Глава 16

Сильные типы

... und zwar durch Einführung einer eigenthümlichen Art imaginärer Divisoren, welche ich ideale complexe Zahlen nenne ...

E. E. K.

16.a Теорема о конечной эквивалентности

Лемма 16.1 *Пусть в стабильной теории T выбран тип p из $S_1(A)$ и M – модель теории T, содержащая A; для каждой формулы $f(x,\bar{y})$ существует отношение эквивалентности $E_f(\bar{y},\bar{z})$ с конечным числом классов, определенное формулой с параметрами из A, такое, что два кортежа $\bar{a}$ и $\bar{b}$ из M конгруэнтны по модулю E_f, если и только если все неотклоняющиеся сыновья p удовлетворяют $f(x,\bar{a}) \leftrightarrow f(x,\bar{b})$.*

Доказательство. Неотклоняющиеся сыновья p имеют только конечное число $f(x,\bar{y})$-типов, соответствующих определениям $d_1 f,\dots,d_n f$; тогда ясно, что эквивалентность E_f имеет не более 2^n классов, и что она определяется формулой $(d_1 f(\bar{y}) \leftrightarrow d_1 f(\bar{z})) \wedge \dots \wedge (d_n f(\bar{y}) \leftrightarrow d_n f(\bar{z}))$; так как выполнимость этой формулы зависит только от типа $\bar{y}\bar{z}$ над A, она эквивалентна формуле с параметрами из A.

□

Если a и b конгруэнтны по модулю всех отношений эквивалентности с конечным числом классов (говорят сокращенно "отношение конечной эквивалентности"), определимых с параметрами из A, то говорят что a и b имеют один и тот же *сильный тип* над A. Если a и b имеют одинаковый сильный тип над A, они имеют один и тот же тип над A; действительно, формуле $f(x,\bar{c})$ с параметрами c из A соответствует отношение эквивалентности с двумя классами, первый из которых образован элементами, удовлетворяющими формуле $f(x,\bar{c})$, а второй – элементами, удовлетворяющими ее отрицанию.

Обратно, если A является моделью M теории T, то любые два элемента, которые имеют один и тот же тип над M, имеют также один и тот же сильный тип над M; действительно, каждый класс отношения конечной эквивалентности E должен иметь представителя a в M и тип над M говорит, конгруэнтен ли x или нет этому a по модулю E.

Но в общем случае, тип над A соответствует нескольким сильным типам; если мы хотим, то можем считать, что сильный тип является неполным типом над моделью M теории T, содержащей A, составленный только из формул вида $x \sim a$ по модулю E, где a в M и E является определимым отношением конечной эквивалентности над A; обозначим через $SF_1(A)$ множество сильных типов с одной переменной над A; множества $SF_n(A)$ сильных типов с n переменными и $SF_\alpha(A)$, с α переменными, определяются аналогичным образом. Мы видим, что определение $SF_1(A)$ не зависит от модели M, выбранной чтобы охватить A: если N – другая модель, содержащая A, то M и N имеют общее элементарное расширение P, отождествляющее классы по модулю E над M, N, P.

Если A содержится B, то ограничивая сильный тип над B только формулами, являющимися конечными отношениями эквивалентности, определимыми над A, получаем сильный тип над A; кроме того, так как сильный тип определяет тип, то если M является моделью, содержащей A, имеем канонические сюръекции: $S_1(M) = SF_1(M) \longmapsto SF_1(A) \longmapsto S_1(A)$. По теореме Свенониуса, если модель M достаточно однородна и насыщенна, то мы видим, что два сильных типа над A, соответствующие одному и тому же типу над A сопряжены A-автоморфизмом M.

Следовательно, если T стабильна и $p \in S_1(M)$, то, так как обязательно неотклоняющийся сын над M типа p имеет сильный тип над A, расширяющий p, мы видим, что каждый сильный тип расширяющий p, содержит по крайней мере неотклоняющегося сына p. Следующая теорема утверждает, что он содержит только единственного такого сына, то есть, что *неотклоняющиеся расширения p соответствуют в точности сильным типам над A, расширяющим p.*

Теорема 16.2 (о конечных эквивалентностях) *Пусть T – стабильная теория, $p \in S_1(A)$, q_1 и q_2 – два различных неотклоняющихся сына типа p над моделью M, содержащей A; тогда существует отношение конечной эквивалентности E, определимое с параметрами из A, такое, что q_1 и q_2 не конгруэнтны по модулю E (т.е. $q_1 \sim a_1(mod\ E)$, $q_2 \sim a_2(mod\ E)$, и a_1 и a_2 не конгруэнтны по модулю E).*

Доказательство. Реализуем q_1 элементом b_1, и реализуем элементом b_2 наследника q_2 над $M \cup b_1$; по теореме 15.9 тип $b_1{}^\frown b_2$ над M не отклоняется над A. Так как $q_1 \neq q_2$, для некоторый формулы $f(\bar{c}, x)$ с параметрами $\bar{c}$ из M имеем $M \vdash f(\bar{c}, b_1) \wedge \neg f(\bar{c}, b_2)$; по симметрии тип $\bar{c}$ над $A \cup \{b_1, b_2\}$ не отклоняется над A и по лемме 16.1 элементы b_1 и b_2 не конгруэнтны по модулю некоторого конечного отношения эквивалентности E, определимого формулой с параметрами из A.

Так как класс x_1 по модулю E определен типом q_1, а класс x_2 – типом q_2, то из теории $T \cup q_1 \cup q_2$ вытекает что "x_1 и x_2 не конгруэнтны по модулю E", что и дает искомый результат.

$\square$

Теорема 16.3 *Если теория T стабильна, то a и b имеют один и тот же сильный тип над A если и только, если существует модель M, содержащая A такая, что a и b имеют один и тот же тип над M.*

Доказательство. Если a и b – элементы одного типа над моделью, содержащей A, то они одного сильного типа над A, так как все классы определимого отношения эквивалентности над A имеют представителей в M.

Предположим обратно, что a и b имеют один и тот же сильный тип над A ; рассмотрим тип некоторой модели над A, у которого мы берем неотклоняющегося сына над $A \cup \{a, b\}$, и реализуем его моделью M; по симметрии, тип $a{}^\frown b$ над M не отклоняется над A; таким образом, тип a над M, а также тип b над M не отклоняются над A; так как эти типы в одном и том же сильном типе над A , то по 16.2 они равны.

$\square$

Несколько комментариев, чтобы немного разъяснить эту теорему: то, что существует модель M, содержащая A, такая, что a и b имеют один и тот же тип над M, это значит, что каждый раз когда $(\exists \bar{y}) g(\bar{y})$ истинно, где $g(\bar{y})$ – формула с параметрами из A, все предложения вида $(\exists \bar{y})[g(\bar{y}) \wedge (f(a, \bar{y}) \leftrightarrow f(b, \bar{y}))]$ удовлетворяются. Действительно, с одной стороны, каждая модель, содержащая

A, будет содержать $\bar{y}$ удовлетворяющий g; и кроме того, если все эти предложения удовлетворяются, и M содержит модель A, то множество предложений образованное из $T(M)$, типа $a^\frown b$ над A, и всех предложений $f(a,\bar{c}) \leftrightarrow f(b,\bar{c})$, $\bar{c} \in M$, совместно.

Таким образом, мы видим, что это отношение " a и b имеют один и тот же тип над моделью, содержащей A " зависит только от типа $a^\frown b$ над A и что оно соответствует выполнимости бесконечного множества формул: это замкнутое множество в $S_2(A)$. В стабильном случае, это отношение особенно просто, так как это замкнутое множество есть не что иное как (бесконечная) конъюнкция всех конечных отношений эквивалентности. Но это уже неверно, если T нестабильна, и даже возможно, что отношение "иметь один и тот же тип над моделью " не будет транзитивным, т.е. не будет отношением эквивалентности! Например, если T является теорией бесконечных атомных булевых алгебр, и если a и b мажорируют бесконечное число атомов так же, как их дополнения (таким образом, по теореме 6.20 a и b имеют один и тот же тип над $\emptyset$), то они имеют один и тот же тип над моделью, если и только если $a \wedge b$ или $\neg a \wedge \neg b$ мажорируют бесконечное число атомов: это свойство не транзитивно.

Читатель легко проверит, используя лемму 15.13 для элиминации нестабильных параметров, что аналоги трех доказанных теорем этого параграфа так же, как и тех, что следуют за ними (иногда с легкими поправками) остаются в силе для стабильных типов нестабильной теории.

Как пример сильных типов можно рассмотреть типы алгебраических элементов над A; если p – алгебраический тип над A, имеющий только конечное число $a_1, \ldots, a_n$ реализаций в модели M, содержащей A, каждый элемент a_i соответствует сильному типу, расширяющему тип p: если $f(x)$ – формула с параметрами из A, изолирующая p, то рассмотрим отношение эквивалентности с $n+1$ классами, определенного формулой: $[\neg f(x) \wedge \neg f(y)] \vee x = y)$.

Поведение сильных типов вначале может озадачить. Главная опасность состоит в следующем. Мы используем беспрестанно очевидный принцип, который сводит битипы к 1-типам, а именно задание типа $a^\frown b$ над A, это задание типа a над A, а затем типа b над $A \cup \{a\}$ (или еще типа b над A и типа a над $A \cup \{b\}$). *Этот принцип неверен для сильных типов*, так как сильный тип кортежа $a^\frown b$ над A не определяет сильный тип b над $A \cup \{a\}$.

