones de exhortación:

> Los algoritmos de diez dígitos pueden
>
> – Mejorar nuestras publicaciones
> – Acelerar el desarrollo del programa.
> – Hacer que nuestros métodos numéricos sean más rápidos
> – Hacer que nuestros resultados científicos sean más confiables
> – Facilitar la comparación de ideas y resultados.
> – Dar más enfoque a nuestras clases
> – Agregar entusiasmo a nuestro campo.
>
> El desafío de diseñar estos códigos eleva nuestros estándares y eleva nuestras expectativas. Es bueno para los académicos y abre más puertas a los no académicos. ¡Y es divertido!

Aparte del informe técnico, el ensayo sobre TDA no ha sido publicado y, de hecho, tiene la distinción de haber sido rechazado por arXiv. Intenté publicarlo allí dos veces, y en ambas ocasiones, el repositorio respondió diciendo que lamentaban que el artículo no fuera lo suficientemente sustancial. Evidentemente, para ser rechazado por arXiv, no es necesario encontrar una falla en la teoría de la relatividad de Einstein o descubrir nuevas propiedades del número 666.

[36] TDA=Ten digit algorithm, algoritmo de 10 dígitos (N.del T.)

21 Análisis funcional: partiendo de cero con Chebfun

Gracias a Wilkinson, Golub, Moler y otros matemáticos, y a EISPACK, LINPACK, Matlab y otras herramientas informáticas, el álgebra lineal numérica es un negocio en auge. Sus métodos son ampliamente conocidos y se enseñan a las nuevas generaciones en todo el mundo, a menudo con mi proprio libro de texto *Numerical Linear Algebra*, escrito en coautoría con David Bau cuando estaba en la facultad de Cornell, antes de mudarme a Oxford. Una explicación de este éxito es que, en un grado imprevisto por von Neumann y los otros pioneros, las ciencias de la computación se reducen al álgebra lineal. Tu problema científico puede formularse con ecuaciones diferenciales parciales no lineales, tal vez para la predicción del clima, pero probablemente lo reducirás en dos pasos para obtener respuestas en la computadora:

Linealización: no lineal $\rightarrow$ lineal

Discretización: análisis $\rightarrow$ álgebra

El terreno de Chebfun es el segundo paso, la discretización. Como sugiere el esquema, a menudo, cuando tratamos con vectores y matrices discretos, solo son discretos porque los hemos hecho para que quepan en la computadora. Preferiríamos tratar con sus contrapartidas continuas, funciones y operadores lineales, y la visión de Chebfun es hacer esto posible. Así como nosotros calculamos con números como e y $\sqrt{7}$, sin pensar en cómo se aproximan en aritmética de punto flotante de 64 bits, nos gustaría poder calcular con funciones como $\sin(x)$ y e^x sin pensar en cómo se discretizan con respecto a x.

Lo que abrió la puerta para hacer realidad esta visión fue la introducción en Matlab de la Programación Orientada a Objetos. Una idea central de POO es la sobrecarga, donde tomas una operación y le das un nuevo significado sin cambiar la sintaxis. La sintaxis de Matlab ya encapsulaba algoritmos matriciales desarrollados durante generaciones. ¿Qué tal si retenemos ese marco pero sobrecargamos las operaciones e introducimos otros algoritmos nuevos y apropiados para que nuestros programas trabajen con funciones y operadores en lugar de vectores y matrices? Estaríamos haciendo álgebra lineal continua en el teclado, que es a menudo lo que el usuario quería en primer lugar.

Chebfun se desarrolló de una manera similar a como se hizo con Matlab. En un principio, nuestra expectativa era que el experimento fuera interesante pero quizás no tan útil, ya que seguramente la ejecución sería lenta. Nos sorprendió descubrir lo rápido que era en realidad. En poco tiempo habíamos sobrecargado 100 comandos de Matlab a sus contrapartidas continuas, incluidos los pilares del álgebra lineal numérica, como la descomposición de valores singulares. Todo era matemática y algorítmicamente nuevo y había que resolverlo.

