Dr. M. Bays
T. Clausen

Universität Münster
Wintersemester 2019/2020

Modelltheorie
Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Es sei K ein Körper und V ein unendlicher K-Vektorraum. Wir betrachten V als $\mathcal{L}_{K\text{-VR}}$-Struktur. Es sei $A \subseteq V$ eine Teilmenge von V. Geben Sie eine explizite Beschreibung aller n-Typen über A für alle $n \geq 1$.

Es sei κ eine Kardinalzahl. Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ heißt *κ-saturiert*, falls für alle $A \subseteq \mathcal{M}$, $|A| < \kappa$, jeder 1-Typ über A eine Realisierung in $\mathcal{M}$ besitzt.

Aufgabe 2. Es sei κ eine überabzählbare Kardinalzahl. Zeigen Sie:

a) Die Theorie $T_{\mathbb{Q}\text{-VR}}$ der unendlichen $\mathbb{Q}$-Vektorräume ist κ-kategorisch.
b) Es sei V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum, den wir als $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}\text{-VR}}$-Struktur betrachten. Ist $|V| = \kappa$, dann ist V κ-saturiert.

Ein topologischer Raum heißt *zusammenhängend*, wenn es nicht möglich ist, ihn als Vereinigung zweier disjunkter nichtleerer offener Mengen zu schreiben. Er heißt *total unzusammenhängend*, wenn die einelementigen Teilmengen die einzigen nichtleeren zusammenhängenden Unterräume sind.

Aufgabe 3. Es sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie und $n \geq 0$. Zeigen Sie, dass $S_n(T)$ ein Stone-Raum ist, das heißt $S_n(T)$ ist kompakt, Hausdorff und total unzusammenhängend.

Ein Punkt b in einem topologischen Raum ist *isoliert*, falls die Menge $\{b\}$ offen ist.

Aufgabe 4. Zeigen Sie:

a) Ein Typ $p(\bar{x})$ in einer $\mathcal{L}$-Theorie T ist genau dann isoliert, wenn er als Punkt in $S_{|\bar{x}|}(T)$ isoliert ist.
b) Ein Stone-Raum ist genau dann endlich, wenn jeder Punkt isoliert ist.

Abgabe bis Donnerstag, den 7. November, 10:00 Uhr, Briefkasten 161.
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Website: `https://wwwmath.uni-muenster.de/u/baysm/logikII/`