В качестве примера возьмем теорию T алгебраически замкнутых полей нулевой характеристики, полагая $A = \emptyset$, a трансцендентен над $\mathbb{Q}$, $b = a^2$. Тип p кортежа $a^\frown b$ над $\emptyset$ стационарен, так как если M – модель T, то над ней он имеет только единственного сына без отклонения, соответствующего элементу a, трансцендентному над M. Таким образом, существует только единственный сильный тип, содержащий p; тип a над A стационарен так же, как тип b над a; последний является даже рациональным, т.е. удовлетворяется единственным элементом, так как $b = a^2$.

Но это не так в другом направлении: тип b над $\emptyset$ стационарен, но тип a над b кратности 2; если возьмем модель, содержащую b, то он имеет двух сыновей (без отклонения) над ней, соответствующих каждому квадратному корню из b; сильный тип $a^\frown b$ над $\emptyset$ не дает никаких средств, чтобы их разделить.

16.b Пространства сильных типов; теорема об открытом отображении

На множестве $SF_1(A)$ мы определяем топологию, база открытых множеств которой образована из множеств $\langle xEa \rangle$ сильных типов, содержащих формулу "x конгруэнтен a по модулю E", где $a \in M$ и E – отношение конечной определимой эквивалентности над A. Эти множества замкнуты относительно конечных пересечений: классы x по модулю E и по модулю F определяются его классом по модулю $E \wedge F$, что является снова отношением конечной эквивалентности. Эти открытые множества являются также замкнутыми множествами, так как дополнением $< xEa >$ будет множество вида $\langle xEa_1 \rangle \vee \cdots \vee \langle xEa_n \rangle$.

По теореме компактности (раздел 4.b), чтобы множество формул xE_ia_i было совместным, надо чтобы каждый из его конечных фрагментов был таковым; таким образом, $SF_1(A)$ является компактным пространством, являющимся вполне несвязным. Мы видим, что модель M, служащая для его определения, является только бесплатным приложением: если изменим модель, то определим то же пространство.

Если A содержится в B, то рассмотрим отображение-ограничение $SF_1(B)$ в $SF_1(A)$, состоящее в сохранении только отношений конечных эквивалентностей, определимых над A. Если M – модель, содержащая B, $A \subset B \subset M$, то имеем следующую коммутативную диаграмму, где стрелки указывают канонические ограничения:

$$\begin{tikzcd} & & SF_1(A) \arrow[dr] & \\ S_1(M) = SF_1(M) \arrow[r] & SF_1(B) \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_1(A) \\ & & S_1(B) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Каждая из стрелок является *непрерывной* сюръекцией; например, чтобы понять, что $SF_1(A) \to S_1(A)$ непрерывно, рассмотрим открыто-замкнутое подмножество $\langle f(x, \bar{a}) \rangle$ в $S_1(A)$ и отношение E с двумя классами, соответствующее этой формуле, вместе с элементом b из M, удовлетворяющим этой формуле: прообразом $\langle f(x, \bar{a}) \rangle$ будет $\langle xEb \rangle$.

Лемма 16.4 *Для всех A, отображение ограничения $SF_1(A)$ на $S_1(A)$ открыто.*

Доказательство. По теореме Свенониуса два сильных типа соответствующие одному и тому же типу над A сопряжены A-автоморфизмом в достаточно насыщенной и однородной модели M, содержащей A; следовательно, существует группа G гомеоморфизмов $S_1(A)$, такая, что два элемента $SF_1(A)$ сопряжены действием G, если и только если они имеют то же ограничение на $S_1(A)$; это и влечет результат.

Действительно, пусть O – открытое множество в $SF_1(A)$, и F – его дополнение. Надо показать, что образ O при ограничении ρ открыт. Я утверждаю, что пересечение $\rho(\sigma F)$, где σ пробегает G, является дополнением $\rho(O)$. Действительно, все точки из $S_1(A)$ имеют вид $\rho(p)$, и $\rho(p) = \rho(q)$, если и только если q имеет вид $\sigma(p)$; следовательно, $\rho(p) \notin \rho(O)$ значит, что каждый $\sigma(p)$ в F. Так как каждое σF компактно, то таковы и их проекции, которые замкнуты; и следовательно, $\rho(O)$ открыто.

□

Ясно, что понятие сильного типа особенно полезно в стабильном случае:

Лемма 16.5 *Если T стабильна и $A \subset B$, тогда типы из $S_1(B)$, неотклоняющиеся над A, образуют замкнутое подмножество $S_1(B)$.*

Доказательство. Мы просто покажем, что типы, которые отклоняются, образуют открытое множество; пусть тип p над B, который реализуется элементом a, отклоняется над A; если он отклоняется, то это из-за некоторой формулы, и значит существует $\bar{b}$ в B такой, что тип a над $A \cup \{\bar{b}\}$ отклоняется над A. По симметрии, тип $\bar{b}$ над $A \cup \{a\}$ отклоняется над A, по теореме 15.7 это означает, что некоторая формула $f(\bar{b}, \bar{c}, a)$, где $\bar{c} \in A$, удовлетворяется, в то время как $f(\bar{x}, \bar{y}, z)$ опускается гранью типа $\bar{b}$ над A; $f(\bar{b}, \bar{c}, x)$ является окрестностью p, и все типы этой формулы отклоняются над множеством A.

□

Лемма 16.6 *Если теория T стабильна, и $A \subset M$, где M – модель T, тогда отображение-ограничение $S_1(M)$ на $SF_1(A)$ индуцирует гомеоморфизм между замкнутым множеством типов над M, неотклоняющихся над A, и $SF_1(A)$.*

Доказательство. Обозначим через X множество типов над M, неотклоняющихся над A; по 16.5 X компактно и по 16.2 ограничение индуцирует непрерывную биекцию X на $SF_1(A)$. Так как речь идет о компактах, обратное ей отображение также непрерывно (действительно, непрерывное отображение одного компакта на другой – замкнутое; если оно биективное, то оно, таким образом, открытое, то есть обратное к нему – непрерывное).

□

В случае когда A является моделью M_0 теории T, мы видим, что отображение наследования непрерывно и обращает ограничение: оно устанавливает гомеоморфизм между $S_1(M_0)$ и множеством типов над M, наследующих или конаследующих своим ограничениям на модель M_0.

Следствие 16.7 (Теорема об открытом отображении) *Если T стабильна и $A \subset B$, то отображение-ограничение индуцирует непрерывную и открытую (т.е. образ открытого множества открыт) сюрьекцию замкнутого множества X, образованного из типов, неотклоняющихся над A, на $S_1(A)$.*

Доказательство. Пусть M – модель, содержащая B, и Y – замкнутое подмножество $S_1(M)$, образованное из типов, неотклоняющихся над A; если O – открытое подмножество X, то по непрерывности, его прообраз является открытым подмножеством O' в Y; и по 16.4 и 16.6 образ O' при ограничении на $S_1(A)$ открыт.

□

Следующее следствие теоремы об открытом отображении очень часто используется в построениях моделей:

Теорема 16.8 *Если T стабильна, $A \subset B$, $p \in S_1(B)$, p не отклоняется над A и p изолирован в $S_1(B)$, тогда ограничение p на A изолировано в $S_1(A)$.*

Доказательство. Множество $\{p\}$ открыто в $S_1(B)$: примените 16.7. □

16.c Последовательность Морли сильного типа; снова о насыщенных моделях

Если теория T стабильна, и $p \in S_1(A)$ является стационарным типом (более обще, если p является стабильным стационарным типом в нестабильной теории), то мы можем определить последовательность Морли типа p над A так, как это делаем уже давно когда A – модель: p реализуют элементом a_0, затем его единственного сына без отклонения над $A \cup \{a_0\}$ реализуют элементом a_1 и т.д. Как все бесконечные неразличимые последовательности в стабильной теории, эта неразличимая последовательность над A тотально неразличима и неделима.

Рассмотрим, в большей общности, произвольный тип p из $S_1(A)$ и сильный тип p^* из $SF_1(A)$, расширяющий p; предположим, что A вложено в большую очень насыщенную модель, чтобы понятие реализации сильного типа имело смысл. Определим следующим образом *последовательность Морли сильного типа* p^* : p реализует a_0, затем единственное неотклоняющееся расширение p над $A\cup\{a_0\}$ в сильном типе p^* реализуется элементом $a_1, \dots$, единственное неотклоняющееся расширение p над $A \cup \{a_0, \dots, a_n\}$ в сильном типе p^* реализуют элементом a_{n+1} и т.д.

Отметим, что как только первый элемент a_0 выбран, то это сводится к построению последовательности Морли стационарного типа элемента a_1 над $A \cup \{a_0\}$; мы реализуем над $A \cup \{a_0, \dots, a_n\}$ единственное неотклоняющееся расширение p, конгруэнтное a_0 по модулю каждого конечного отношения эквивалентности, определимого над A.

Эта последовательность, естественно, тотально неразлична и неделима, и если $A \subset B$, то *её средний тип над B является не неотклоняющимся расширением p, соответствующим сильному типу p^** . Действительно, пусть s – эта последовательность, и M – модель T, содержащая A, причем M и s независимы над A; тип s над M не отклоняется над A, по теореме 15.9 это влечет, что для всех n тип a_n над $M \cup \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ не отклоняется над $A \cup \{a_0, \dots, a_n\}$ и еще, по транзитивности, над A: при таком выборе M и s, последовательность s становится последовательность Морли единственного неотклоняющегося расширения p над M, соответствующего сильному типу p^*; заключение следует из 12.33.