Se dieron grandes pasos hacia la usabilidad de Chebfun cuando permitimos que las funciones fueran definidas por partes en lugar de permitir solo funciones suaves, definidas globalmente, y que dependieran de dos o tres variables en lugar de solo una. Las personas clave en estos desarrollos fueron mis estudiantes de doctorado Ricardo Pachón y Alex Townsend y mis posdoctorandos Rodrigo Platte y Behnam Hashemi. Otro gran paso vino cuando sobrecargamos el operador de barra invertida de Matlab para sistemas matriciales de ecuaciones lineales, $x = A \setminus b$, para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), $u = L \setminus f$. Después de una chispa inicial de Folkmar Bornemann de TU Munich, esta parte de Chebfun relacionada con las ecuaciones diferenciales fue construida por Toby Driscoll y más tarde por Ásgeir Birkisson y Nick Hale. (Hale, ahora en la Stellenbosch University, dirigió el gran lanzamiento de la versión 5 de Chebfun en 2014 y ha escrito más código de Chebfun que nadie). Sin haberlo planeado nunca, Chebfun se ha convertido en la herramienta de software más conveniente disponible para resolver EDO. Contribuciones adicionales a Chebfun fueron realizadas por los estudiantes de doctorado Anthony Austin, Nicolas Boullé, Abi Gopal, Hrothgar (monónimo), Mohsin Javed, Hadrien Montanelli y Mark Richardson, los posdoctorados Jared Aurentz, Silviu Filip, Pedro Gonnet, Stefan Güttel y Kuan Xu, mi colega cercano de la facultad, Yuji Nakatsukasa, y por el visitante sabático Grady Wright, de la Universidad Estatal de Boise. Heather Wilber también amplió Chebfun para trabajar con funciones en un disco, cuando tan solo era estudiante de maestría en Boise State.

Durante quince años, este modo continuo de computación numérica ha sido mi mundo. No es solo Matlab lo que uso a diario, sino Matlab con Chebfun. No sé cuánto durará Chebfun en sí, pero la idea de sobrecargar las operaciones vectoriales a funciones llegó para quedarse. Esto me conduce al análisis funcional, una de las principales áreas de las matemáticas desde su creación por Fredholm, Hilbert y Schmidt a principios del siglo XX y el objeto de estudio de otro de los grupos de investigación matemática de Oxford. El análisis funcional podría definirse como

> El estudio de los análogos continuos del álgebra lineal.

No es así como lo verás normalmente, pero es la esencia del asunto. Este es el campo de las matemáticas en el que hacemos álgebra lineal con funciones en lugar de vectores discretos.

¿Se ve la posible conexión con Chebfun?

Curiosamente, esta forma de abordar el análisis funcional no ha sido apenas explotada hasta la fecha. Para una explicación de esta situación, debemos observar que para un matemático, la palabra "continuo" implica la transición de espacios de dimensión finita a espacios de dimensión infinita, y cualquier cosa infinita es una fuente rica de desafíos técnicos. De hecho, la necesidad de tratar los infinitos con rigor, que surgió, por ejemplo, con la teoría de conjuntos de Cantor y la teoría de integración de Lebesgue, es quizás la principal razón por la que las matemáticas tuvieron que volverse más técnicas en los últimos 150 años. Estos desafíos, en toda su riqueza, son la fuente de la que emana el análisis funcional. Por ejemplo, el concepto de valores propios de una matriz en álgebra lineal, si quiere hacerse rigurosa para el mundo continuo, se convierte en el concepto más avanzado de espectro de un operador lineal, que se puede dividir en espectro puntual, espectro continuo y espectro residual. Otros conceptos matriciales, como los núcleos y los rangos también adquieren nuevas complicaciones. Grandes teoremas entran en juego, como el teorema de Hahn-Banach y el principio de acotación uniforme, que por regla general expresan resultados demasiado triviales para mencionarlos en el caso del álgebra lineal.[37]

La monumental obra *Linear Operators* de Dunford y Schwartz ocupa tres volúmenes y 2592 páginas. En todas esas páginas, y en todos los logros del análisis funcional, probablemente había cosas que podrían habernos sido útiles para desarrollar Chebfun. Pero ¿cómo íbamos a encontrarlas? Generaciones de resultados matemáticos que abordaron problemas matemáticos genuinos resultaron extrañamente distantes de nuestro proyecto de crear un análogo continuo del álgebra lineal para la computadora.

