

Modelltheorie
Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Es sei $\mathcal{L}$ eine abzählbare Sprache und T eine vollständige $\mathcal{L}$ -Theorie mit unendlichen Modellen. Es sei $\phi(x)$ eine streng minimale Formel und es gebe ein ω -saturiertes Modell $\mathcal{M} \models T$, sodass $\mathcal{M} = \text{acl}(\phi(\mathcal{M}))$. Zeigen Sie, dass T $\aleph_1$ -kategorisch ist.

Hinweis: Proposition 12.37.

Aufgabe 2. Es sei T eine streng minimale $\mathcal{L}$ -Theorie mit Primmodell $\mathcal{M}$. Es sei $m < \omega$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- a) $m = \dim(\mathcal{M})$;
- b) m ist minimal, sodass es unendlich viele Formeln $\phi(x_0, \dots, x_m)$ modulo T gibt.

Aufgabe 3. Beschreiben Sie alle ununterscheidbare Folgen in Modellen der folgenden Theorien:

- a) Die Theorie der unendlichen $\mathbb{Q}$ -Vektorräume;
- b) Die Theorie des Zufallsgraphen.

Aufgabe 4. Ein *geordneter $\mathbb{Q}$ -Vektorraum* ist ein $\mathbb{Q}$ -Vektorraum mit einer linearen Ordnung $<$, sodass

$$\forall x \forall y \forall z (x < y \rightarrow x + z < y + z).$$

Sei $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{\mathbb{Q}\text{-VR}} \cup \{<\}$, und sei T die Theorie der unendlichen geordneten $\mathbb{Q}$ -Vektorräume. Nach Vorlesung ist T vollständig und hat Quantorenelimination.

- a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R} \models T$ keine nicht-konstante unendliche ununterscheidbare Folge hat.
- b) Sei $\mathcal{U}$ ein Nicht-Hauptultrafilter auf ω und sei ${}^*\mathbb{R}$ die Ultrapotenz $\mathbb{R}^{\mathcal{U}} \models T$. Beschreiben Sie eine nicht-konstante unendliche ununterscheidbare Folge in ${}^*\mathbb{R}$.
Hinweis: Sei $\alpha > \mathbb{R}$. Betrachten Sie $(\alpha^n)_{n \in \omega}$.

Abgabe bis Donnerstag, den 16. Januar, 10:00 Uhr, Briefkasten 161.
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Website: <https://www.math.uni-muenster.de/u/baysm/logikII/>