Значит, последовательность Морли $s = \{a_0, \dots, a_n, \dots\}$ сильного типа над A является множеством, *независимым и неразличимым* над A. Действительно, если s неразличима, то все его элементы попарно конгруэнтны, или все попарно не конгруэнтны, по модулю каждого отношения эквивалентности E, определимого с параметрами из A; если E имеет лишь конечное число классов, то они все конгруэнтны по модулю E; следовательно, они все попадают в один и тот же сильный тип. Средний тип такой последовательности над B зависит, таким образом, только от типа B над A, а не от типа B над $A \cup S$.

Мы видим, что каждую бесконечную неразличимую последовательность можно рассматривать как последовательность Морли над множеством A, выбранному надлежащим образом: продолжим последовательность $\kappa(T)$ раз; так как грань типа p_α элемента a_α над $A_\alpha = \{\ldots, a_\beta, \ldots\}_{\beta<\alpha}$ не может уменьшаться $\kappa(T)$ раз в фундаментальном порядке, начиная с некоторого α он больше не отклоняется, и получаем последовательность Морли над A_α. Ошибочно думать, что две бесконечные и неразличимые последовательности s и t имеют, над каждым множеством параметров, один и тот же средний тип как только они имеют один и тот же сильный тип (над $\emptyset$): еще необходимо, чтобы они могли иметь один и тот же сильный тип над множеством параметров, где каждая становится последовательностью Морли; например, если T теория бесконечного множества, то существует только единственный сильный тип над $\emptyset$; следовательно, последовательность s, полученная повторением элемента a, и последовательность t, полученная повторением b, имеют один и тот же сильный тип; они имеют один и тот же средний тип только если $a = b$.

С этим понятием последовательности Морли, мы можем дать наконец окончательную версию леммы 14.6 и ее следствий.

Лемма 16.9 *Если теория T стабильна и M – $k(T)$-насыщенная и ω_1-насыщенная модель T, тогда каждый тип над M является средним типом бесконечного и тотально неразличимого множества элементов из M.*

Доказательство. Если $p \in S_1(M)$, то по 15.8 существует подмножество A модели M мощности, строго меньшей $k(T)$, такое, что p не отклоняется над A; реализуем в M элементом a_0 ограничение типа р на A; затем элементом a_1 ограничение p на $A \cup a_0$ и т.д., продолжаем $\omega+\omega$ раз; таким образом, получаем последовательность $a_0, \ldots, a_n, \ldots, a_\omega, \ldots, a_{\omega+n}, \ldots$ в модели M, где a_i реализует ограничение p на $A \cup \{a_j\}_{j<i}$ для каждого $i < \omega + \omega$.

Если E – отношение эквивалентности с n классами, определимое с параметрами из A, и $p \vdash x \not\sim a_0\ (mod\ E)$, тогда a_1, и все a_i, $i > 0$, не конгруэнтны a_0 по модулю E; и если a_1 также не конгруэнтен x по модулю E, то все a_i , $i > 1$, не лежат ни в классе a_0, ни в классе a_1. Это может так повторяться только n раз, и наверняка все a_i , $i \geq n$, лежат в одном и том же классе E и $p \vdash x \sim a_n\ (mod\ E)$.

Следовательно, элемент a_ω, так же, как и все следующие, лежит в сильном типе p: мы видим, что ограничение p на $A \cup a_\omega$ стационарно; и последовательность $a_\omega, \ldots, a_{\omega+\omega}$ является последовательностью Морли, для которой p средний тип.

□

В суперстабильном случае, гипотеза $k(T)$-насыщенности, то есть ω-насыщенности, недостаточна для леммы 16.9; подходящая гипотеза, более слабая, чем ω_1-насыщенность, которую можно называть $(\omega+\varepsilon)$-насыщенностью, или еще $\aleph_\varepsilon$-насыщенностью, определяется следующим образом: M $(\omega+\varepsilon)$-насыщенна, если для каждого кортежа $\bar{a}$ из M каждый сильный тип над $\bar{a}$ реализуется в M; если все типы имеют конечную кратность, то мы видим, что $(\omega+\varepsilon)$-насыщенность равносильна ω-насыщенности.

Поразмышляйте над следующим примером: язык T состоит из счетного числа символов бинарных отношений $E_0, E_1, \ldots, E_n, \ldots$; аксиомы T выражают, что каждый предикат E_n является отношением эквивалентности, E_0 тривиально и каждое E_{n+1} является утончением E_n, каждый класс по модулю E_n разбивается точно на два класса по модулю E_{n+1} (имеется таким образом 2^n классов для E_n). Нетрудно понять, что T – полная теория с элиминацией кванторов; это теория суперстабильна, ее фундаментальный порядок сводится к двум точкам: реализованной и не реализованный. Два элемента имеют один и тот же сильный тип над $\emptyset$ если они конгруэнтны по модулю всех E_n: имеется 2^ω сильных типов; модель M теории T ω-насыщенна, если и только если для всех a из M в M имеется бесконечное число элементов, имеющих тот же сильный тип, что и a: мы видим, что существует такая счетная модель, в то время как наименьшая $(\omega+\varepsilon)$-насыщенная модель имеет мощность 2^ω.

Вот окончательная версия теоремы 14.5.

Теорема 16.10 *Если теория T стабильна и $\lambda \geq k(T)$, $\lambda > \omega$, тогда T имеет насыщенную модель мощности λ, если и только если она стабильна в λ.*

Доказательство. Мы знаем, по 14.2, что если T стабильна λ, то она имеет насыщенную модель мощности λ.

Для обратного утверждения, предположим сначала, что T суперстабильна; пусть M – насыщенная модель мощности λ; если $p \in S_1(M)$, то существует конечный кортеж $\bar{a}$ в M, такой, что p не отклоняется над $\bar{a}$, и мы увидели в доказательстве леммы 16.9, что M, будучи ω_1-насыщенной, будет $(\omega+\varepsilon)$-насыщенный, что там можно найти реализацию a_ω сильного типа p над $\bar{a}$: мы видим, таким образом, что ограничение p на $\bar{a}^\frown a_\omega$ стационарно. Следовательно, каждый тип p над M является единственным неотклоняющимся расширением своего ограничения на некоторое конечное множество $\bar{b}$ параметров из M. Так как все типы над $\bar{b}$ реализованы в M, то их не более λ. Итак, мы имеем λ возможностей для выбора $\bar{b}$ и λ возможностей для выбора ограничения p на $\bar{b}$, в сумме всего $\lambda \times \lambda = \lambda$ возможностей для выбора p. Так как каждое множество параметров мощности $\leq \lambda$ вкладывается в M, мы имеем стабильность T в λ.

Предположим теперь, что T не суперстабильна, $\lambda \geq k(T) > \omega$; пусть M – насыщенная модель мощности λ; по лемме 16.9 имеется не более λ^ω типов над M; если бы мы имели нестабильность в λ, то мы имели бы $\lambda^\omega > \lambda$, и отсюда выводим требуемое утверждение как в 14.5.

□

Вот три поучительные вещи для запоминания 14.5 и 16.10, для стабильной теории T:

– если T имеет насыщенную модель мощности $\lambda \leq k(T)$, то эта мощность регулярна ;

- T не имеет насыщенную модель мощности $\lambda \geq \omega_1, \quad k(T) \leq \lambda < \lambda_0(T)$;
- для $\lambda \geq \lambda_0(T)$, T имеет насыщенную модель мощности λ, если и только если она стабильна в λ, т.е. если $\lambda^{<k(T)} = \lambda$.

Мы установили, таким образом, что класс мощностей, в которых теория T имеет насыщенную модель, позволяет видеть, является ли она стабильной (тогда она имеет насыщенную модель сингулярной мощности), и позволяет почти определить ее спектр стабильности: действительно, находим $k(T)$ рассматривая большие значения, и $\lambda_0(T)$ равна ω, или наименьшему кардиналу большему чем $k(T)$, в котором T имеет насыщенную модель.

Если $\omega_1 < 2^\omega$, то можно этим способом отличать ω-стабильные теории от других, которые не имеют насыщенной модели в мощности ω_1 (действительно, если T не ω-стабильна, то можно найти счетное множество параметров, над которым существует 2^ω типов); но с континуум-гипотезой $\omega_1 = 2^\omega$, теория T, приведенная в примере после 16.9, имеет насыщенные модели во всех мощностях; однако, она не ω-стабильна, так как 2^ω сильных типов над $\emptyset$ дают 2^ω типов над любой счетной моделью. То, что отличает ω-стабильные теории от суперстабильных теорий, имеющих насыщенную счетную модель, – это существование счетной $(\omega + \varepsilon)$-насыщенной модели.

Выясним теперь каким станет теорема 14.7

Теорема 16.11 *Если теория T стабильна, то модель T, являющаяся $k(T)$-насыщенной и ω_1-блестящей, будет насыщенной; если T суперстабильна, то модель теории T, являющаяся $(\omega + \varepsilon)$-насыщенной (например, если она ω_1-насыщенна) и ω-блестящей, будет насыщенной.*

Доказательство. Для стабильного случая, так как M является $\max(k(T), \omega_1)$-насыщенной, то лемма 16.9 применима и каждый тип над M является средним типом некоторой неразличимой ω-последовательности элементов из M, и поступаем так же, как в теореме 14.7.

