Dr. M. Bays
T. Clausen

Universität Münster
Wintersemester 2019/2020

Modelltheorie
Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Es sei $\mathcal{M}$ ein Modell der Theorie T_{ZG} des Zufallsgraphen. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{M}$ ist ω-saturiert;

b) Ist $\mathcal{M}$ abzählbar, so ist $\mathcal{M}$ ein Primmodell von T_{ZG}.

Aufgabe 2. Konstruieren Sie explizit ein Modell $\mathcal{M}$ von DLO, welches $(\mathbb{Q}, \leq)$ als Unterstruktur enthält, sodass jeder Typ über $\mathbb{Q}$ in $\mathcal{M}$ realisiert wird.

Es sei T eine vollständige $\mathcal{L}$-Theorie. Eine $\mathcal{L}$-Formel $\phi(\bar{x})$ heißt *algebraisch*, falls die Lösungsmenge $\phi(\mathcal{M})$ endlich ist für jedes $\mathcal{M} \models T$. Ein Typ $p(\bar{x})$ in T heißt *algebraisch*, wenn er eine algebraische Formel enthält.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass algebraische Typen isoliert sind.

Aufgabe 4. Betrachten Sie die Sprache $\mathcal{L} := \{A, B, \Theta, \alpha, (b_i)_{i \in \aleph_1}\}$, wobei A, B, Θ unäre Prädikate sind, α ein 3-stelliges Prädikat ist und b_i Konstanten sind. Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, sodass $\mathcal{M}$ die disjunkte Vereinigung von $A^{\mathcal{M}}, B^{\mathcal{M}}$ und $\Theta^{\mathcal{M}}$ ist, $|A^{\mathcal{M}}| = |B^{\mathcal{M}}|$, $b_i^{\mathcal{M}} \in B^{\mathcal{M}}$, wenn $b_i \neq b_j$ dann $b_i^{\mathcal{M}} \neq b_j^{\mathcal{M}}$, $\Theta^{\mathcal{M}}$ die Menge der Bijektionen $A^{\mathcal{M}} \to B^{\mathcal{M}}$ ist, und $\mathcal{M} \models \alpha(\theta, a, b)$ genau dann, wenn $\theta \in \Theta^{\mathcal{M}}$ und $a \in A^{\mathcal{M}}$ und $b \in B^{\mathcal{M}}$ und $\theta(a) = b$.
Sei $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$.

a) Sei $\tau : A^{\mathcal{M}} \to A^{\mathcal{M}}$ eine Bijektion. Zeigen Sie, dass es einen Automorphismus σ von $\mathcal{M}$ gibt, sodass $\sigma(a) = \tau(a)$ gilt für $a \in A^{\mathcal{M}}$.
Hinweis: Für $\theta \in \Theta^{\mathcal{M}}$ betrachten Sie $\theta \circ \tau^{-1}$.

b) Sei $A_0 \subseteq A^{\mathcal{M}}$ eine abzählbare Teilmenge. Zeigen Sie, dass

$$p(x) := \{A(x)\} \cup \{x \neq a \mid a \in A_0\} \in S_1(A_0)$$

nicht isoliert ist.
Hinweis: Verwenden Sie (a).

c) Zeigen Sie, dass es kein Modell von $T(A_0)$ gibt, das $p(x)$ vermeidet.
Anmerkung: Deshalb ist die Annahme in dem Typenvermeidungssatz, dass die Sprache abzählbar ist, notwendig.

Abgabe bis Donnerstag, den 14. November, 10:00 Uhr, Briefkasten 161.
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Website: `https://wwwmath.uni-muenster.de/u/baysm/logikII/`