Dr. M. Bays
T. Clausen

Universität Münster
Wintersemester 2019/2020

Modelltheorie
Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Es sei $\mathcal{L}$ eine abzählbare Sprache und T eine vollständige $\mathcal{L}$-Theorie mit unendlichen Modellen. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) Für alle $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \models T$ und alle $\bar{a}_1 \in \mathcal{M}_1^{<\omega}$ und $\bar{a}_2 \in \mathcal{M}_2^{<\omega}$ mit $\bar{a}_1 \equiv^{\mathrm{qf}} \bar{a}_2$ gilt:

$$\forall b_1 \in \mathcal{M}_1 \exists b_2 \in \mathcal{M}_2 \; \bar{a}_1 b_1 \equiv^{\mathrm{qf}} \bar{a}_2 b_2;$$

b) T hat Quantorenelimination und ist $\aleph_0$-kategorisch.

Aufgabe 2.

a) Sei $\mathcal{G} = (G; \cdot, \ldots)$ eine Struktur, sodass $(G; \cdot)$ eine Gruppe ist. Nehmen Sie an, dass $\mathrm{Th}(\mathcal{G})$ total transzendent ist.

Zeigen Sie, dass es keine unendliche strikt absteigende Kette von definierbaren Untergruppen $G > G_1 > G_2 > \ldots$ gibt.
Hinweis: Betrachten Sie die Nebenklassen.

b) Zeigen Sie, dass jeder total transzendente Integritätsbereich R ein Körper ist.
Hinweis: Wenn $a \in R$ nicht invertierbar ist, betrachten Sie die Ideale $a^n R$.

Aufgabe 3. Es sei $\mathcal{M}$ eine total transzendente $\mathcal{L}$-Struktur. Es sei $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ und $A \subseteq \mathcal{M}$. Zeigen Sie, dass das Redukt $\mathcal{M}|_{\mathcal{L}'}$ und die Erweiterung $\mathcal{M}_A$ total transzendent sind. Folgern Sie, dass die Theorie der angeordneten $\mathbb{Q}$-Vektorräume nicht ω-stabil ist.

Nikolausaufgabe. Der Nikolaus möchte dieses Jahr seine Gaben nicht selbst verteilen, sondern stattdessen abzählbar viele Wichtel einstellen, die diese Aufgabe für ihn übernehmen. Jeder Wichtel hat entweder einen weißen oder einen schwarzen Bart. Jeder Mensch darf sich wünschen, ob er seine Geschenke von einem Wichtel mit weißem Bart oder einem Wichtel mit schwarzem Bart bekommt. Keine zwei Wichtel haben die gleiche Größe. Im Wichteluniversum existiert zu jeder endlichen Folge von Bartfarben (W oder S) eine nach Größe geordnete Menge von Wichteln, so dass die Bartfarben der Wichtel der Folge entsprechen.

Um den Osterhasen zu beeindrucken, bietet der Nikolaus diesem das Folgende an: *Du darfst dir eine beliebige endliche Anzahl von Wichteln wünschen, die zu dir kommen, und du darfst dir wünschen, welche Folge von Bartfarben entsteht, wenn man die Wichtel der Größe nach ordnet.*

Der Osterhase erwidert: *Toll! Ich möchte mir aber auch noch einen weiteren Wichtel wünschen können, nachdem alle 'meine' Wichtel bei mir eingetroffen sind. Dieser soll an einer von mir bestimmten Stelle in die Größenordnung einreihen, und ich will mir aussuchen dürfen, welche Bartfarbe er hat!*

Kann der Nikolaus diesen Spezialwunsch erfüllen, obwohl er die Wichtel einstellen muss, bevor er die Wünsche der Menschen und des Osterhasens erfährt?

Abgabe bis Donnerstag, den 12. Dezember, 10:00 Uhr, Briefkasten 161.
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Website: `https://wwwmath.uni-muenster.de/u/baysm/logikII/`