Mientras escribo, se acaban de anunciar las charlas de este trimestre en la serie de seminarios de análisis funcional de nuestro departamento, con títulos como "Aplicaciones de subfactores y técnicas categóricas en C^*-álgebras" y 'Operadores de Hankel de la clase de Schatten en el espacio de Segal-Bargmann y el fenómeno de Berger-Coburn". Es otro mundo. Una vez más, dejo de prestar atención y, sin duda, de vez en cuando hay cosas que me pierdo.

Para Chebfun, partimos de cero y lo construimos todo nosotros mismos.

22 Análisis estocástico: valores vs. coeficientes

Mi quinta y última área es diferente de las demás. Con aquellas, puedo reclamar cierta experiencia adquirida con los años, pero en este caso, era principalmente un recién llegado cuando me involucré en 2016.

[37] Pero que, en el contexto del análisis funcional no son triviales en absoluto. (N. del T.)

Las matemáticas de la probabilidad han estado con nosotros durante mucho tiempo, y en el siglo XX dieron grandes pasos, pero aún seguían siendo un tema especializado entre los matemáticos. Por ejemplo, cuando yo era un postdoctorado en el Instituto Courant en la década de 1980, aunque uno o dos probabilistas estaban en la nómina (Henry McKean era una estrella y Raghu Varadhan ganaría más tarde el Premio Abel), todos sabían que el tema principal eran las EDP. Pero de alguna manera, en años más recientes, la probabilidad ha pasado al primer plano. Esto se ve en los departamentos de matemáticas de todo el mundo y, a partir de 2006, se ha otorgado una fracción regular de medallas Fields por avances relacionados con la probabilidad, sin mencionar el Premio Abel a Varadhan y otro recientemente a Furstenberg. En la NYU, entre los 72 profesores que actualmente se muestran en el sitio web de matemáticas, 14 enumeran las EDP entre sus intereses y 14 enumeran la probabilidad y/o los procesos estocásticos. La mitad de las charlas de investigación ahora parecen tener un sabor probabilístico, incluidas las del seminario de análisis numérico/cálculo científico. Acabo de comprobar y he descubierto que la siguiente charla de esta serie tiene un título tan probabilístico como podría imaginarse: "Aprovechamiento de conceptos de simulación estocástica y aprendizaje automático para una inferencia bayesiana eficiente".

Me considero alrededor del 50% escéptico sobre este surgimiento de la probabilidad. En parte, creo que es importante y emocionante, y que el aprendizaje automático, por ejemplo, requiere indiscutiblemente fundamentos probabilísticos. También parece que para problemas computacionales de una escala suficientemente grande, los mejores algoritmos casi siempre hacen uso de la aleatoriedad. La otra mitad de mí se pregunta si la tendencia está impulsada más por el hambre de problemas cada vez más grandes que por una necesidad científica genuina. A veces parece que nuestras computadoras se han vuelto demasiado poderosas para que los viejos problemas sean un desafío, por lo que los hacemos más difíciles al sustituir las constantes por variables aleatorias.

Recientemente evalué el trabajo de un estudiante que explicaba con la alegría de la juventud que mientras que en el pasado los científicos modelaban los fenómenos con ecuaciones diferenciales, ahora se reconoce que estas necesitan ser reemplazadas por ecuaciones diferenciales estocásticas.

Al final, muchos análisis estocásticos están bien justificados y ciertamente pueden ser interesantes. De hecho, existe una fascinación por los fenómenos aleatorios que creo que refleja algo profundo en nuestra psicología. Si simulas un proceso aleatorio, encontrarás que parece tener una personalidad como la de un ser vivo, y querrás investigar más a fondo.