В суперстабильном случае, принимая во внимание гипотезы, каждый тип p над M является единственным неотклоняющимся расширением своего стационарного ограничения q над конечным множеством $\bar{a}$ элементов M; чтобы иметь существование последовательности Морли q той же мощности, что и M, гипотеза ω-блестящести достаточна, так как множество Эренфойхта этой последовательности использует только конечное число параметров.

□

Что касается леммы 14.8, она теперь полностью доказана: оставшийся случай когда λ сингулярен и строго больше $k(T)$; в этом ситуации применима лемма 16.9 , и каждый тип над λ-насыщенной моделью M является средним типом неразличимой λ-последовательности элементов из M.

Мы можем даже еще более уточнить то, что произойдет с цепями достаточно насыщенных моделей стабильной теории:

Теорема 16.12 *Пусть T – стабильная теория, и $M_1 \prec \cdots \prec M_i \prec \ldots$ – элементарная цепь, индексированная линейным порядком I конфинальности, большей или равной $k(T)$, образованная из λ-насыщенных моделей T; тогда предел M моделей M также λ-насыщен.*

Доказательство. Это очевидно, если $\lambda \leq k(T)$, так как тогда каждое подмножество A модели M мощности, строго меньшей λ, содержится в одной из M_i . Предположим, таким образом, что $\lambda > k(T)$; пусть $A \subset M$, $|A| < \lambda$, $p \in S_1(A)$ и q – произвольный сын типа p над M; так как каждое конфинальное подмножество I содержит по крайней мере $k(T)$ элементов, то существует i, такой, что q – наследник своего ограничения q_i на M_i; так как $\lambda > k(T)$, $\lambda > \omega$, то можно применить лемму 16.9: q_i средний тип неразличимой последовательности длины λ, образованной из элементов M_i , и то же самое верно и для его наследника q; все элементы этой последовательности, за исключением не более $|A| \times k(T) < \lambda$, реализуют p.

□

16.d Воображаемые элементы

Я приведу здесь конструкцию, придуманную Шелахом, которая состоит в выделении элементов структуры M, присутствующих там виртуально. Пусть M – структура теории T в языке L; язык L^{eq} получается из L добавлением реляционного предиката M_E для каждого отношения эквивалентности $E(\bar{x}, \bar{y})$ между n-ками M, определимого формулой L без параметров, а также символа f_E функции из $(M_=)^n$ в M_E.

Структура M^{eq}, соответствующая M, является по определению L^{eq}-структурой для которой M_E образован из множества классов n-ок из M по модулю E (если $E \neq E'$, то M_E и M'_E дизъюнктны), и функция f_E из $(M_=)^n$ в M_E, то есть функция из M^n в M_E, сопоставляющая n-ке ее класс по модулю E; что касается других символов L^{eq}, тех что из L, они интерпретируются в $M_=$ так же, как и в M; таким образом, мы отождествляем M и $M_=$, так что M представляется в качестве определимой подструктуры в M^{eq}.

Модель M^{eq} не совсем определима в M в смысле определения раздела 9.d, так как ее база не образована из фактор-множества M^m с фиксированным m; если бы мы рассматривали только конечное число отношений эквивалентности $E_1, \ldots, E_k$ соответственно на n_1-кортежах, ... , n_k-кортежах, то мы могли бы определить соответствующую структуру как фактор-множество M^{m+k+1}, где m является максимумом среди $n_1, \ldots, n_k$ (см. доказательство леммы 16.13); значит M^{eq} представляется как некоторый предел определимых структур в M.

Легко видеть, с помощью челночной конструкции, что если M и N элементарно эквивалентны, то M^{eq} и N^{eq} также элементарно эквивалентны; если N элементарное расширение M, то N^{eq} является элементарным расширением M^{eq}. Следовательно, полной теории T соответствует полная теория T^{eq} структур M^{eq}, где M пробегает класс моделей T.

Какие другие модели имеет T^{eq} ? Так как множества M_E попарно дизъюнктны и их бесконечное число, то множество формул вида $x \notin M_E$ совместно; и легко видеть, что это полный тип, который назовем точкой в бесконечности и обозначим p_∞. Если N – модель T^{eq}, то его $N_=$ является моделью M теории T, и M^{eq} является элементарным ограничением N: N просто напросто получается добавлением к M^{eq} некоторого числа реализаций p_∞, образующих тотально неразличимое множество, без связей с M^{eq}, его элементы не имеют других отношений между собой кроме того, чтобы быть различными. Над произвольным множеством A параметров, p_∞ имеет в качестве сыновей свои реализованные сыновья и единственного нереализованного сына.

Таким образом, мы видим, что соответствие, которое модели M сопоставляет M^{eq}, является биекцией между моделями T и моделями T^{eq}, опускающими точку в бесконечности. Если мы хотим, то можем ограничиться рассмотрением моделей только такого вида, но в любом случае это дополнительное множество, нейтральное и паразитическое, реализации типов не очень мешает.

Естественно, каждое свойство M переносится на M^{eq}: переход от M к M^{eq} сохраняет "теоретико-модельные" свойства. Например, две n-ки из $M_=$ имеют один и тот же тип в M^{eq} тогда и только тогда, когда они имеют один и тот же тип в M; если M λ-однородна, то M^{eq} также λ-однородна; если M λ-насыщенна, то M^{eq} обладает следующим свойством насыщенности: для всех $A \subset M^{eq}$, $|A| < \lambda$, и для всех $p \in S_1(A)$, $p_\infty \not\subset p$, p реализуется в M^{eq}: в действительности, тип, удовлетворяющий M_E не имеет никаких связей с параметрами из типа p_∞, и становится типом n-ки в смысле M.

Точно так же T^{eq} имеет похожие свойства с теорией T: T стабильна в λ тогда и только тогда, когда T_{eq} стабильна в λ; действительно, с одной стороны T интерпретируема в T^{eq}, а с другой стороны, если A – множество параметров модели T^{eq}, то типы $S_1(A)$, кроме точки в бесконечности, соответствуют типам n-ок в смысле T.

Надо также отметить, что переход от T к T^{eq} не влияет на свойства отклонения типов, удовлетворяющих $M_=$: их фундаментальный порядок в T^{eq} является фундаментальным порядком T (так как они представляют формулу L^{eq} тогда и только тогда, когда они представляют его перевод на L), и если T стабильна, $A \subset B \subset M$, $p \in S_1(B)$, $p \vdash M_=(x)$, тогда p не отклоняется над A в T в том и только том случае, если он не отклоняется над A в T^{eq}.

Интерес и польза T^{eq} состоит, как мы это увидим, в придании некоторого особого свойства параметрам формулы $f(\bar{x}, \bar{a})$ и в сопоставлении определимому типу настоящего минимального множества параметров, необходимого для его определения. Прежде всего докажем следующую лемму, которая показывает, что бесполезно повторять конструкцию eq над T^{eq} не трогая точку в бесконечности.

Лемма 16.13 *Пусть F – отношение определимой эквивалентности в T^{eq} над множеством $(M_{E_1} \cup \dots \cup M_{E_k})^n$; тогда существует определимое отображение f_F из $(M_{E_1} \cup \dots \cup M_{E_k})^n$ в M^{eq} такое, что две n-ки имеют один и тот же образ при f_F если и только, если они конгруэнтны по модулю F.*

Доказательство. Предположим, чтобы упростить обозначения, что $n = 1$; E_1 определяется над n_1-ками, ..., E_k над n_k-ками; пусть m – максимум чисел $n_1, \dots, n_k$. Мы рассмотрим множество A кортежей длины $m+k+1$ из M, $(a_0, \dots, a_k, b_1, \dots, b_m)$ удовлетворяющих одному и единственному равенству вида $a_0 = a_i$:

$$\bigwedge\!\!\!\bigwedge_{0<i<j} (a_0 \neq a_i \vee a_0 \neq a_j) \wedge \bigvee\!\!\!\bigvee_{0<i} (a_0 = a_i) \ .$$

Мы рассмотрим отношение эквивалентности E, определенное на кортежах длины $(m+k+1)$, у которого один класс является дополнением A и след которого на A является следующим: кортеж $(a_0,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_m)$ эквивалентен $(a'_0,\ldots,a'_k,b'_1,\ldots,b'_m)$ по модулю E, если $a_0=a_i$ и $a'_0=a'_j$ и класс кортежа $(b_1,\ldots,b_{n_i})$ длины n_i по модулю E_i эквивалентен по модулю F классу кортежа $(b'_1,\ldots,b'_{n_i})$ длины n_j по модулю E_j.

Это отношение E определяется формулой L^{eq}; но так как $m+k+1$-ки из $M_=$ имеют один и тот же тип как только они удовлетворяют одним и тем же формулам L, то по компактности (см. раздел 5.c !) E определимо формулой из L. Следовательно, ему соответствует множество классов M_E включенных в M^{eq}.

Теперь мы рассмотрим отображение f_F множества $M_{E_1}\cup\cdots\cup M_{E_k}$ в M_E, сопоставляющее элементу α из M_{E_i} класс кортежа $(a_0,\ldots,a_k,b_0,\ldots,b_m)$ по модулю E, где $a_0=a_i$ и $(b_1,\ldots,b_{n_i})$ является представителем α.

