

## Modelltheorie Übungsblatt 1

Sei  $(I; \leq)$  eine lineare Ordnung. Wir nennen eine Familie  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  von  $\mathcal{L}$ -Strukturen eine *Kette*, falls für alle  $i, j \in I$  gilt:

$$i \leq j \implies \mathcal{A}_i \leq \mathcal{A}_j.$$

Eine Kette  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  heißt *elementar*, falls für alle  $i \leq j$  die Struktur  $\mathcal{A}_i$  eine elementare Unterstruktur von  $\mathcal{A}_j$  ist.

**Aufgabe 1.** Sei  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  eine Kette von  $\mathcal{L}$ -Strukturen. Für jedes  $i \in I$  sei  $A_i$  die Grundmenge von  $\mathcal{A}_i$ . Wir setzen  $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ . Zeigen Sie:

- a)  $A$  ist das Universum einer eindeutig bestimmten  $\mathcal{L}$ -Struktur  $\mathcal{A}$ , für die jedes  $\mathcal{A}_i$  Unterstruktur von  $\mathcal{A}$  ist;
- b) Wenn  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  eine elementare Kette ist, dann ist jedes  $\mathcal{A}_i$  eine elementare Unterstruktur von  $\mathcal{A}$ .

**Aufgabe 2.** Es sei  $(I; \leq)$  eine beliebige lineare Ordnung. Zeigen Sie mittels des Kompaktheitssatzes, dass es eine elementare Erweiterung  $\mathcal{M} \succ (\mathbb{N}; \leq)$  gibt, sodass  $\mathcal{M}$  eine Unterstruktur enthält, welche isomorph zu  $(I; \leq)$  ist.

**Aufgabe 3.** Es sei  $I$  eine nichtleere Menge und  $\mathcal{U}$  ein Ultrafilter auf  $I$ .

- a) Zeigen Sie den Satz von Łoś: Ist  $(\mathcal{M}_i : i \in I)$  eine Familie von  $\mathcal{L}$ -Strukturen und  $\phi(\bar{x})$  eine  $\mathcal{L}$ -Formel, dann gilt für  $\bar{a} = \lim_{i \rightarrow \mathcal{U}} \bar{a}_i \in \prod_{i \rightarrow \mathcal{U}} \mathcal{M}_i$ :

$$\prod_{i \rightarrow \mathcal{U}} \mathcal{M}_i \models \phi(\bar{a}) \iff \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \phi(\bar{a}_i)\} \in \mathcal{U}.$$

- b) Es sei  $\mathcal{M}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur. Zeigen Sie, dass die diagonale Einbettung

$$\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M}^{\mathcal{U}}$$

eine elementare Einbettung ist.

Eine Klasse  $\mathcal{C}$  von  $\mathcal{L}$ -Strukturen heißt *elementar*, falls es eine Menge  $T$  von  $\mathcal{L}$ -Aussagen gibt, sodass  $\mathcal{C} = \{\mathcal{M} : \mathcal{M} \models T\}$ .

**Aufgabe 4.** Zeigen Sie, dass eine Klasse  $\mathcal{C}$  von  $\mathcal{L}$ -Strukturen genau dann elementar ist, wenn sie abgeschlossen unter elementarer Äquivalenz und Ultraprodukten ist.

*Hinweis:* Erinnern Sie sich an den Beweis des Kompaktheitssatzes mittels Ultraprodukten.

Abgabe bis Donnerstag, den 17. Oktober, 10:00 Uhr, Briefkasten 161.

Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.

Website: <https://www.math.uni-muenster.de/u/baysm/logikII/>