Hace unos años, el proyecto Chebfun se enfrentó a un desafío. Como todo sistema informático, Matlab tiene un comando que produce números aleatorios. Si escribe randn(1000,1), obtiene un vector de 1000 de ellos. ¿Cuál es el análogo continuo? ¿Cuál debería ser la salida del comando Chebfun randn o, como terminamos llamándolo, randnfun?

El dibujo anterior muestra nuestra respuesta, ya que es un gráfico de la salida del comando de Chebfun cumsum(randnfun(0.001)). La parte "cumsum" de esta instrucción especifica una integral indefinida, el análogo continuo de una suma acumulativa, y randnfun(0.001) especifica una aproximación al ruido blanco. Los matemáticos llaman a esa curva camino browniano, que es un camino aleatorio en el límite de infinitos pasos de tamaño infinitamente pequeños. Albert Einstein, Jean Perrin y otros físicos comprendieron las características esenciales de los caminos brownianos poco después de 1900, incluida la intrigante propiedad de que son continuos pero no diferenciables en ninguna parte. Norbert Wiener en la década de 1920 comenzó el proceso de hacer rigurosa la teoría. El análisis estocástico aún está en desarrollo y, por ejemplo, la medalla Fields de Martin Hairer en 2014 fue otorgada por su tratamiento riguroso de las ecuaciones en derivadas parciales estocásticas no lineales.

Ahora bien, para describir cualquier función, siempre tenemos las dos opciones de "espacio y espacio de Fourier", o "espacio y espacio dual" o, como le gusta decir al equipo de Chebfun, "valores y coeficientes". Puedes representar $f(x)$ por sus valores en cada punto x, o como una serie infinita, en cuyo caso estás trabajando con sus *coeficientes*[38]. Esta dualidad se remonta a Joseph Fourier en Egipto, con Napoleón, hace más de 200 años (o quizás a Alexis Clairaut en el siglo XVIII), y ha demostrado ser una de las ideas más fructíferas de todas las matemáticas, que aún plantea aspectos técnicos y desafíos por resolver, tal como mencioné anteriormente en relación con las 759 páginas del libro de Barry Simon.

Para el comando randnfun, nos dimos cuenta de que tendríamos que usar el enfoque de "coeficientes", ya que un objeto chebfun debe ser suave al estar representado por polinomios. La especificación que decidimos implementar fue que randnfun generara el objeto chebfun

[38] Evidentemente, aquí el autor se refiere a los coeficientes que aparecen en la serie de Chebychev asociada a la función. Análogamente, en el caso del análisis de Fourier, la función queda descrita por una serie de senos y cosenos (su serie de Fourier) y los coeficientes de Fourier son los pesos que aparecen en dicha serie. (N. del T.)

asociado a a una serie finita de Fourier con coeficientes aleatorios, con la longitud de la serie especificada por un parámetro. En la llamada a randnfun anterior, el parámetro es 0.001, lo que significa que hay del orden de 1000 términos en la serie.

Como siempre, existe el enfoque alternativo de "valores" para los caminos brownianos, en el que evaluamos $f(x)$ en puntos individuales, y el parámetro nos informa sobre cuántos puntos evaluamos. Los dos enfoques son matemáticamente equivalentes, como lo estableció el propio Wiener, aunque solo uno de ellos se presta a la implementación con Chebfun.

El análisis estocástico comprende no solo funciones aleatorias, sino también ecuaciones diferenciales aleatorias. Estas se llaman EDE, abreviatura de ecuaciones diferenciales estocásticas, y aquí hay los mismos dos enfoques. Puedes representar soluciones con coeficientes, y Chebfun hace esto, proporcionando (inesperadamente) una de las herramientas más simples del mundo para explorar los fenómenos modelados por EDE, como se describe en nuestro artículo de SIAM Review de 2019[39], y en el capítulo 12 de nuestro libro *Exploring ODEs*[40]. O puedes representarlas por valores, y este fue el método desarrollado por primera vez por el matemático japonés Kiyosi Itô en la década de 1940. Más tarde, en la década de 1960, Eugene Wong y Moshe Zakai demostraron que los enfoques de valores y de coeficientes para las EDE son equivalentes.