□

И вот, что происходит в T^{eq}: *каждой формуле $f(\bar{x},\bar{a})$ языка L с параметрами $\bar{a}$ из M соответствует формула $g(\bar{x},y)$ языка L^{eq}, такая, что существует единственный элемент b из M^{eq} такой, что $f(\bar{x},\bar{a})$ эквивалентна $g(\bar{x},b)$.* Это впрочем почти очевидно; рассмотрим действительно отношение эквивалентности E, определенное формулой без параметров $\forall x[f(\bar{x},\bar{y})\leftrightarrow f(\bar{x},\bar{z})]$; берем в качестве b класс кортежа $\bar{a}$ по модулю E и в качестве $g(\bar{x},y)$ формулу, утверждающую, что y лежит в M_E и что $f(\bar{x},\bar{z})$ истинна для одного представителя $\bar{z}$ класса y.

И даже более того, лемма 16.13 утверждает, что это верно не только для формул L с параметрами из $M_=$, а также для формул L^{eq}, у которых никакие переменные и параметры не лежат в типе p_∞.

В качестве иллюстрации этого принципа покажем, что в T^{eq} имеем $SF_1(A)=S_1(A)$ как только A алгебраически замкнуто, условие, которое для этого совсем не достаточно в общем случае; рассмотрим тип над A; если это сын p_∞, то он стабильный и стационарный, так как существует только единственный нереализованный тип в бесконечности, и, следовательно, он определяет сильный тип; для типа, удовлетворяющего M_{E_i}, мы рассмотрим отношение эквивалентности, определимое с параметрами из A, которое разбивает M_{E_i} на конечное число классов $C_1,\ldots,C_n$; пусть $c_1,\ldots,c_n$ – канонические параметры, определенные соответственно для формул $x\in C_1,\ldots,x\in C_n$; так как тип c_i над A обязывает, что имеется только конечное число возможностей для формулы $g(\bar{x},c_i)$, то необходимо, чтобы каждый c_i был алгебраическим над A . Каждый элемент c_i , таким образом, лежит в A, каждый класс C_i определим с параметрами из A, и каждый тип определяет сильный тип.

16.e Элиминация воображаемых элементов

Для некоторых теорий воображаемые элементы уже присутствуют в модели M и бесполезно их туда добавлять; в этом случае говорят, что имеется "элиминация воображаемых элементов", понятие, которое мы собираемся уточнить.

Напоминаем (см. раздел 6.a), что элемент a называется *рациональным* над A, если он является единственным элементом, удовлетворяющим некоторой формуле с параметрами из A, и *алгебраическим* над A, если он удовлетворяет формуле с параметрами из A, выполнимую только на конечном множестве элементов.

Рациональное замыкание A является множеством элементов, рациональных над A; это наименьшее множество параметров, содержащее A и рационально замкнутое, то есть содержащее все рациональные элементы над собой. *Алгебраическое замыкание* A является множеством элементов, алгебраических над A, и это наименьшее надмножество A, являющееся алгебраически замкнутым, то есть, содержащее все элементы, алгебраические над собой. Все эти понятия зависят только от типа A.

Если мы ищем минимальное множество параметров для определения чего-то, разумно рассматривать только рационально замкнутые множества; и кстати, тип над A имеет только единственное продолжение над рациональным замыканием A; тип над A или над его рациональным замыканием, это одно и то же.

Мы говорим, что T *(сильно) элиминирует воображаемые элементы*, если каждой формуле $f(\bar{x}, \bar{a})$, с параметрами $\bar{a}$ из модели M теории T можно сопоставить кортеж $\bar{b}$ параметров со следующим свойством: если s – автоморфизм элементарного расширения M, то он сохраняет формулу $f(\bar{x}, \bar{a})$ (т.е. $f(\bar{x}, \bar{a}) \leftrightarrow f(\bar{x}, s\bar{a})$ для каждого $\bar{x}$), если и только если он оставляет неподвижным каждый элемент $\bar{b}$.

Мы говорим, что T *слабо элиминирует воображаемые элементы*, если каждой формуле $f(\bar{x}, \bar{a})$ с параметрами из M соответствует наименьшее алгебраически замкнутое множество $A \subset M$, такое, что $f(\bar{x}, \bar{a})$ эквивалентна формуле с параметрами из A (говорят, что $f(\bar{x}, \bar{a})$ определима над A).

В первом определении, мы не требуем, как это имело место в T^{eq}, чтобы кортеж $\bar{b}$, соответствующий $f(\bar{x}, \bar{a})$, сводился к единственному элементу; мы можем довольствоваться рассмотрением автоморфизмов ω-насыщенного и ω-однородного расширения M, так как все эти вещи зависят только от типа.

Отметим, что сильная элиминация влечет слабую элиминацию: если формула $f(\bar{x}, \bar{a})$ определима с параметром $\bar{c}$, то все автоморфизмы, оставляющие неподвижным $\bar{c}$ поточечно, оставляют неподвижным $f(\bar{x}, \bar{a})$, и таким образом, оставляют неподвижным также $\bar{b}$ поточечно: по теореме Свенониуса, каждый элемент $\bar{b}$ рационален над $\bar{c}$; кроме того, так как выполнимость $f(\bar{x}, \bar{a})$ зависит только от типа $\bar{x}$ над $\bar{b}$, то эта формула эквивалентна формуле с параметрами $\bar{b}$. Итак, мы видим, что рациональное замыкание $\bar{b}$ является наименьшим рационально замкнутым множеством, над которым эта формула определена, а его алгебраическое замыкание – наименьшее такое алгебраически замкнутое множество.

Мы видим также, что слабая элиминация не влечет сильную элиминацию: если рассмотрим формулу $x = a \vee x = b$, где a и b – различные, в теории T чистого равенства на бесконечном множестве, то ее наименьшее определяющее множество есть $\{a, b\}$; но автоморфизм, который меняет местами a и b, сохраняет эту формулу.

Конструкция eq является каноническим способом элиминации воображаемых элементов, по крайней мере, для формул без параметров из точек в бесконечности: действительно, по лемме 16.13 оставлять неподвижным такую формулу – это оставлять неподвижным класс соответствующего отношения эквивалентности E, или еще оставлять неподвижным образ этого класса при функции f_E, определяющей эквивалентность E. Если разрешать параметры из точки в бесконечности, то имеется только слабая элиминация.

Мы могли бы ввести промежуточное понятие между сильной и слабой элиминациями, когда каждая формула имела бы минимальное рационально замкнутое множество, над которым формула определена; это почти бесполезно, так как оно не будет иметь описания в стиле теорем 16.14 и 16.15, которые последуют. Мимоходом отметим, что когда переходят к T^{eq} в вышеупомянутом примере, элементы a и b становятся алгебраическими и сопряженными над элементом c из M^{eq}, являющимся классом (a, b) эквивалентности $(y = y' \wedge z = z') \vee (y = z' \wedge z = y')$.

Отметим, что если теория T элиминирует, или слабо элиминирует, воображаемые элементы, то точно таким же будет и $T(A)$. Также заметим, что элиминация воображаемых элементов сопоставляет каждому определимому типу минимальное множество определения: оставлять неподвижным p из $S_1(M)$ – это оставлять неподвижным для каждой формулы (без параметров!) $f(x, \bar{y})$ канонический кортеж формулы с параметрами $df(\bar{y})$, данной определением p; в случае слабой элиминации, мы имеем только минимальное алгебраически замкнутое множество определения. Теперь понятно, что эта элиминация воображаемых будет иметь интересные применения главным образом к стабильным теориям.

Две следующие теоремы освещают эти понятия: сильная элиминация канонически сопоставляет формуле кортеж параметров, слабая элиминация канонически сопоставляет формуле конечное множество кортежей параметров.

Теорема 16.14 *Теория T (сильно) элиминирует воображаемые элементы, если и только если каждой формуле $f(\bar{x}, \bar{a}), \bar{a} \in M$, можно сопоставить формулу $g(\bar{x}, \bar{z})$ такую, что в M существует единственный кортеж $\bar{b}$ такой, что $f(\bar{x}, \bar{a})$ эквивалентна $g(\bar{x}, \bar{b})$.*

Доказательство. Если теория обладает этим свойством, то существует элиминация, так как оставлять неподвижным f – это оставлять неподвижным $\bar{b}$, соответствующий ей.

Предположим обратно, что мы имеем элиминацию, и пусть $\bar{b}$ – кортеж параметров, соответствующий f; так как выполнимость f зависит только от типа $\bar{x}$ над $\bar{b}$, f эквивалентна формуле $g'(\bar{x}, \bar{b})$; тогда я утверждаю, что существует формула $h(\bar{z})$ без параметров, выполняющаяся на $\bar{b}$ и такая, что

$$\forall \bar{z}\{[h(\bar{z}) \wedge [\forall \bar{x}(g'(\bar{x}, \bar{z}) \leftrightarrow g'(\bar{x}, \bar{b}))]] \rightarrow \bar{z} = \bar{b}\} \ ;$$

иначе, по компактности, мы могли бы найти $\bar{b}'$ того же типа, что b, $\bar{b}' \neq \bar{b}$, такой, что $g'(\bar{x}, \bar{b})$ эквивалентна $g'(\bar{x}, \bar{b}')$, и автоморфизм, переводящий $\bar{b}$ на $\bar{b}'$, сохранил бы f, сдвинув $\bar{b}$; таким образом, можно брать $h(\bar{z}) \wedge g'(\bar{x}, \bar{z})$ в качестве $g(\bar{x}, \bar{z})$.

