

Modelltheorie
Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Es sei T eine $\mathcal{L}$ -Theorie und $\mathcal{M} \models T$. Seien $A \subseteq B \subseteq C \subseteq \mathcal{M}$ Teilmengen von $\mathcal{M}$, sodass C über B konstruierbar ist und B über A konstruierbar ist. Zeigen Sie, dass C über A konstruierbar ist.

Es sei $A \subseteq B \subseteq \mathcal{M}$. Wir sagen B ist *atomar* über A , falls für alle $\bar{b} \in B^{<\omega}$ der Typ $\text{tp}(\bar{b}/A)$ isoliert ist.

Aufgabe 2. Es sei T eine $\mathcal{L}$ -Theorie und $\mathcal{M} \models T$. Seien $A \subseteq B \subseteq \mathcal{M}$ Teilmengen von $\mathcal{M}$, sodass B über A konstruierbar ist. Zeigen Sie, dass B atomar über A ist.

Hinweis: Wenn B mittels $(b_\alpha)_{\alpha < \gamma}$ über A konstruierbar ist, zeigen Sie die Aussage induktiv für alle $B_{\leq \delta} = \{b_\alpha : \alpha \leq \delta\} \cup A$ mit $\delta < \gamma$. Nutzen Sie Lemma 8.12.

Aufgabe 3.

- a) Es sei $A \subseteq \mathcal{M} \models T$. Zeigen Sie: $\text{acl}(A)$ ist genau dann die maximale über A konstruierbare Menge, wenn jeder isolierte 1-Typ über A auch algebraisch über A ist.
- b) Es sei $\mathcal{M} \models T_\infty$, d.h. $\mathcal{M}$ ist eine unendliche Menge als $\mathcal{L}_\emptyset$ -Struktur. Bestimmen Sie alle 1-Typen über der leeren Menge und bestimmen Sie $\text{acl}(\emptyset)$. Welche Teilmengen von $\mathcal{M}$ sind über $\emptyset$ konstruierbar?

Hinweis: T_∞ hat Quantorenelimination.

Aufgabe 4. Es sei $S : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, a \mapsto a + 1$ die Nachfolgerfunktion auf $\mathbb{Z}$. Wir betrachten $(\mathbb{Z}; S)$ als Struktur in der Sprache $\mathcal{L}_S = \{S\}$. Zeigen Sie, dass $T = \text{Th}(\mathbb{Z}; S)$ streng minimal ist und beschreiben Sie $\text{acl}(A)$ für alle $A \subseteq \mathcal{M} \models T$.

Hinweis: Aus der Vorlesung ist bekannt, dass T Quantorenelimination besitzt.

Abgabe bis Donnerstag, den 19. Dezember, 10:00 Uhr, Briefkasten 161.

Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.

Website: <https://www.math.uni-muenster.de/u/baysm/logikII/>