Intelectualmente, este ha sido un viaje fascinante para mí, al descubrir que Chebfun podría hacer algo útil en el área de las funciones aleatorias y encontrar en el camino algunas matemáticas potentes. ¡Qué suerte aprender sobre ecuaciones diferenciales estocásticas a la vez que descubríamos que habíamos creado una buena herramienta para resolverlas!

Sociológicamente, la experiencia ha sido menos positiva. Como siempre, para aprender lo que necesitaba, mi instinto fue hacer preguntas a todos, tanto a los conocidos accesibles por correo electrónico como a los expertos locales en la sala común. Me temo que encontré estas conversaciones difíciles. Rápidamente descubrí que a los analistas estocásticos no les gusta el enfoque de "coeficientes". No lo usan, no lo enseñan a sus alumnos, y no lo explican en sus libros de texto, aunque es más simple que los cálculos de Itô y Stratonovich requeridos por la formulación de "valores", por no mencionar los métodos numéricos asociados de Euler-Maruyama y Milstein. De hecho, fue solo lentamente que aprendí que ambas formulaciones estaban en la

[39] Se refiere a Lloyd N. Trefethen, S. Filip and A. Javeed, *Smooth random functions, random ODEs, and Gaussian processes*, SIAM Rev., 61 (2019), 185–205. (N. del T.)

[40] Se refiere a Lloyd N. Trefethen, *Exploring ODEs*, SIAM, 2018, que se puede descargar libremente a través del enlace siguiente: `https://people.maths.ox.ac.uk/trefethen/ExplODE/` (N. del T.)

literatura y se había demostrado que eran equivalentes.

Todos los que han tomado un curso de cálculo conocen el concepto de integral, pero solo aquellos que han estudiado matemáticas más avanzadas conocen la teoría de la medida. La formulación de "valores" del análisis estocástico tiene complicaciones técnicas estrechamente relacionadas con las de la teoría de la medida. Sin embargo, esta es la formulación que los matemáticos insisten que debe enseñarse desde el principio. No he podido determinar por qué su sentimiento es tan fuerte en este punto. ¡Imagínense si les dijéramos a los estudiantes que tienen que aprender la teoría de la medida antes de poder hablar de integrales![41]

Como digo, me resultó difícil discutir estos temas con los analistas estocásticos. Allí estaba yo en el salón, habiendo entendido finalmente que uno puede definir los caminos brownianos y las EDE por valores o coeficientes y ansioso por aprender los pros y los contras de ambos enfoques, ansioso por saber por qué los analistas estocasticos, los biólogos y los matemáticos financieros (pero no los físicos) trabajan con el primero en lugar del segundo. En lugar de disfrutar de conversaciones estimulantes sobre un tema que es absolutamente fascinante, sentí que me decían que me fuera y estudiara procesos gaussianos, o estructuras de regularidad, o trayectorias rugosas.

¿Se ve lo que resulta tan desconcertante aquí? Todos sabemos lo difícil que puede ser tener que explicarle algo a una persona que carece de los antecedentes necesarios y hace preguntas tontas. Pero, ¿existe alguna disciplina además de las matemáticas en la que esperaríamos ver esta dinámica entre profesores sénior en el mismo departamento?

23 Las matemáticas, hoy

Sería difícil argumentar que soy cualquier cosa excepto un matemático. Y, sin embargo, he descrito una carrera académica en la que, con el paso de las décadas, me he consolidado en esta profesión sintiendo que me estoy alejando de ella.

En mis primeros años daba por sentado que los matemáticos más convencionales, los líderes en cada campo especializado, entendían lo que era importante en sus áreas. Me preocupó, por lo tanto, notar que mi propio trabajo no se basaba en el de ellos. Investigaba un problema y hacía una buena contribución, a menudo un descubrimiento auténtico, sin nunca dominar o ni siquiera intentar dominar los resultados de los expertos no numéricos en el área. De hecho, bromeaba de vez en cuando afirmando que

> El análisis numérico es el estudio de las matemáticas del siglo anterior.[42]

[41] Esta es la frase final de nuestro artículo de SIAM Review, 2019.