□

Теорема 16.15 *Теория T слабо элиминирует воображаемые элементы, если и только если каждой формуле $f(\bar{x}, \bar{a})$ можно сопоставить формулу $g(\bar{x}, \bar{z})$ такую, что существует только конечное (ненулевое) число параметров $b_1, \ldots, b_n$, для которых $f(\bar{x}, \bar{a})$ эквивалентна $g(\bar{x}, \bar{b}_1), \ldots, g(\bar{x}, \bar{b}_n)$.*

Доказательство. Если мы имеем это свойство, то существует слабая элиминация, так как автоморфизм, который сохраняет формулу, меняет местами $\bar{b}_i$, имеющих только конечное число сопряженных, относительно этих автоморфизмов, и являющихся, таким образом, алгебраическими над каждым множеством определения f.

Предположим, что имеется слабая элиминация, пусть B – минимальное алгебраически замкнутое множество определяющее f, и пусть $\bar{b}$ – кортеж параметров из B такой, что $f(\bar{x}, \bar{a})$ эквивалентна формуле $g'(\bar{x}, \bar{b})$. Если можно найти произвольно большое конечное число кортежей b_i, имеющих тот же тип, что и b, и таких, что $g'(\bar{x}, \bar{b}_i)$ эквивалентна $g'(\bar{x}, \bar{b})$, то по компактности, можно найти сколько угодно таких кортежей. Таким образом, найдется $\bar{b}_1$ того же типа, что $\bar{b}$, такой, что $g'(\bar{x}, \bar{b}_1) \leftrightarrow g'(\bar{x}, \bar{b})$ и $\bar{b}_1$ не алгебраический над $\bar{b}$. Напротив, из за минимальности B необходимо, чтобы $\bar{b}$ был алгебраическим над $\bar{b}_1$; и так как $\bar{b}$ и $\bar{b}_1$ имеют один и тот же тип, то существует $\bar{b}_2$, алгебраический, над $\bar{b}$ и при этом $\bar{b}$ не алгебраический над $\bar{b}_2$, такой, что $g'(\bar{x}, \bar{b})$ и $g'(\bar{x}, \bar{b}_2)$ эквивалентны; это противоречит свойству минимальности B, так как алгебраическое замыкание $\bar{b}_2$ строго входит в B, и позволяет тем не менее определить f.

Следовательно, существует конечный фрагмент $h(\bar{z})$ типа $\bar{b}$, такой, что существует не более n элементов, удовлетворяющих $\forall x[g'(\bar{x}, \bar{z}) \leftrightarrow g'(\bar{x}, \bar{b})]$ и $h(\bar{z})$; мы полагаем $g(\bar{x}, \bar{z}) = h(\bar{z}) \wedge g'(\bar{x}, \bar{z})$.

□

Если каждое определимое (без параметров) отношение эквивалентности E над M^n имеет вид $f_E(\bar{y}) = f_E(\bar{z})$, где f_E является определимой функцией из M^n в M^m, то имеется (сильная) элиминация воображаемых элементов. Действительно, формуле $f(\bar{x}, \bar{a})$ сопоставляем отношение $E = \forall x[f(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow f(\bar{x}, \bar{z})]$, и оставлять неподвижным $f(\bar{x}, \bar{a})$ – это значит оставлять неподвижным класс $\bar{a}$ по модулю E, или еще оставлять неподвижным кортеж $f_E(\bar{a})$.

Обратное утверждение почти верно; в следующей теореме, мы не можем обойтись без двух констант 0 и 1, так как два класса отношения эквивалентности $(y_l = y_2 \wedge z_l = z_2) \vee (y_1 \neq y_2 \wedge z_1 \neq z_2)$ определимы без параметров.

Теорема 16.16 *Если теория T элиминирует воображаемые элементы, и позволяет определить по крайней мере две константы (т.е. рациональное замыкание $\emptyset$ содержит по крайней мере два элемента), тогда каждое определимое отношение эквивалентности $E(\bar{y}, \bar{z})$ имеет вид $f_E(\bar{y}) = f_E(\bar{z})$, где f_E определимая функция из M^n в M^m.*

Доказательство. Обозначим через 0 и 1 две определимые константы. Докажем теперь, что в теореме 16.14 можно выбирать формулу $g(\bar{x}, \bar{z})$ независимо от $\bar{a}$, в зависимости только от $f(\bar{x}, \bar{y})$. Действительно, для каждого кортежа $\bar{a}_i$, можно найти формулу g_i, такую, чтобы выполнялось следующее предложение: $\exists! \bar{z} \forall \bar{x}[f(\bar{x}, \bar{a}_i) \leftrightarrow g_i(\bar{x}, \bar{z})]$; по компактности все формулы g_i можно брать из конечного множества $g_1, \ldots, g_k$ формул, и можно предполагать, что в них все $\bar{z}$ имеют одну и ту же длину m, добавляя 0 в конец тех кортежей, которые являются слишком короткими. Пусть кортежи $\bar{u} = (u_i, \ldots, u_k)$ и z имеют длину k, m соответственно. Рассмотрим тогда формулу $g(\bar{x}, \bar{u}, \bar{z})$, являющуюся конъюнкцией следующих формул:

– тех которые выражают, что все u_i нулевые, за исключением одного, равного 1 ;

– тех которые выражают, что если $u_i = 1$, то для каждого $j < i$ имеется нуль или, по крайней мере, два $\bar{t}$, таких, что $\forall x[g_j(\bar{x}, \bar{t}) \leftrightarrow g_i(\bar{x}, \bar{z})]$, в то время как $\forall x[g_i(\bar{x}, \bar{t}) \leftrightarrow g_i(\bar{x}, \bar{z})]$ влечет $\bar{t} = \bar{z}$.

Из определения g ясно, что для любого $\bar{a}$ имеется единственный кортеж $\bar{b}$ такой, что $\forall x[f(\bar{x}, \bar{a}) \leftrightarrow g(\bar{x}, \bar{b})]$. Пусть тогда E – некоторое определимое отношение эквивалентности; формуле $\bar{x}\ E\ \bar{y}$ соответствует формула $g(\bar{x}, \bar{z})$, такая, что для любого $\bar{a}$ существует единственный $\bar{b}$, такой, что формула $\bar{x}\ E\ \bar{a}$ эквивалентна $g(\bar{x}, \bar{b})$; функция f_E, которая $\bar{a}$ сопоставляет этот $\bar{b}$, определима, и решает проблему.

□

Следующая лемма может быть полезной в некоторых случаях, чтобы показать, что имеется слабая элиминация воображаемых элементов (например, для теории бесконечного множества):

Лемма 16.17 *Предположим, что теория T удовлетворяет двум следующим условиям:*

– не существует строго убывающей последовательности множеств $A_0 \supsetneqq \cdots \supsetneqq A_n \supsetneqq \ldots$, где каждое A_n является алгебраическим замыканием конечного множества параметров ;

– если A и B являются алгебраическими замыканиями конечного множества параметров, и M достаточно однородная и насыщенная модель, содержащая A и B, то группа $(A \cap B)$-автоморфизмов M порождена группой ее A-автоморфизмов и группой ее B-автоморфизмов.

Тогда T слабо элиминирует воображаемые элементы.

Доказательство. Второе условие влечет, что если $f(\bar{x}, \bar{a})$ определима над A и также над B, то ее выполнимость зависит только от типа над $A \cap B$ и она определима над $A \cap B$. Первое условие влечет, что каждая формула имеет минимальное алгебраически замкнутое множество, над которым она определима.

□

Очень поразительным примером элиминации воображаемых элементов является теория алгебраически замкнутых полей; мы могли бы, для иллюстрации, использовать лемму 16.17, но проще это вывести из нескольких очень элементарных лемм алгебры следующим образом.

Лемма 16.18 *Пусть K поле и I идеал многочленов от произвольного числа переменных; идеалу I соответствует подполе k поля K, называемое полем определения I, такое, что $sI = I$, если и только если s оставляет неподвижным k поточечно, для каждого автоморфизма s поля K.*

Доказательство. Пусть $I \subset K[\ldots, X_i, \ldots]$. Для каждой последовательности $u = (\ldots, n_i, \ldots)$ натуральных чисел, которые все равны нулю, за исключением конечного числа, мы обозначим через X^u моном произведений $X_i^{n_i}$. По определению s действует на многочлены оставляя неподвижным эти мономы. Модуль $K[\ldots, X_i, \ldots]/I$ является векторным пространством, порожденным образами этих мономов, и мы выберем базис $B = \{\ldots, b_j, \ldots\}$ мономов, взятых из образов этих X^u. Таким образом, каждый моном записывается единственным способом в виде $X^u = \sum a_{ju} b_j (mod\ I)$, где a_{ju} – коэффициенты из K. Пусть k – поле, порожденное a_{ju} . Заметим, что многочлены $X^u - \sum a_{ju} b_j$ лежат в I, и что они образуют там систему порождающих: действительно, так как b_i свободны по модулю I, многочлен лежит в I тогда и только тогда, когда при замене каждого X^u его выражением от b_j получается нулевой многочлен.

Если s оставляет неподвижным I, то он оставляет неподвижным также все a_{ju}, которые определяются однозначно по I; если s оставляет неподвижным k, то он оставляет неподвижным I так как он оставляет неподвижным его систему порождающих.

□

Если дано конечное семейство $I_1, \ldots, I_m$ идеалов, то говорим, что автоморфизм s поля K их переставляет, если множество $\{I_1, \ldots, I_m\}$ равно множеству $\{sI_1, \ldots, sI_m\}$.

