

Modelltheorie Übungsblatt 2

Es sei K ein Körper. Wir betrachten K -Vektorräume als Strukturen in der Sprache $\mathcal{L}_{K\text{-VR}} = \{0, +, -, \mu_k\}_{k \in K}$, wobei jedes μ_k ein 1-stelliges Funktionssymbol ist (und die Multiplikation mit k darstellen soll). Die Theorie $T_{K\text{-VR}}$ der K -Vektorräume besteht aus

- den Axiomen für abelsche Gruppen,
- $\forall v, w \ \mu_k(v + w) = \mu_k(v) + \mu_k(w)$,
- $\forall v \ \mu_{k_1+k_2}(v) = \mu_{k_1}(v) + \mu_{k_2}(v)$,
- $\forall v \ \mu_{k_1 k_2}(v) = \mu_{k_1}(\mu_{k_2}(v))$,
- $\forall v \ \mu_1(v) = v$

für alle k, k_1, k_2 aus K .

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

- a) Die Theorie der unendlichen K -Vektorräume hat Quantorenelimination und ist vollständig;
- b) Folgern Sie, dass die Theorie der divisiblen torsionsfreien abelschen Gruppen (in der Sprache $\mathcal{L}_{\text{ab}} = \{0, +, -\}$) Quantorenelimination hat und vollständig ist.
Hinweis: Denken Sie an $\mathbb{Q}$ -Vektorräume.

Es sei $\mathcal{L}_R = \{R\}$ die Sprache, die nur ein zweistelliges Relationssymbol R enthält. Die Theorie T_{ZG} des Zufallsgraphen besteht aus den Aussagen:

- R ist symmetrisch und irreflexiv;
- Für je zwei disjunkte endliche Teilmengen X und Y existiert ein Element z , welches mit allen $x \in X$ in Relation (bzgl. R) steht, jedoch mit keinem $y \in Y$.

Aufgabe 2.

- a) Schreiben Sie T_{ZG} explizit als eine Menge von $\mathcal{L}_R$ -Aussagen und geben Sie einen direkten Beweis dafür, dass jedes Modell von T_{ZG} unendlich ist.
- b) Zeigen Sie, dass die Theorie des Zufallsgraphen Quantorenelimination hat und vollständig ist. Für den Beweis der Vollständigkeit dürfen Sie annehmen, dass T_{ZG} konsistent ist.

Eine Theorie T heißt *streng minimal*, falls für jedes Modell $\mathcal{M} \models T$ jede definierbare Teilmenge $X \subseteq \mathcal{M}$ entweder endlich oder koendlich ist.

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

- a) Die Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper ist streng minimal;
- b) Es sei T eine streng minimale Theorie, $\mathcal{M} \models T$, $\phi(x, \bar{y})$ eine Formel und $(\bar{b}_i)_{i \in I}$ eine Familie von Parametern aus $\mathcal{M}$. Wenn die Menge $\phi(\mathcal{M}, \bar{b}_i)$ für jedes $i \in I$ endlich ist, dann gibt es eine natürliche Zahl k , sodass jede dieser Mengen höchstens k Elemente hat.

Eine Theorie T heißt *modellvollständig*, falls für alle Modelle $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$ gilt:

$$\mathcal{M} < \mathcal{N} \implies \mathcal{M} \prec \mathcal{N}.$$

Aufgabe 4.

- a) Zeigen Sie, dass jede Theorie mit Quantorenelimination auch modellvollständig ist.
- b) Es sei $X \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathcal{L}_{\text{ab}}$ mit Parametern aus $\mathbb{Q}$ definierbar. Zeigen Sie: Wenn $X \cap \mathbb{Q}$ endlich ist, dann auch X .

Abgabe bis Donnerstag, den 24. Oktober, 10:00 Uhr, Briefkasten 161.

Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.

Website: <https://www.math.uni-muenster.de/u/bayism/logikII/>