[42] Este tipo de referencia flotante apela al sentido del humor matemático. Un

A pesar de la broma, en privado interpreté la situación como una deficiencia mía. Sabía que estaba haciendo un buen trabajo, pero supuse que sería aún mejor si tuviera el suficiente carácter para absorber los artículos de Adamjan, Arov y Krein como soporte para mi investigación sobre la aproximación de Carathéodory-Fejér, para sumergirme en las teorías del gran Louis Nirenberg mientras trabajaba en EDP en el Instituto Courant, o para digerir a Dunford y Schwartz cuando estaba escribiendo el libro sobre pseudoespectros. Año tras año, tuve la sensación de que me estaba quedando corto.

Uno puede detectar una posible falla en ese razonamiento. Si ignorar a los maestros fuera realmente un error, no pocas veces en mi carrera habría encontrado que mis contribuciones más tarde resultaron haber sido anticipadas, o invalidadas, por el trabajo de otros. Esto no ha sucedido. Todo lo que he hecho se ha mantenido válido y original, algunas cosas más importantes que otras, por supuesto, pero casi nunca equivocadas o redundantes. De hecho, está claro que si hubiera hecho más de eso, habría hecho menos de esto. Todos somos finitos y, para bien o para mal, vincularme más a las matemáticas de mi época me habría convertido en un investigador diferente. Habría sido más un matemático puro y menos un analista numérico.

Reflexionando sobre este fenómeno de valiosas contribuciones de comunidades tan diferentes, me resulta difícil no concluir que la división del trabajo informada al comienzo de este ensayo, que los matemáticos puros desarrollan los conceptos y los matemáticos desarrollan los algoritmos, está excesivamente simplificada. En muchos momentos de mi carrera me he dado cuenta de que los conceptos establecidos no daban en el blanco: que las migajas de Atiyah viajan, o al menos deberían viajar, en ambas direcciones. Por ejemplo, he mencionado cómo los valores propios demostraron no tener el significado que generalmente se supone para las matrices y los operadores no simétricos, mientras que los pseudoespectros se acercan. Un segundo ejemplo: lentamente, a lo largo de los años, me di cuenta de que, aunque he escrito varios artículos e incluso editado un libro sobre mapeo numérico conforme, este no es realmente un buen método para su aplicación más famosa, resolver EDP en dominios complicados. Un tercer ejemplo: al trabajar con aproximaciones de funciones en cuadrados, cubos e hipercubos, encontré que la noción estándar del grado de un polinomio multivariado, el “grado total”, no es apropiada; en su lugar, se debería utilizar el “grado euclidiano”, un término propuesto por Jared Aurentz. Un cuarto ejemplo: descubrí que, a pesar de un siglo de literatura que presenta la cuadratura de Gauss-Hermite como el método óptimo para la integración de funciones en la línea real infinita $-\infty < x < \infty$, en realidad es mucho menos eficiente que otros métodos más simples, como la regla trapezoidal. Esta

importante libro de texto sobre fractales va más allá con la dedicatoria: “A mi esposa actual”.

última experiencia ejemplificó una característica común de los yoguismos inversos, que a veces puedes ver rápidamente que la formulación establecida está torcida, pero aún así puede llevar bastante trabajo precisar dónde radica exactamente el problema.

Así que tal vez no haya perdido mi tiempo como matemático, pero esto no resuelve el rompecabezas. ¿Qué demonios está pasando con las matemáticas si al prestar atención a las obras de los líderes de la teoría de la aproximación, el análisis complejo, el análisis real/EDP, el análisis funcional y el análisis estocástico, resulta que sus contribuciones no están necesariamente orientadas a profundizar y mejorar el conocimiento en dichas áreas?

No conozco completamente la respuesta, pero aquí hay quizás un principio. Una disciplina se define en parte por su materia de estudio, y para las matemáticas continuas, aunque algunos dirían sin duda que esto es demasiado simplificado, creo que dicha materia es:

Números, funciones y ecuaciones.