Лемма 16.19 *Если $I_1, \ldots, I_m$ – простые идеалы $K[\ldots, X_i, \ldots]$, попарно не входящие один в другой, то существует подполе k поля K такое, что автоморфизм s поля K оставляет неподвижным k поточечно если и только, если он переставляет $I_1, \ldots, I_m$.*

Доказательство. Заметим, что если J – простой идеал, содержащий $J_1 \cap \cdots \cap J_m$, тогда он содержит один из J_i: это версия леммы Гаусса на языке идеалов, утверждающей, что если простое число делит произведение, то оно делит один из сомножителей этого произведения! Действительно, если J не содержит элемент P_1 из $J_1, \ldots$ элемент P_m из J_m, то он не содержит их произведение, лежащее в $J_1 \cap \cdots \cap J_m$.

Мы видим теперь, что поле определения k идеала $I_1 \cap \cdots \cap I_m$ нас удовлетворит, так как $I_1, \ldots, I_m$ – минимальные простые идеалы, содержащие этот идеал.

□

Теперь нам нужно совершить небольшой экскурс к понятию "размерности" идеала или алгебраического многообразия. Все это станет ясным, в самом общем контексте, когда мы будем говорить о "ранге Морли" в следующей главе.

Мы определили в разделе 1.c *ранг Кантора* точки в топологическом пространстве; и говорилио нем вновь в разделе 11.d. Мы отметим здесь, что можно определить, для каждого *замкнутого* множества F пространства E, ранг Кантора F как максимум рангов Кантора элементов F: этот максимум существует;

нет проблем, если F содержит точку ранга ∞; иначе существует наименьший ординал α такой, что F не содержит точек ранга $\geq \alpha$; невозможно, чтобы α был предельным, так как тогда F содержал бы для всех $\beta < \alpha$ точку p_β ранга по крайней мере β, которые по компактности сходились бы к точке, которая будет обязательно ранга по крайней мере α; таким образом, ординал α является последователем, и его предшественник есть максимум рангов точек F.

Отметим, что если ранг Кантора F равен $\alpha < \infty$, то F *содержит только конечное число точек ранга* α ; иначе, они бы сходились к точке, которая была бы ранга по крайней мере $\alpha + 1$. Все это полезно для ω-стабильных теорий:

Лемма 16.20 *Если теория T ω-стабильна, то каждый тип p из $S_1(M)$ имеет ранг Кантора, который является ординалом (т.е. $\neq \infty$) .*

Доказательство. В противном случае, множество X элементов $S_1(M)$ ранга Кантора ∞ образует стоуновское пространство без изолированных точек: каждое непустое открыто-замкнутое подмножество разбивается на два непустых открыто-замкнутых множества. Так как открыто-замкнутые множества соответствуют формулам, применяя дихотомию как в 13.13, мы построим счетное множество параметров, которое имеет 2^ω типов.

□

Мы теперь вооружены для следующей теоремы :

Теорема 16.21 *Теория алгебраически замкнутых полей любой характеристики, а также теория дифференциально замкнутых полей нулевой характеристики, (сильно) элиминируют воображаемые элементы.*

Доказательство. Пусть $f(\bar{x}, \bar{a})$ – формула теории T алгебраически замкнутых полей данной характеристики, которая ω-стабильна; мы погружаемся в ω-насыщенную и ω-однородную модель M теории T, содержащую A (что в данном случае есть не что иное, как алгебраически замкнутое поле бесконечной степени трансцендентности над своим простым полем). Зададим как обычно отношение эквивалентности E, определенное формулой без параметров $\forall \bar{x}[f(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow f(\bar{x}, \bar{z})]$. Рассмотрим класс $\bar{y}E\bar{a}$ кортежа $\bar{a}$ по модулю E, и возьмем в этой формуле тип p максимального ранга Кантора; так как имеется элиминация кванторов, то тип p есть не что иное, как простой идеал I кольца $M[\bar{X}]$.

Говорим, что два идеала I и J сопряжены, если $I = sJ$ для некоторого автоморфизма s модели M. Отметим, что если B – базис мономов по модулю I, то он базис также по модулю sI. Следовательно, если $I \subset sI$, то единственное выражение X^u через B по модулю sI совпадает с тем, что по модулю I.Идеал I содержит систему порождающих sI и $I = sI$. Иначе говоря, два сопряженных идеала равны или несравнимы по включению.

Так как сопряженный к идеалу I имеет тот же ранг Кантора, то открыто-замкнутое подмножество $\bar{y}E\bar{a}$ содержит только конечное число $I_1, \ldots, I_m$ сопряженных нашего типа I максимального ранга Кантора.

Для автоморфизма, сохранять формулу $f(\bar{x}, \bar{a})$ – это сохранять класс $\bar{a}$ по модулю E. Если автоморфизм сохраняет этот класс, то он переставляет

$I_1, \dots, I_m$; и если он переставляет $I_1, \dots, I_m$, то, так как E определимо без параметров, он меняет местами классы E, не разъединяя их (т.е. $\bar{x}E\bar{y}$ тогда и только тогда, когда $s\bar{x}Es\bar{y}$), и он должен сохранять общий класс для $I_1, \dots, I_m$.

Следовательно, по 16.19 s сохраняет формулу $f(\bar{x}, \bar{a})$, если и только если он оставляет неподвижным каждый элемент поля k определения идеала I. Так как M ω-насыщенна и ω-однородна, это влечет, что k содержится в рациональном замыкании $\bar{a}$. Так как каждый n-тип над $\bar{a}$ так же, как каждый n-тип над k, реализуется в M, это означает, что выполнимость $f(\bar{x}, \bar{a})$ зависит только от типа $\bar{x}$ над k, что $f(\bar{x}, \bar{a})$ эквивалентна формуле $g(\bar{x}, \bar{b})$ с $\bar{b} \in k$. На самом деле, k является рациональным замыканием $\bar{b}$, так как автоморфизм s модели M оставляет неподвижным $f(\bar{x}, \bar{a})$ тогда и только тогда, когда он оставляет неподвижным $\bar{b}$.

Для дифференциальных полей, мы заменяем повсюду идеалы дифференциальными идеалами.

$\square$

Замечание. Мы использовали очень простое свойство ω-стабильных теорий, а именно то что формула содержит только конечное число типов максимального ранга Кантора. В случае алгебраически замкнутых полей, ранг Кантора типа $I \subset M[X_1, \dots, X_n]$ является в действительности размерностью, в геометрическом смысле, соответствующего простого идеала, то есть степенью трансцендентности над M поля частных фактор-кольца $M[X]/I$; эти типы максимальной размерности соответствуют простым идеалам, минимальным среди идеалов, удовлетворяющих формулу.

Мы могли бы также использовать один специфический, но совсем банальный для алгебраистов результат – нетеровость кольца $M[X_1, \dots, X_n]$; в действительности из него следует, что формула содержит конечное число ненулевых простых идеалов, которые в ней минимальны.

Действительно, по нетеровости, каждый простой идеал формулы содержит простой минимальный идеал этой формулы. Далее, из-за элиминации кванторов каждая формула f является дизъюнкцией конечного числа формул вида $P_1(\bar{X}) = 0 \wedge \dots \wedge P_k(\bar{X}) = 0 \wedge Q(\bar{X}) \neq 0$, и минимальных идеалов f необходимо искать среди минимальных идеалов каждого члена дизъюнкции. Если эта формула непротиворечива, то минимальный простой идеал, содержащий $P_1, \dots, P_k$ и не содержащий Q, – это минимальный простой идеал, содержащий $P_1, \dots, P_k$. Имеется только конечное число таких идеалов: если бы их имелось бесконечное число $I_0, \dots, I_n, \dots$,то последовательность $I_0, I_0 \cap I_1, \dots, I_0 \cap \dots \cap I_n, \dots$ составила бы строго убывающую последовательность идеалов.

Если бы мы захотели, то могли бы таким образом обойтись без ранга Кантора, опираясь на результат алгебры, который так не страшен. Можно делать то же самое для дифференциальных полей (нулевой характеристики), хотя кольцо $M[X_1, \dots, X_n]_d$ не удовлетворяет условию нетеровости для дифференциальных идеалов; он ему удовлетворяет только для дифференциальных радикальных идеалов, то есть для тех, что являются пересечениями простых дифференциальных идеалов; этого достаточно для получения нужного результата, но эту теорему, называемую теоремой Ритта-Раденбуша, не так просто доказать.

16.f Теория Галуа для сильных типов

Если $E(x,y)$ – определимое отношение конечной эквивалентности над A, то A-автоморфизм модели M, достаточно однородной и насыщенной, содержащей A, индуцирует перестановку классов $C_1,\ldots,C_n$ эквивалентности E; мы обозначим через $G(E/A)$ группу перестановок классов E, полученных таким образом.

Можно следующим образом охарактеризовать перестановки σ, которые принадлежат $G(E/A)$: выберем представителей $a_1,\ldots,a_n$ из всех классов $C_1,\ldots,C_n$, тогда $\sigma \in G(E/A)$ тогда и только тогда, когда можно найти $a'_j \in C_j, \quad 1 \leq j \leq n$ такие, что кортежи $(a_1,\ldots,a_n)$ и $(a'_1,\ldots,a'_n)$ имели один и тот же тип над A.

Точно также, A-автоморфизмы M действуют на сильные типы над A: получаем таким образом группу, которую обозначим $G(SF_1(A)/A)$. Действие A-автоморфизма на E-классы, конечно, определено его действием на сильных типах, так что мы получаем таким образом, ограничением на классы E, сюръективный гомоморфизм, называемый каноническим, $G(SF_1(A)/A)$ на $G(E/A)$.

