

Modelltheorie
Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Es sei T eine $\mathcal{L}$ -Theorie und $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ eine streng minimale $\mathcal{L}$ -Formel. Wir betrachten die Projektionen $\psi_{\bar{x}}(\bar{x}) = \exists \bar{y} \phi(\bar{x}, \bar{y})$ und $\psi_{\bar{y}}(\bar{y}) = \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{y})$. Zeigen Sie, dass eine dieser Formeln streng minimal ist.

Aufgabe 2. Es sei T eine streng minimale vollständige Theorie mit unendlichen Modellen.

- a) Es sei $A \subseteq \mathcal{M} \models T$, sodass $A = \text{acl}^{\mathcal{M}}(A)$ und $|A| \geq \aleph_0$. Zeigen Sie, dass A die Grundmenge einer elementaren Unterstruktur von $\mathcal{M}$ ist.
- b) Zeigen Sie, dass es eine Kardinalzahl $0 \leq \lambda \leq |T|$ gibt, sodass

$$\{\dim(\mathcal{M}) : \mathcal{M} \models T\} = [\lambda, \infty).$$

Dabei ist $[\lambda, \infty) = \{\kappa \in \text{Kard} : \lambda \leq \kappa\}$. Gilt $|T| = \aleph_0$, so folgern Sie, dass T genau dann $\aleph_0$ -kategorisch ist, wenn T kein endlich-dimensionales Modell besitzt.

Bonusaufgabe 1. Es sei G eine unendliche Gruppe, welche wir als $\mathcal{L}_{\text{gp}}$ -Struktur $\mathcal{G} = (G, 1, \cdot, {}^{-1})$ betrachten. Die Theorie $\text{Th}(\mathcal{G})$ sei streng minimal. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass G nicht abelsch ist und gehen Sie wie folgt vor:

- a) Das Zentrum $Z(G)$ ist endlich und alle Elemente in $G \setminus Z(G)$ sind zueinander konjugiert und haben endliche Ordnung;
- b) Sei nun $H = G/Z(G)$. Alle Elemente in $H \setminus \{1\}$ sind zueinander konjugiert und haben endliche Ordnung. Insbesondere ist H nicht abelsch;
- c) Zeigen Sie $g^2 = 1$ für alle $g \in H$. Nutzen Sie, dass g und g^{-1} zueinander konjugiert sind;
- d) Eine Gruppe, in der jedes $g \neq 1$ Ordnung 2 hat, ist abelsch.

Bonusaufgabe 2. Es sei $\mathcal{L} = \{0, +, -\}$ und T die folgende $\mathcal{L}$ -Theorie:

- Axiome für unendliche abelsche Gruppen;
- $\forall x (2x \doteq 0 \iff \exists y \, 2y \doteq x)$.

Zeigen Sie, dass T Quantorenelimination besitzt und vollständig ist.

Hinweis: Jedes Modell von T ist von der Form $\bigoplus_I \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ für eine unendliche Menge I .

Die folgenden beiden Aufgaben sind vergleichbar mit den Aufgaben in der Prüfung. Ergebnisse aus der Vorlesung sollen nur benutzt werden, wenn die Aufgabenstellung dies explizit zulässt.

Bonusaufgabe 3.

- a) Es sei T eine abzählbare vollständige Theorie und $n \geq 1$. Die isolierten Typen seien nicht dicht in $S_n(T)$. Zeigen Sie, dass $|S_n(T)| = 2^{\aleph_0}$.
- b) Es sei $\mathcal{M} = (2^\omega, E_i)_{i < \omega}$, wobei E_i eine Äquivalenzrelation sei, die durch $f E_i g \iff f(i) = g(i)$ definiert ist. Setze $T = \text{Th}(\mathcal{M})$. Zeigen Sie (zum Beispiel mittels Automorphismen von $\mathcal{M}$), dass die Formel $x \dot{=} x$ einen Typen in $S_1(T)$ isoliert. Folgern Sie $|S_1(T)| = 1$. Zeigen Sie $|S_2(T)| = 2^{\aleph_0}$.

Bonusaufgabe 4.

- a) Es seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ unendliche saturierte $\mathcal{L}$ -Strukturen und es gelte $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. Zeigen Sie, dass sich $\mathcal{M}$ genau dann elementar in $\mathcal{N}$ einbetten lässt, wenn $|\mathcal{M}| \leq |\mathcal{N}|$.
- b) Es sei κ eine unendliche Kardinalzahl, $\mathcal{M}$ eine κ -saturierte $\mathcal{L}$ -Struktur und $\mathcal{N}$ eine elementare Erweiterung von $\mathcal{M}$. Ist dann $\mathcal{N}$ notwendigerweise auch κ -saturiert? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel. Sie dürfen alle Resultate aus der Vorlesung verwenden.

*Abgabe bis Donnerstag, den 9. Januar, 10:00 Uhr, Briefkasten 161.
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Website: <https://www.math.uni-muenster.de/u/bayism/logikII/>*