Pero una disciplina también se define por su metodología, y para cualquier tipo de matemática, se podría decir que existen dos metodologías bastante distintas:

(A) Teoremas y demostraciones

y

(B) Algoritmos y cálculos.

Creo que mi experiencia ha demostrado que, en gran medida, hasta un punto que difícilmente nadie habría creído posible, (A) y (B) pueden operar de manera independiente y, aún así, tener éxito, y lo han estado haciendo durante mucho tiempo, produciendo avances válidos en ambos extremos, los cuales extrañamente tienen poco que ver entre sí.

Por supuesto, hay una cierta cantidad de comunicación en ambas direcciones. Pero algunos matemáticos están haciendo avanzar las matemáticas principalmente en el marco de (A), mientras que otros están realizando contribuciones igualmente validas en el contexto de (B). Los que nos encontramos en el lado (B) no abjuramos de los teoremas y las demostraciones, y de hecho a menudo creamos las nuestras, como lo he hecho yo mismo muchas veces para muchos temas. Pero en su mayor parte ignoramos los teoremas y las demostraciones que definen la vanguardia de las matemáticas de hoy en día tal como se entienden generalmente: las matemáticas de la medalla Fields, si se quiere.

¡Qué situación más extraña! Los investigadores en ambos extremos del espectro matemático logran ser productivos, me complace decirlo, y lo mismo sucede en todos los puntos intermedios; pero aún así, es difícil no desear que este grado de separación disminuya.

Como ciudadano con doble ciudadanía de los EE. UU. y del Reino Unido, veo las matemáticas puras y aplicadas en términos de una analogía. Nadie diría que las sociedades estadounidense y británica son, o deberían ser, idénticas. Pero ciertamente están emparentadas, y seguro que ambas serán más fuertes si existe una buena comunicación entre ellas. Siento el estado actual de las matemáticas puras y aplicadas como si Estados Unidos y Gran Bretaña se comunicaran solo por veleros ocasionales, que van y vienen.

Algunas personas creen que la física teórica se encuentra en un estado de crisis provocada por el predominio de las teorías de cuerdas, que carecen de fundamento experimental. Creo que la situación en las matemáticas de hoy es similar, con una fracción desconcertantemente grande de nuestra comunidad que siente desapego por los fenómenos, unido a un apego extremo por la abstracción y la técnica. La palabra crisis, sin embargo, es probablemente excesiva en ambos casos. La física y las matemáticas se encuentran entre los grandes logros de la humanidad, y ambas siguen vivas y fuertes. En cuanto a la que conozco, las matemáticas, solo quiero sugerir que su estado actual no es todo lo que podría ser, y que es un desafío para las próximas generaciones reducir las distancias entre lo puro y lo aplicado.

Agradecimientos

Este ensayo fue escrito durante los primeros meses de 2022 con el apoyo de la editora ejecutiva de SIAM, Elizabeth Greenspan. Durante el camino, muchos amigos y colegas comentaron los diversos borradores, corrigieron errores, ofrecieron nuevas observaciones y mejoraron el tono. Mi más sincero agradecimiento a Peter Baddoo, Folkmar Bornemann, John Butcher, Rob Corless, Tom DeLillo, Toby Driscoll, Patrick Farrell, Nathaniel Foote, Abi Gopal, Alain Goriely, Nick Gould, Nick Hale, Mike Heath, Des Higham, Nick Higham, Don Knuth, Rainer Kress, Randy LeVeque, Philip Maini, Kate McLoughlin, Cleve Moler, David Mumford, Yuji Nakatsukasa, Michael Overton, Gerlind Plonka, Lothar Reichel, Michael Saunders, Robert Schaback, Rob Schreiber, Gilbert Strang, Steve Strogatz, Endre Süli , Alex Townsend, Jacob Trefethen, Divakar Viswanath, Elias Wegert y André Weideman. Varias de estas personas ofrecieron sugerencias detalladas, página por página, que dieron lugar a muchos debates interesantes. Nat Foote me apoyó especialmente en la crucial etapa inicial, y Kate McLoughlin es la mejor editora que conozco.