Кроме того, если отношение E тоньше, то есть имеет больше классов, чем отношение E', то мы имеем также канонический гомоморфизм ограничения $G(E/A) \longmapsto G(E'/A)$; если E тоньше, чем E', которое само тоньше, чем E'', то имеем коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} & G(E'/A) \arrow[dr] & \\ G(E/A) \arrow[ur] \arrow[rr] & & G(E''/A) \end{tikzcd}$$

Группы $G(E/A)$ образуют фильтрующееся семейство, так как:

$$\begin{tikzcd} & G(E/A) \\ G(E \wedge F\ /A) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & G(F/A)\ . \end{tikzcd}$$

Так как элемент группы $G(SF_1(A)/A)$ полностью определен заданием всех своих ограничений на $G(E/A)$, то $G(SF_1(A)/A)$ представима как подгруппа *проективного предела* (если вы не знаете что это такое, то проконсультируйтесь у ближайшего учебника алгебры) фильтрующейся системы $G(E/A)$: и по компактности легко видеть, что она в действительности состоит из всего этого проективного предела.

Как всякая проконечная группа, $G(SF_1(A)/A)$ становится вполне несвязной компактной группой относительно топологии проективного предела дискретных топологий на $G(E/A)$. Открыто-замкнутыми множествами этой группы являются множества следующего вида: берём отношение эквивалентности E, подмножество X группы $G(E/A)$ и множество элементов $G(SF_1(A)/A)$, проекция которого на $G(E/A)$ есть X. По компактности её открытые подгруппы – это то же самое, что ее замкнутые подгруппы конечного индекса,т.е. множества, образованные из элементов, которые проектируются в Γ, где Γ – некоторая подгруппа некоторой $G(E/A)$. Отметим, что замкнутая группа является пересечением открытых групп.

Рассмотрим отношение конечной эквивалентности E с классами $C_1, \ldots, C_n$ и подгруппу Γ группы $G(E/A)$. Обозначим через r_Γ n-арное отношение, определенное следующей формулой с параметрами из модели M:

$$\bigvee_{\sigma\in\Gamma}[x_1 \in \sigma C_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in \sigma C_n]$$

Так как это отношение является булевой комбинацией отношений типа $y \in C_i$, оно имеет только конечное число сопряженныхA-автоморфизмами M. Действие автоморфизма на r_Γ зависит только от его действия на классах E, так что имеет смысл говорить о действии элемента $G(SF_1(A)/A)$ на r_Γ и отсюда заключаем, что *подгруппа элементов $G(SF_1(A)/A)$, сохраняющих r_Γ, является в точности открытой подгруппой, определенной* Γ.

Можно было бы развить "теорию Галуа" между замкнутыми подгруппами $G(SF_1(A)/A)$ и некоторыми множествами отношений вида r_Γ ; мы будем делать это только тогда, когда имеется элиминация воображаемых элементов.

Прежде всего отметим, что $G(SF_1(A)/A)$ действует на алгебраическое замыкание A_{alg} множества A, так как алгебраический элемент есть не что иное, как некоторый вид сильного типа; таким образом, мы получаем с помощью ограничения сюръективный гомоморфизм, называемый каноническим, группы $G(SF_1(A)/A)$ на $G(A_{alg}/A)$, где $G(A_{alg}/A)$ является группой перестановок A_{alg} , индуцируемых группой A-автоморфизмов M (т.е. группой перестановок s множества A_{alg} таких, что A_{alg} и sA_{alg} имеют один и тот же тип над над A).

Группа $G(A_{alg}/A)$ также снабжена естественной структурой проконечной группы: рассмотрим подмножества B из A_{alg} , полученных добавлением к A конечного числа элементов и содержащих, вместе с каждым элементом b, все сопряженные с b элементы относительно A-автоморфизмов (т.е. элементы, имеющие тот же тип над A что и b; их конечное число); если мы обозначим через $G(B/A)$ множество перестановок B, индуцированных A-автоморфизмами M (это какой-то $G(E/A)$), то увидим, что $G(A_{alg}/A)$ является проективным пределом групп $G(B/A)$. Мы видим также, что каноническая сюръекция $G(SF_1(A)/A)$ на $G(A_{alg}/A)$ непрерывна.

Лемма 16.22 *Если теория T (сильно!) элиминирует воображаемые элементы, то канонический сюрьективный гомоморфизм $G(SF_1(A)/A)$ на $G(A_{alg}/A)$ биективен и бинепрерывен.*

Доказательство. Пусть σ – элемент ядра этого гомоморфизма; он индуцирован A-автоморфизмом s модели M, ограничение которой на A_{alg} тождественно. Пусть C – E-класс, и $\bar{c}$ – кортеж параметров соответствующий по элиминации воображаемых элементов формуле $x \in C$; так как эта формула имеет только конечное число сопряженных относительно A-автоморфизмов M, то $\bar{c}$ также алгебраичен над A, s его так же, как и C не сдвигает; следовательно σ является нейтральным элементом $G(SF_1(A)/A)$. Эта биекция между компактами, будучи непрерывной, будет и бинепрерывной.

□

Мы наконец подошли к теории Галуа: множеству B, где $A \subset B \subset A_{alg}$, сопоставляем группу $G(A_{alg}/B)$, образованную из элементов $G(A_{alg}/A)$, фиксирующих каждую точку B; подгруппе H группы $G(A_{alg}/A)$ мы сопоставляем множество B_H его инвариантов, то есть элементов A_{alg} , являющихся неподвижными при действии на них каждого элемента H. Эта двойное соответствие называется *соответствием Галуа.*

Теорема 16.23 *Если теория T (сильно) элиминирует воображаемые элементы, то соответствие Галуа устанавливает биекцию между замкнутыми подгруппами $G(A_{alg}/A)$ и рационально замкнутыми множествами параметров, находящихся по включению между A и A_{alg} .*

Доказательство. Так как стабилизатор точки b из A_{alg} открыт, если $A \subset B \subset A_{alg}$, то группа $G(A_{alg}/B)$ является пересечением открытых групп; таким образом, он является замкнутым множеством. Ясно, что инварианты подгруппы $G(A_{alg}/A)$ образуют рационально замкнутое множество.

Если элемент b не рационален над B, то его можно сдвинуть A-автоморфизмом, так что B совпадает в точности с множеством инвариантов $G(A_{alg}/B)$. Остается понять, что если H является замкнутой подгруппой $G(A_{alg}/A)$, то она имеет вид $G(A_{alg}/B)$; однако H является пересечением открытых подгрупп H_Γ, где H_Γ – группа инвариантов отношения r_Γ; r_Γ имеет только конечное число сопряженных относительно A-автоморфизмов, так что кортеж $\bar{c}$, соответствующий ей канонически по элиминации воображаемых элементов, лежит в A_{alg} ; H_Γ есть не что иное, как $G(A_{alg}/A \cup \{\bar{c}\})$, и если через B обозначим объединение всех $\bar{c}$, то $H = G(A_{alg}/B)$.

□

В случае теории алгебраически замкнутых полей, алгебраическое замыкание есть то, что знают алгебраисты, и очень легко видеть, что неприводимый многочлен, имеющий только единственный корень, имеет вид $X^{p^n} - a$, где p – характеристика поля, так что рационально замкнутые множества параметров являются совершенными полями, которые замкнуты относительно извлечения корня степени p. Таким образом, мы видим, что получаем классическую теорему теории Галуа (о полях) как частный случай теоремы 16.23, устанавливающую биективное соответствие между промежуточными совершенными полями между K и K_{alg} и замкнутыми подгруппами $G(K_{alg}/K)$.

Этот результат не дается здесь как нечто параллельное с теоремой 16.23: он является ее частным случаем и мы *его на самом деле доказали.* Для этого, в разделе 6.a нам пришлось показать элиминацию кванторов, то есть теорему Гильберта о нулях, исходя из очень общих рассмотрений ω-насыщенных моделей и нескольких примитивных лемм о простых идеалах многочленов от *одной* переменной; далее, мы установили элиминацию воображаемых элементов в предыдущем параграфе, исходя из общих рассмотрений ω-стабильных теорий и легкой леммы о существовании поля определения идеала. Мы видим, что теория Галуа основывается на очень общих принципах и слабо связана с контекстом расширений полей конечных степеней, вопреки тому, что заставляют думать современные учебники алгебры. Метод, который нами был рассмотрен, в действительности близок к тому, что делал Галуа, который не говорил о расширениях полей, ни даже о полях (еще не изобретенных в его время!), но посредством "резольвент Лагранжа" свел сохранение отношения, подобного r_Γ, к фиксации некоторого параметра.

Если в теореме 16.23 элиминацию получить методом T^{eq}, то получаем версию *теоремы о примитивном элементе*, а именно, что открытая группа является стабилизатором некоторого элемента. Эта теорема оказывается истинной для полей вследствие подходящей алгебраической ситуации, но она не может выведена из 16.23 во всей общности.

16.g Исторические и библиографические примечания

Сильные типы, теорема об отношении конечной эквивалентности, воображаемые элементы, все это принадлежит Шелаху, [ШЕЛАХ, 1978]. Следствие 16.7, которое так важно в применениях отклонения, было названо Ласкаром "теоремой об открытом отображении". Элиминация воображаемых элементов и их теория Галуа из статьи [ПУАЗА, 1983c]. Поле определения идеала 16.18 хорошо известно геометрам : это конструкция Андре Вейля.